

# Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz en jets

---

Lic. Lorena Zibecchi y Lic. Marina Sosa  
<lzibecchi@fcaglp.unlp.edu.ar>  
<marinasosa@fcaglp.unlp.edu.ar>

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas  
Universidad Nacional de La Plata

La Plata, agosto de 2015

# 1. Introducción

Decir que un plasma o sistema de fluido es estable o inestable hace referencia al comportamiento de pequeñas perturbaciones del sistema. Si existen pequeñas perturbaciones en el sistema que tienden a atenuar o disminuir su tamaño se dice que ese sistema es estable. Si por el contrario, las perturbaciones tienden a aumentar su tamaño y producen cambios en la naturaleza del flujo, se dice que el sistema es inestable.

Una manera de analizar analíticamente la estabilidad del fluido es llevando a cabo un análisis de estabilidad lineal, aunque el método se puede extender a órdenes no lineales si se quiere.

El método de análisis de inestabilidad lineal se resuelve a partir de la derivación de la relación de dispersión:

$$D(w, k) = 0 \tag{1}$$

donde las perturbaciones del fluido variable  $V^1$  se asumen de la forma:

$$V^{(1)} \approx e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-wt)} \tag{2}$$

La estabilidad del flujo es luego inferida por el comportamiento de la frecuencia angular compleja ( $w$ ) o por el vector de onda ( $\mathbf{k}$ ), raíces de la Ec. 1. Si ( $w$ ) se considera real, luego las raíces de 1 con una parte imaginaria positiva de ( $\mathbf{k}$ ) corresponden a un decaimiento (espacial) de las perturbaciones del sistema, y raíces con una parte de ( $\mathbf{k}$ ) negativa imaginaria corresponden a un crecimiento (espacial) de las perturbaciones con longitud de crecimiento  $\lambda_e = -1/Im(\mathbf{k})$ . Cuando hay raíces de este tipo se dice que hay inestabilidad espacial. Alternativamente, se puede asumir ( $\mathbf{k}$ ) real, en este caso, la presencia de raíces de la Ec. 1 con una parte de ( $w$ ) positiva e imaginaria indica inestabilidad temporal con un tiempo de crecimiento  $\tau_e = -1/Im(w)$ , mientras que las raíces con parte imaginaria negativa de ( $w$ ) corresponde a un decaimiento de perturbaciones.

Las inestabilidades del plasma pueden dividirse en dos categorías, *microinestabilidades*, cuyo efecto principal es cambiar la función de distribución de especies de partículas en el plasma en donde los detalles de esta distribución de funciones es esencial para su entendimiento y *macroinestabilidades*, donde solo las ecuaciones de movimiento del fluido son necesarias para describir la inestabilidad.

Las microinestabilidades tienden a aparecer a pequeñas escalas y tienen poco efecto sobre el total de la estructura del flujo. Por el contrario, las longitudes de escala sobre la cual operan las macroinestabilidades en fluidos se

espera que reflejen las escalas físicas del sistema. Los casos típicos de inestabilidades macroscópicas en fluidos se ejemplifican con inestabilidades de Rayleigh-Taylor y Kelvin-Helmholtz; y las inestabilidades macroscópicas en plasmas pueden ser representadas por las inestabilidades *kink* y *sausage* en un haz con campo magnético azimutal como también por las inestabilidades de Rayleigh-Taylor y Kelvin-Helmholtz. Las inestabilidades de Rayleigh-Taylor surgen cuando un fluido denso descansa sobre un fluido liviano en un marco acelerado o en un campo gravitacional, y como efecto se genera un “goteo” de fluido más denso que penetra dentro del medio menos denso. Las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz surgen cuando dos fluidos paralelos están en movimiento relativo de algún borde en común. Los modos Kelvin-Helmholtz crecen dentro de unas notables estructuras de onda (Roberts *et al.* 1982) y causan transferencia de material a lo largo del límite.

La permanencia de los haces astrofísicos es determinada en su mayoría por su respuesta a las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz. Estas inestabilidades las utilizó Blake (1972) para explicar la posible causa de la distorsión de los lóbulos de las radio fuentes y Ershkovich (1980) en las colas de los cometas. El estudio de las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz en jets de radio fue introducida en 1976 por Turland & Scheuer y por Blandford & Pringle en 1976 con el propósito de testear la viabilidad del transporte de energía hacia las partes más externas de las radio galaxias requerido por el modelo del haz.

Las inestabilidades también se han utilizado como fuente de energía que podrían causar *in situ* aceleración de partículas (Ferrari *et al.* 1979). En general, el estudio de la estabilidad de los haces tiene como objetivos, en primer lugar, descubrir si existen estructuras de haces capaces de transportar la energía de los lóbulos de radio sin ser perturbado totalmente, y en segundo lugar, determinar si la aceleración de partículas y las distorsiones de estructuras observables pueden surgir de las inestabilidades que no perturban los haces.

El análisis de la estabilidad del haz de flujo a través de la derivación de la relación de dispersión (Ec. 1) involucra asumir que las perturbaciones son lo suficientemente pequeñas tal que las ecuaciones del fluido/plasma son lineales en las variables de perturbación. Esto deja de ser cierto cuando las perturbaciones crecen a tamaños observables, en ese caso un análisis lineal puede predecir al menos las escalas y los tipos de estructuras que puedan desarrollarse cuando satura la inestabilidad.

Las estructuras generadas por una inestabilidad pueden desarrollar choques dentro (o fuera, o ambos) del haz si el flujo es supersónico, y el flujo es probable que se desvíe fuertemente del patrón suave que se asume como base para el cálculo. Si se forman estos choques, se puede dar lugar a la aceleración de partículas, y pueden darse cambios abruptos en la dirección de las propie-

dades físicas de los haces. Alternativamente, la operación de inestabilidades puede dar lugar a la formación de *solitons*, perturbaciones no lineales que se propagan sin cambio de forma, y mantienen su identidad al colisionar con otros *solitons*.

## 2. Jets en Laboratorios

Investigaciones de laboratorio de la estabilidad de flujos de cizalladura libres, incluyendo jets y estelas, han dado lugar a un enfoque teórico del desarrollo de estos flujos bajo la influencia de perturbaciones forzadas y aleatorias. Este enfoque es directamente aplicable a investigaciones de flujos astrofísicos a medida que los números adimensionales que caracterizan al flujo (número de Mach,  $M$ ) son comparables en las dos situaciones. Más importante aún, el enfoque general dentro de la relevancia de posibles acercamientos a la simplificación y análisis de las ecuaciones de flujo son de considerable ayuda a la hora de entender el flujo.

### 2.1. El flujo estable

La discusión de la estabilidad del jet comienza con la asunción de su estructura de estado estacionario, y los estudios analíticos se restringen a flujos que varían lentamente y que están cercanos a la presión de equilibrio, de modo que el flujo en estado estacionario es relativamente simple. El flujo puede ser laminar o turbulento, pero la falta de una descripción teórica convincente de turbulencia nos deja a nosotros considerar el desarrollo de inestabilidades en un jet laminar. Jets de sección circular (con radios de sección constante o de cambios lentos) son de gran interés para los astrofísicos, y la típica estructura de este tipo de flujo puede verse en la Figura 1, donde se define el perfil de velocidad  $v_r^0$  y el perfil de densidad  $\rho_r^0$  del flujo no perturbado.

#### 2.1.1. El patrón observable de inestabilidad

La capa de cizalladura entre el flujo del jet y el medio ambiente es inestable, el jet se distorsiona para convertirse en no cilíndrico mediante el crecimiento de las ondas de Kelvin-Helmholtz en dirección de la base donde el jet emerge al medio ambiente.

Perturbaciones axisimétricas son menos importantes en jets de altas velocidades, y predominan las distorsiones helicoidales del jet. El crecimiento inicial de los modos dominantes es exponencial en tiempo (como debería

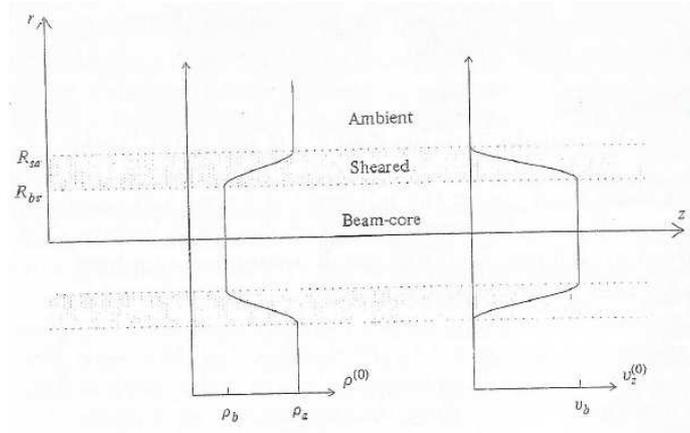


Figura 1: Diagrama esquemático de la estructura que se asume para un haz cilíndrico.

esperarse de la teoría de inestabilidad lineal), hasta que el modo de crecimiento más rápido alcanza la amplitud no lineal. El desarrollo anterior del flujo involucra el pasaje de energía de algunos modos a otros de una manera intrínsecamente no lineal y se dice que reflejan el “modo competición” (Frey-muth 1966; Miksad 1972, 1973). Los modos que sobreviven esta fase no lineal muestran altas tasas de crecimiento y un balance favorable entre las pérdidas y ganancias de energía que se generan al interactuar con otras ondas. Las ondas de superficie sobrevivientes se “enrollan” para producir estructuras tipo vórtice de gran escala que forman un patrón cuasi periódico dentro de las capas que se están mezclando (Frey-muth 1966; Miksad 1972; Ho & Huang 1982). En las capas de cizalladura 2-D (y presumiblemente, en los jets de flujos) la naturaleza de los flujos de gran amplitud depende sensiblemente de la estructura de la capa crítica donde la velocidad de fase de las ondas de superficie es igual a la velocidad del flujo (Stuart 1971). Eventualmente los grandes vórtices se mezclan para formar grandes estructuras, las cuales amplían la capa de mezcla (turbulenta) entre el núcleo del jet (laminar) y el medio ambiente (laminar).

### 2.1.2. Transición a pequeña escala

Los núcleos de los grandes vórtices tienden a volverse turbulentos después de un par de giros, y el flujo dentro de las capas de mezcla se vuelve turbulento a una escala pequeña de transición. Incluso cuando la turbulencia esta completamente establecida y las capas de mezcla se vuelven anchas ondas de Kelvin-Helmholtz (una gran parte del radio del jet) con longitudes de onda

mayores que lo que pueda soportar el ancho de las capas, y las estructuras de gran escala pueden todavía verse dentro del jet. Este resultado solo es bien representado para las capas de cizalladura en 2-D, pero es probable que sea cierto para los jets (Brown & Roshko 1974).

### 2.1.3. Cálculo de inestabilidades

Los experimentos de laboratorio son particularmente importantes porque contribuyen a entender mejor la aplicación de la teoría de inestabilidad lineal a la estabilidad de los jets. Dado que las estructuras dominantes desarrolladas en los jets tienen amplitudes no lineales y tamaños del orden del radio del jet, podría ser cierto que la teoría lineal no sería apropiada para estudiar la formación de inestabilidades. Afortunadamente, este no es el caso, y la escala en la que el jet comienza a distorsionarse, las longitudes de onda de los modos, y la longitud de onda de la inestabilidad dominante en el jet son bien explicadas por la teoría de inestabilidad lineal.

Matemáticamente, no es claro si las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz son “absolutas” (crecimiento en un punto fijo del espacio) o “convectivas” (crecimiento en el marco en el cual el fluido está en reposo, pero disminuye en puntos espaciales fijos porque el flujo medio arrastra la inestabilidad), y por lo tanto no es claro si es mejor un análisis temporal o espacial de la relación de dispersión. Sin embargo, los datos experimentales muestran claramente que las inestabilidades del jet se describen mejor con un enfoque espacial que temporal (Mattingly & Criminale 1972). Esta distinción es importante porque aunque el crecimiento temporal,  $\tau_e$ , y el crecimiento de la longitud,  $\lambda_e$ , de un modo con  $\lambda_0$  pueden estar relacionados con la velocidad de grupo, solo si el modo es levemente inestable, no es posible encontrar una relación simple para el modo más inestable, que son precisamente los de mayor interés (Gaster 1962). Una inconsistencia lógica en el tratamiento espacial de las inestabilidades es que los modos tienden a un tamaño infinito a medida que se va hacia el infinito.

El análisis espacial provee una descripción consistente de inestabilidades en situaciones en donde la relación de dispersión hace un suave mapeo entre los ejes  $R_e(\mathbf{k})$  y  $R_e(w)$ , que parece ser el caso de los flujos de jets.

La teoría de inestabilidad lineal reproduce satisfactoriamente el dominio de las inestabilidades axisimétricas cerca de la base del jet, y de inestabilidades helicoidales en regiones más alejadas, muestra que este fenómeno está relacionado con la desaparición de un potente núcleo dentro del jet. Batchelor & Gill (1962) mostraron que solo las ondas de inestabilidades helicoidales pueden ser soportadas por el tipo de perfil suave de velocidad adoptado por jets bien alejados de sus bases.

#### 2.1.4. Modo preferencial

En general es más conveniente en el laboratorio estudiar la respuesta del jet al ser forzado por la aplicación de una perturbación sinusoidal de frecuencia  $\nu_f$ , que permitir que el ruido ambiental perturbe el jet. Crow & Champagne (1971) mostraron que el jet tiene máxima respuesta a ser forzado cuando  $\nu_f = \nu_p$ , la “frecuencia preferencial”, dada por  $\nu_p \approx 0.3v_j/D$ , donde  $D$  es el diámetro del jet y  $v_j$  es la velocidad del jet. El modo preferencial (o modo “jet-columna”) es una distorsión de tipo vórtice global y axisimétrica y no es lo mismo que el modo “*shear layer*” de mayor estabilidad, el modo natural del perfil de velocidad original del jet (de frecuencia  $\nu_n$ ).

Un estudio experimental de los modos naturales y preferenciales de los jets muestra que  $\nu_n$  y  $\nu_p$  están fuertemente relacionadas. La forma en cómo están relacionadas no se puede explicar. Este cálculo involucra el análisis de una inestabilidad lineal basado en el perfil de velocidad observado del jet en la región donde el modo preferencial es predominante, en lugar de utilizar el perfil de velocidad original del jet, y por lo tanto puede ser considerado como una descripción de la evolución no lineal en la estructura del perfil original del jet.

#### 2.1.5. *Feedback* global

Generalmente se supone que el desarrollo de inestabilidades y mezcla en la capa de cizalladura del jet es un fenómeno local que surge de las condiciones obtenidas a cada punto del jet. Dimotakis & Brown (1976) sugirieron que este podría no ser el caso en muchos experimentos de laboratorio, y que el desarrollo de vórtices a gran escala de grandes amplitudes lejos de la base del jet podrían tener un significativo efecto *feedback* en el jet. Este *feedback* de los productos de inestabilidades no lineales a la generación de inestabilidades cerca de la base del jet puede ser importante en astrofísica como también en el laboratorio. Hay evidencia de códigos numéricos de que esto puede ocurrir.

#### 2.1.6. Jets electromagnéticamente activos

Las diferencias entre los flujos de laboratorio y flujos astrofísicos son más marcadas cuando el jet tiene campos magnéticos y se estudia la ionización de partículas.

Los jets de laboratorio son más del tipo partícula que de tipo fluido (Spulak & Burns 1984) y no son necesariamente indicadores útiles de las propiedades de los flujos astrofísicos excepto para los efectos electrodinámicos únicamente. Se sabe, por ejemplo, que los jets de laboratorio pueden transportar corrientes de importancia dinámica (Ekdahl et al. 1974; Benford & Smith 1982) y

que el autoconfinamiento puede surgir de los campos magnéticos impulsados por estas corrientes (Benford 1983), pero la importancia de las corrientes en situaciones astrofísicas no es clara.

### 3. El flujo estable en jets astrofísicos

Un correcto análisis de la estabilidad del haz depende de la naturaleza del flujo, del tipo de material del que está compuesto, de su ancho, densidad y velocidad del flujo y de las condiciones de borde impuestas por el entorno del flujo. La gran cantidad de datos observacionales del jet no proveen estimaciones exactas de los parámetros de flujo, e incluso no es claro como se relacionan las emisiones observadas con el flujo en sí. De hecho, una de las razones por la cual se estudian las inestabilidades de los haces es que al comparar las propiedades de estabilidad predictas con las estructuras observadas pueden reducirse los rangos de los parámetros al eliminar haces que son demasiado inestables como para ser observados. En lo que sigue veremos los posibles rangos físicos de los parámetros del jet y se desarrollaran las ecuaciones de movimiento que describen los haces.

#### 3.1. Condiciones físicas

La Tabla 1 muestra los rangos de los parámetros astrofísicos destacados que caracterizan al jet.

Los haces de flujo bajo los jets astrofísicos han sido divididos en tres segmentos como se muestra en la Figura 1, el núcleo del haz (indicado con el subíndice b), el medio ambiente (indicado con el subíndice a) y la región entre el haz y el medio ambiente (indicado con el subíndice s). Alguno de los parámetros físicos contenidos en la Tabla 1 pueden considerarse bien determinados.

Los parámetros del medio que rodea a los jets de radio estan relativamente bien determinados gracias a los datos en rayos-X obtenidos con satélites como *Einstein*, y los valores dados en la Tabla 1 reflejan el rango de propiedades del medio interestelar en galaxias y del medio intergaláctico en el cual están embebidos.

Con respecto al entorno magnético del jet de radio hay menos información disponible, pero si consideramos que el campo en el halo magnetoiónico alrededor de M 84 es típico, puede decirse que campos magnéticos  $B_a \sim 0.1nT$  a escalas de unos pocos kpc son comunes (Laing & Bridle 1987). Los campos magnéticos externos y más fuertes son necesarios si los jet están confinados magnéticamente y si se esperan gradientes radiales de intensidad del campo

Parámetro		Valor
Velocidad de sonido del medio ambiente	$c_{Sa}$	$(300 - 1000) \text{ Kms}^{-1}$
Densidad del medio ambiente	$\rho_a$	$(10^{-25} - 10^{-22}) \text{ Kms}^{-3}$
Campo magnético del medio ambiente	$B_a$	$(0 - 1000) \text{ nT}$
Temperatura del medio ambiente	$T_a$	$(10^6 - 10^8) \text{ K}$
Presión del gas del medio ambiente	$P_a$	$(10^{-15} - 10^{-10}) \text{ Pa}$
Índice politrópico del medio ambiente	$\Gamma_a$	$\frac{5}{3}$
Radio del haz	$R$	$(0.1 - 1000) \text{ pc}$
Velocidad del haz	$v_b$	$c_{Sa} - 0.95c$
Velocidad de sonido del haz	$c_{Sb}$	$(0.1 - 1000)c_{Sa}$
Densidad del haz	$\rho_b$	$(10^{-6} - 10^2)\rho_a$
Campo magnético del haz	$B_b$	$(0 - 1000) \text{ nT}$
Índice politrópico del fluido del haz	$\Gamma_b$	$\frac{4}{3} - \frac{5}{3}$
Ancho de la región de cizalladura	$\delta$	$(0 - 2)$
Índice politrópico del fluido de cizalladura	$\Gamma_s$	$\frac{4}{3} - \frac{5}{3}$

Tabla 1: Parámetros físicos que caracterizan al jet y al medio ambiente.

azimutal: el límite superior de  $B_a$  en la Tabla 1 refleja esta posibilidad. La presión ejercida por un campo confinado puede ser tan grande como  $10^{-6} \text{ Pa}$ , la cual pueda superar enormemente la presión del gas del ambiente, y la velocidad de Alfvén:

$$c_A = \frac{B}{(\mu_0 \rho)^{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

en el medio ambiente puede acercarse a  $c$  ( $c_{Aa} \gg c_{Sa}$ ). Si el campo magnético en el medio ambiente es bajo, ( $c_{Aa} \ll c_{Sa}$ ) y la presión magnética es dinámicamente despreciable.

Puede asumirse al medio ambiente como uniforme, sin densidad, temperatura o gradiente de campo magnético que pueda causar que un flujo en estado estacionario sea no cilíndrico.

El problema de la inestabilidad del haz se vuelve intratable si se consideran variaciones rápidas de las propiedades del medio ambiente. Para los modos de grandes longitudes de onda asumir uniformidad es poco probable y será necesario resolver cálculos muy complejos.

Como se ha marcado anteriormente, los estudios de inestabilidad analítica están restringidos a flujos cerca del equilibrio dinámico, donde la presión interna del haz (magnética, térmica y de partículas relativistas) equilibra la presión externa del medio ambiente. Para radiofuentes débiles como 3C 449

y NGC 6251, la energía del jet contenida (mínima) será baja, y el mínimo en la presión de los electrones de radio que emiten ( $10^{-14}$  a  $10^{-11}$  Pa) indica que la presión térmica del medio ambiente (mayor a  $10^{-10}$  Pa) puede confinar el jet. Para los jets más poderosos en quasars y radio galaxias, por otro lado, asumir que el jet esta confinado implica que el campo magnético externo,  $B_a$ , esta contribuyendo significativamente a la presión. Si el jet es “libre”, y no esta en contacto efectivo con el medio ambiente, todo este análisis de inestabilidades descripto hasta el momento no se puede aplicar.

Los ángulos de apertura de los radio jets son pequeños, menores a los  $3^\circ$  en jets de gran potencia. En una simple representación del flujo, el haz se asume con forma cilíndrica (ver Figura 1), aunque haces cónicos con pequeños ángulos de apertura también pueden considerarse (Hardee 1984).

Los radios de los jets de radio  $R$  varían desde menos de 1 parsec en jets VLBI hasta 1 Kpc en radiofuentes de baja potencia. En los casos en los que el modelo del haz contiene un núcleo rodeado por una capa de cizalladura (ver Figura 1), se tomará un  $R$  como el punto medio de la capa,  $R = \frac{1}{2}R_{sa} + R_{bs}$ . El ancho de la capa será descripto por la constante adimensional

$$\delta = 2 \frac{R_{sa} - R_{bs}}{R_{sa} + R_{bs}} \quad (4)$$

y se asume que las variaciones de  $v_z^0$  y  $\rho^0$  estarán confinadas dentro de la capa de cizalladura.

Los principales componentes dinámicos del fluido del haz son, presumiblemente el gas térmico y las partículas relativistas (con un índice politrópico efectivo,  $\Gamma_b$ , que va de  $4/3$  a  $5/3$ , y campos magnéticos.

Debido a las incertezas en el valor de la velocidad del haz,  $v_b$  (en la Tabla 1 dimos un amplio rango para este parámetro) y que también se desconoce la estructura de la velocidad a través del haz, trataremos al perfil de velocidad en estado estacionario del haz como una función indeterminada,  $v_z^0(r)$ , que decrece hacia cero (no necesariamente de manera monótona), desde su valor central,  $v_z^0(0) = v_b$ , con  $r$  que decrece desde  $R_{bs}$  hasta  $R_{sa}$ .

Toda esta discusión hace referencia a la “velocidad media del flujo”, la cual es una representación incompleta del campo del flujo si el haz es turbulento. El número de Reynolds determina si un haz astrofísico puede soportar turbulencia: el número de Reynolds relevante para los plasmas activos magnéticamente es el usual para un fluido:

$$R_e = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (5)$$

y el número magnético de Reynolds

$$R_{\text{em}} = v l \sigma \mu_0, \quad (6)$$

donde  $v$  es la velocidad de escala y  $l$  es la longitud de escala del flujo ( $v \approx v_b$  y  $l \approx R$ ).  $\rho$ ,  $\eta$  y  $\sigma$  son la densidad, viscosidad y conductividad eléctrica del fluido, respectivamente, y  $\mu_0$  es la permeabilidad del espacio libre. Usando valores representativos para la temperatura, campo magnético, densidad, velocidad y radio del jet (de la Tabla 1) y la expresión para  $\sigma$  y  $\eta$  dada por Spitzer (1962), estos números de Reynolds pueden considerarse como

$$R_e \sim 4 \times 10^{28}, \quad (7)$$

y

$$R_{\text{em}} \sim 10^{28}, \quad (8)$$

a menos que la velocidad y el gradiente de velocidad del flujo sean precisamente paralelos al campo magnético. El valor tan grande de  $R_{\text{em}}$  indica que la difusión del campo magnético es mucho menos importante que la advección del campo por el flujo. Por otro lado, el alto valor de  $R_e$  implica que los movimientos turbulentos casi no disminuyen (el rango inicial del espectro turbulento es grande) y los haces astrofísicos deberían ser altamente turbulentos (De Young 1984) o deberían sufrir rápidamente la transición a turbulento bajo la influencia de inestabilidades si los haces son inyectados en el medio ambiente como un flujo laminar.

El análisis de inestabilidad desarrollado aquí asume que cualquier campo dinámicamente importante está bien ordenado (para hacer el problema más accesible) y está dominado por componentes azimutales y axiales.

Existen procedimientos para estimar la densidad del jet pero con ciertas dificultades de interpretación y un acercamiento alternativo es comparar los resultados de simulaciones numéricas de los flujos de haces con las morfologías observadas del jet.

Los cálculos también sugieren que los haces de baja densidad desarrollan *cocoons* calientes donde es importante el reflujo de la cabeza del haz pero estos haces de alta densidad no lo son. Tales estructuras de temperatura y densidad transversales al eje del haz serán parametrizadas por una función modelo,  $\rho^0(r)$ , que varía desde  $\rho_a$  hasta  $\rho_b$  dentro de la capa compartida,  $R_{\text{sa}} > r > R_{\text{bs}}$  (Fig. 1).

### 3.1.1. Ecuaciones de movimiento de los haces

En acuerdo con los argumentos dados arriba, se modelaron los flujos de fluido del haz como un gas no viscoso, eléctricamente conductivo, compresible, relativista que se mueve en ausencia de algún campo gravitacional. Las

ecuaciones que describen este movimiento son las “ecuaciones de conservación de energía y momento”

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (9)$$

donde el tensor de energía y momento  $T^{\mu\nu}$  contiene la energía y momento del fluido y del campo electromagnético

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{fluid}}^{\mu\nu} + T_{\text{EM}}^{\mu\nu} \quad (10)$$

$$T_{\text{fluid}}^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u^\mu u^\nu + P \eta^{\mu\nu} \quad (11)$$

$$T_{\text{EM}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left( F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \right). \quad (12)$$

La densidad del fluido,  $\rho$ , incluye la densidad de energía del fluido de la masa en reposo y de la masa equivalente,  $P$  es la presión del fluido y  $u^\mu$  es el cuádrivector de velocidad. Se asume que los índices de letras griegas van del 0 hasta el 3 y  $\eta^{\mu\nu}$  es el tensor de la métrica de Minkowski definido de acuerdo a la convención espacio-tiempo adoptada.  $F^{\mu\nu}$  es el tensor del campo electromagnético.  $\mu_0$  es la permeabilidad del fluido,  $\epsilon$  y  $\mu$  se asumen igual a uno. Sumado a las ecuaciones de movimiento, se necesita una ecuación para describir la presencia de un gradiente en la entropía debido a los cortes de densidad y velocidad y la generación de entropía por el calentamiento Joule. Esta ecuación de entropía es

$$(n s u^\mu)_{,\mu} = -\frac{1}{T} u_\mu F^{\mu\nu} J_\nu, \quad (13)$$

donde  $n$  es la densidad del número bariónico,  $s$  es la entropía por barión en el fluido,  $T$  es la temperatura del fluido y  $J^\mu$  es el cuádrivector de carga de corriente. El lado derecho de la ecuación representa la tasa de generación de entropía por unidad de volumen. El tensor del campo electromagnético  $F^{\mu\nu}$  está restringido por las ecuaciones de Maxwell

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \quad (14)$$

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mu_0 J^\alpha \quad (15)$$

que contiene dentro las ecuaciones de conservación de carga eléctrica,  $J^\mu{}_{,\mu} = 0$  como se puede ver al derivar la ecuación 15 y usando la antisimetría de  $F^{\mu\nu}$ . También se necesitan ecuaciones constitutivas que describan la relación entre la carga de corriente y los campos (“la ecuación de conducción”),

$$J^\mu + \frac{u^\mu u_\nu}{c^2} J^\nu = \sigma F^{\mu\nu} u_\nu \quad (16)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica y ecuaciones que describan la interrelación de los parámetros termodinámicos  $n$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $s$  y  $T$ . Estas ecuaciones son las “ecuaciones de conservación de bariones”

$$(n u^\mu)_{,\mu} = 0, \quad (17)$$

dos ecuaciones de estado (donde se requiere su consistencia con las relaciones de Maxwell),

$$P = P(n, s) \quad (18)$$

$$T = T(n, s), \quad (19)$$

y la primera ley de la termodinámica

$$d\rho = \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{dn}{n} + \frac{n T}{c^2} ds \quad (20)$$

(Landau & Lifshitz 1959; Misner et al. 1973; Königl 1980)

Las ecuaciones anteriores contienen 21 relaciones entre funciones de posición y tiempo y las variables más importantes como  $B$ ,  $E$ ,  $s$ ,  $n$ ,  $T$ ,  $\rho$ ,  $v$ ,  $P$ , etc., entonces se pueden reescribir en términos de estas variables importantes y de esta manera obtenemos el siguiente set de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) - \frac{P}{c^2} \right) + \\ & \nabla \cdot \left( \gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \mathbf{v} \right) = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}}{c^2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \\ & \nabla P + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} = \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}) \end{aligned} \quad (22)$$

$$n T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \rho_c \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \quad (23)$$

$$\frac{\partial(\gamma n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma n \mathbf{v}) = 0 \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (28)$$

$$\gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} - \rho_c \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (29)$$

$$\mathbf{j} + \frac{\gamma^2}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} - \rho_c c^2) = \gamma \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (30)$$

donde

$$\gamma = \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (31)$$

Este set de ecuaciones está comprendido por la ecuación de conservación de la energía, en donde esta involucrado la tasa con la que el campo electromagnético hace trabajo, la ecuación de Euler (ecuación de continuidad) y las ya mencionadas anteriormente.

Estas ecuaciones pueden simplificarse para los plasmas altamente conductores de los haces astrofísicos, dado que el alto valor del número magnético de Reynolds  $R_{e_e}$  (Ec. 8) causa que  $F^{\mu\nu}u_\nu = 0$ , o equivalentemente

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (32)$$

con una precisión  $O(Re_m^{-1})$ , o de una parte en  $10^{28}$  (ver las Ec. 16 y 30).

Las Ec. (18 - 32) proveen una descripción consistente del flujo de un plasma si los campos cambian lentamente comparado con el tiempo en el cual el plasma se reajusta a la neutralidad de las cargas. Esto es, las ecuaciones se aplican solo cuando las frecuencias importantes son mucho menores que la frecuencia del plasma, la giro frecuencia del ion, etc. Por esta razón, las ecuaciones describen solamente propiedades macroscópicas del fluido, sin separación de cargas.

El set de Ec. (18 - 32) es lo suficientemente completo que no se conoce ninguna solución general. El primer paso es desarrollar un análisis de la estabilidad del haz buscando una solución analíticamente simple de las Ec. (18 - 32) que describa un haz no perturbado.

Para un flujo del haz cilíndrico es conveniente trabajar en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , y una solución simple y útil se obtiene de un flujo del haz cilíndrico, no rotante y estable, con

$$\rho = \rho^{(0)}(r) \quad (33)$$

$$\mathbf{v} = (0, 0, v_z^{(0)}(r)) \quad (34)$$

$$\mathbf{B} = (0, B_\theta^{(0)}(r), B_z^{(0)}(r)) \quad (35)$$

donde  $\rho^{(0)}(r)$ ,  $v_z^{(0)}(r)$ ,  $B_\theta^{(0)}(r)$  y  $B_z^{(0)}(r)$  son funciones arbitrarias de la distancia desde el eje del haz,  $r$ . La presión  $P = P^{(0)}(r)$ , debe obedecer la ecuación de equilibrio de la fuerza transversal

$$\frac{dP^{(0)}}{dr} = \frac{1}{\mu_0} \left( B_\theta^{(0)2} \frac{v_z^{(0)}}{c^2} \frac{dv_z^{(0)}}{dr} - \frac{1}{\gamma^{(0)2}} \frac{B_\theta^{(0)}}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta^{(0)}) - B_z^{(0)} \frac{dB_z^{(0)}}{dr} \right) \quad (36)$$

donde  $\gamma^{(0)}$  es el valor de  $\gamma$  con  $\mathbf{v}$  dada por la Ec. (34). Las restantes variables de estado ( $s$ ,  $T$  y  $n$ ) se obtienen de las Ec. (18 - 20).

Formalmente, las Ec.(18 - 32) y las ecuaciones del flujo en estado estacionario (33 - 36) describen el haz y el medio ambiente juntos con un solo set de funciones para la velocidad, densidad, presión y campo magnético. Sin embargo, el problema se simplifica mediante la definición de límites entre las regiones del flujo que son descritas por diferentes funciones. Una opción conveniente, es la que se muestra en la Figura 1, en donde se distinguen tres regiones (el núcleo del haz, el flujo de cizalladura y el medio ambiente), donde solo una de estas regiones, la del flujo de cizalladura, muestra gradientes de velocidad y densidad.

Las soluciones de estado estacionario de las ecuaciones fundamentales se denotaran con el sufijo  $^{(0)}$ , como en la presión no perturbada,  $P^{(0)}$ .

Para investigar la estabilidad de estas soluciones  $^{(0)}$  las variables físicas son “expandidas” como suma de dos componentes, una componente no perturbada  $^{(0)}$  y otra correspondiente a una pequeña perturbación denotada con el sufijo  $^{(1)}$  (por ejemplo,  $P = P^{(0)} + P^{(1)}$ ). Estas formas para las variables son sustituidas en las Ec.(18 - 32) y son linealizadas al pedir que las variables del flujo perturbado sean mucho más pequeñas que las variables no perturbadas (por ejemplo,  $v_r^1 \ll v_z^0$ ). Desafortunadamente, el set de ecuaciones que queda es muy complicado, y el análisis de la estabilidad de los flujos del haz se basa en supuestos simplificadores sobre las funciones  $\rho^{(0)}$ ,  $v_z^{(0)}$ ,  $B_\theta^{(0)}$  y  $B_z^{(0)}$ .

Para la geometría cilíndrica del flujo y el flujo estacionario de la forma (33 - 36), la homogeneidad de las ecuaciones linealizadas permite descomponer las perturbaciones en autofunciones de tipo onda.

$$P^{(1)} = P^{(1)}(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)} \quad (37)$$

$$\rho^{(1)} = \rho^{(1)}(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)} \quad (38)$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)}(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)} \quad (39)$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)}(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)} \quad (40)$$

La estabilidad del flujo esta descrita por las propiedades del número de onda complejo  $k$ , o la frecuencia angular  $\omega$ , de los modos normales de Kelvin-Helmholtz (37 - 40), y la correspondiente estructura radial impuesta por el haz.  $k$  y  $\omega$  aparecen como autovalores de las soluciones de las ecuaciones de flujo sujetas a condiciones de borde en el flujo.

Las Ec. (37 - 40) implican que los modos normales de Kelvin-Helmholtz son de tipo onda en  $z$  con número de onda  $k$ , de tipo onda en tiempo con frecuencia angular  $\omega$  y que desarrollan  $|n|$  oscilaciones alrededor de la circunferencia del haz (“tipo onda en  $\theta$ ”).

El número del modo azimutal,  $n$ , es un entero positivo o negativo, entonces las autofunciones son univaluadas. Para cualquier  $n$  dado, se espera que la relación de dispersión (Ec. 1) describa una solución  $k(\omega)$  (o una familia de soluciones) con características azimutales similares.  $n = 0$  corresponde a un modo *breathing* o *pinching* del haz, donde el haz se expande o contrae coherentemente a cualquier  $z$ . Los modos  $n \pm 1$  muestran desplazamientos laterales del haz con un patrón helicoidal en  $z$  (son los modos *helical* y *kink*). Los modos con  $|n| > 1$  (referidos a un modo “*fluting*”) producen distorsiones con ondulaciones alrededor de la circunferencia del haz, para  $n \pm 2$  hay dos nodos en la superficie del haz. Estas distorsiones del haz se ilustran en la Figura 2 para  $n = 0, 1, 2$  y 3. Nótese que el área del haz cambia solamente para los modos *pinching* ( $n = 0$ ), y el centro del haz es desplazado solo en los modos *helical* ( $|n| = 1$ ). Las autofrecuencias para  $n$  negativos y positivos son degeneradas para las configuraciones del haz más simples (haces no rotantes con un campo magnético axial únicamente).

Las condiciones de borde en las variables de flujo son impuestas a  $r \rightarrow \infty$  en el medio ambiente, a los bordes entre el medio y el fluido de cizalladura ( $r = R_{sa}$  antes de la perturbación) y los fluidos de cizalladura y los fluidos del haz ( $r = R_{bs}$  antes de la perturbación).

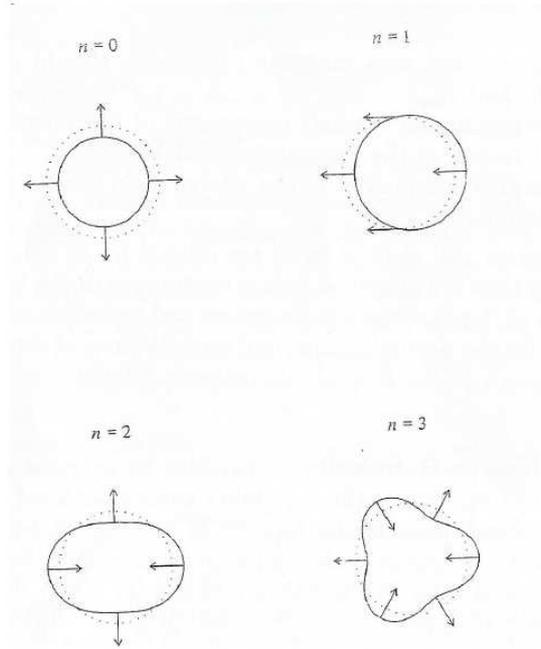


Figura 2: Diagrama esquemático de las deformaciones transversales del haz causadas por los modos Kelvin-Helmholtz, con número azimutal  $n = 0, 1, 2$  y  $3$ . Las líneas de punto indican la ubicación de los bordes del haz no perturbado, y las líneas llenas indican la distorsión de los bordes causada por los modos.

Estas condiciones son:

- (a) Todas las variables del flujo deben ser finitas para todo  $r$  a tiempo finito;
- (b) todas las variables del flujo deben  $\rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ ;
- (c) las variables del flujo deben ser funciones continuas de  $r$ ;
- (d) la velocidad radial de fase de las perturbaciones deben ser positivas a  $r \rightarrow \infty$ ;
- (e) los desplazamientos radiales del fluido del haz y del medio ambiente,  $\xi_r^{(1)}$ , donde

$$\frac{d\xi^{(1)}}{dt} = v_r^{(1)}, \quad (41)$$

deben coincidir a  $r = R_{\text{bs}}$  y  $R_{\text{sa}}$ ;

- (f) la presión total (del fluido y magnética) debe coincidir a  $r = R_{\text{bs}}$  y  $R_{\text{sa}}$ ;
- (g) la componente perpendicular (radial) del campo magnético debe coincidir en los límites; y
- (h) la componente paralela del campo electromagnético debe coincidir en los límites.

Si los campos magnético y eléctrico están relacionados por la Ec. (32), luego (g) y (h) implican que el campo magnético es continuo en los bordes.

## 4. Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz

Sabemos que, debido a las bajas densidades, los flujos relativistas son típicamente plasmas sin colisiones cuyas partículas conocen su camino a través de la interacción con los campos del plasma electromagnético (EM) alimentados por plasmas comunes. Los plasmas astrofísicos cumplen con las condiciones ideales de la magnetohidrodinámica (MHD), i.e., la conductividad es infinita: macroscópicamente el fluido es neutral con lo cual en el grueso del marco del flujo el campo magnético se deshace; en un marco con velocidad  $v$  respecto al marco en reposo, las cargas verán la Ec. 32. El flujo de energía puede ser dominado por campos electromagnéticos, o ser compartido por el movimiento del flujo, el movimiento térmico, la turbulencia y el campo magnético (MHD/HD). Así, las señales en una magnetohidrodinámica ideal se propagan como (ver Fig. 3):

- *Ondas sonoras*: ondas hidrodinámicas de compresión isotrópica pura.
- *Ondas alfvénicas*: ondas de campo magnético pura; fluctuaciones del campo  $B_{\perp}$  moviéndose a lo largo de las líneas de  $B$ .
- *Ondas magnetosónicas lentas*: ondas sonoras a lo largo de las líneas de  $B$ , para  $B$  grande; ondas alfvénicas para  $B$  bajos.
- *Ondas magnetosónicas rápidas*: ondas alfvénicas isotrópicas para  $B$  grandes; ondas sonoras para  $B$  bajos.

Como se vio anteriormente, las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz surgen cuando dos fluidos están en movimiento relativo en cada lado de algún límite en común. Este tipo de inestabilidad puede ser aplicada a dos clases de flujos:

- Flujos relativistas no magnéticos
- Flujos no relativistas magnéticos

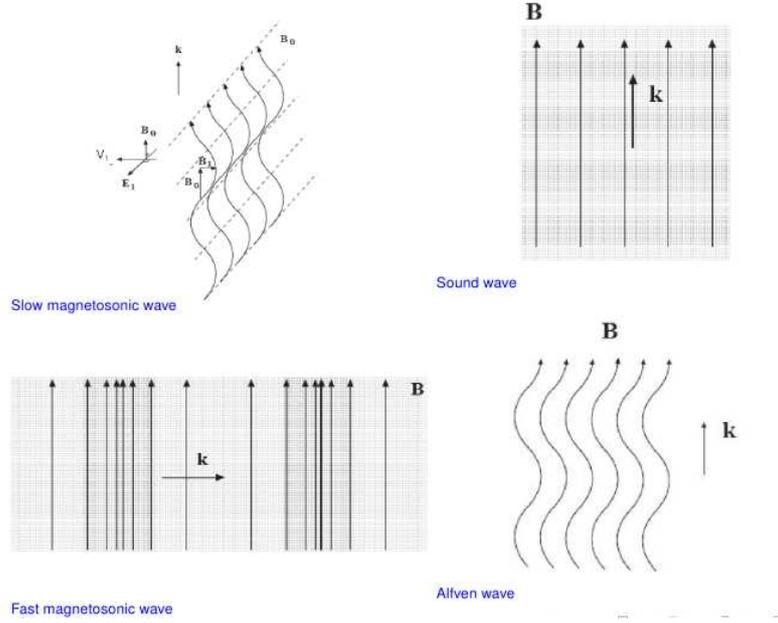


Figura 3: Esquema de los distintos tipos de onda.

#### 4.1. Inestabilidades Kelvin-Helmholtz en haces no magnéticos

Las formas generales de la presión, densidad y velocidad no perturbadas están dadas por las Ec. (33 - 36). Si no se impone un campo magnético de estado estacionario, las perturbaciones lineales no son capaces de generar un campo, dado que la generación de un campo magnético es cuadrático en la intensidad del campo.

Las variables involucradas en el flujo obedecen el siguiente conjunto de ecuaciones generales:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) - \frac{P}{c^2} \right) + \nabla \cdot \left( \gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \mathbf{v} \right) = 0 \quad (42)$$

$$\gamma^2 \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla P = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (44)$$

$$s = s(P, \rho) \quad (45)$$

las cuales conforman las ecuaciones usuales de un flujo relativista. Si se las toma como la descripción de una superposición de equilibrios cilíndricos en estado estacionario definidos por (33 - 36) y perturbaciones de la forma (37 - 40), se pueden desarrollar hasta obtener un conjunto de ecuaciones en las perturbaciones:

$$\begin{aligned}
& -i\omega \left( \gamma^{(0)2} \left( \rho^{(1)} + \frac{P^{(1)}}{c^2} \right) - \frac{P^{(1)}}{c^2} + 2\gamma^{(0)4} \frac{v_z^{(0)} v_z^{(1)}}{c^2} \left( \rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \gamma^{(0)2} \left( \rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) v_r^{(1)} \right) + \frac{in}{r} \gamma^{(0)2} \left( \rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) v_\theta^{(1)} + \\
& + ik \left( \gamma^{(0)2} v_z^{(0)} \left( \rho^{(1)} + \frac{P^{(1)}}{c^2} \right) + \gamma^{(0)4} \left( \rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) \left( 1 + \frac{v_z^{(0)2}}{c^2} \right) v_z^{(1)} \right) = 0 \quad (46)
\end{aligned}$$

$$i\gamma^{(0)2} \left( \rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) (k v_z^{(0)} - \omega) v_r^{(1)} + \frac{dP^{(1)}}{dr} = 0 \quad (47)$$

$$i\gamma^{(0)2} \left( \rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) (k v_z^{(0)} - \omega) v_\theta^{(1)} + \frac{in}{r} P^{(1)} = 0 \quad (48)$$

$$i\gamma^{(0)2} \left( \rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) (k v_z^{(0)} - \omega) v_z^{(1)} + \gamma^{(0)2} \left( \rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2} \right) v_r^{(1)} \frac{dv_z^{(0)}}{dr} + i \left( k - \frac{\omega v_z^{(0)}}{c^2} \right) P^{(1)} = 0 \quad (49)$$

$$i(k v_z^{(0)} - \omega) \left( \frac{P^{(1)}}{P^{(0)}} - \Gamma \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} \right) - \frac{\Gamma}{\rho^{(0)}} \frac{d\rho^{(0)}}{dr} v_r^{(1)} = 0 \quad (50)$$

donde la ecuación final resulta de un modelo para un haz de fluido en el cual la entropía está dada por:

$$s = s_0 + \frac{k_B}{\Gamma - 1} \ln P \rho^{-\Gamma} \quad (51)$$

con  $s_0$  y  $\Gamma$  (el índice politrópico) constantes.

Las Ec. (46 - 51) pueden ser manipuladas para obtener una única ecuación diferencial de segundo orden para la perturbación en la presión,

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 P^{(1)}}{dr^2} + \frac{dP^{(1)}}{dr} \left( \frac{1}{r} + 2\gamma^{(0)2} \frac{\left( k - \frac{\omega v_z^{(0)}}{c^2} \right) \frac{dv_z^{(0)}}{dr}}{\left( \omega - k v_z^{(0)} \right)} - \frac{\frac{d\rho^{(0)}}{dr}}{\rho^{(0)} + \frac{P^{(0)}}{c^2}} \right) + \\
& + P^{(1)} \left( \gamma^{(0)2} \left( \frac{\left( \omega - k v_z^{(0)} \right)^2}{c_S^2} - \left( k - \frac{\omega v_z^{(0)}}{c^2} \right)^2 \right) - \frac{n^2}{r^2} \right) = 0 \quad (52)
\end{aligned}$$

donde  $c_S$  es la velocidad del sonido,

$$c_S = \left( \frac{\Gamma P^{(0)}}{\rho^{(0)}} \right)^{1/2} \quad (53)$$

A partir de esta ecuación, se obtiene la solución para la perturbación en la presión  $P^{(1)}$ . Las soluciones para la perturbación en la velocidad y para otras variables físicas pueden ser obtenidas a partir de las soluciones para  $P^{(1)}$  y de (46 - 51). En general, las soluciones  $P^{(1)}$  no pueden ser expresadas en términos de funciones estándares especiales de la física matemática, dado que (52) permite formas generales para  $v_z^{(0)}$  y  $\rho^{(0)}$ . Soluciones simples surgen en aquellas partes donde los gradientes de densidad y velocidad pueden ser ignorados (i.e. el medio ambiente y el núcleo del haz).

Dado que el medio ambiente es tomado uniforme y en reposo, la perturbación en la presión en  $r > R_{sa}$  es:

$$P^{(1)}(r) = \epsilon_a P^{(0)} \frac{H_n^{(1)}(\alpha_a r)}{H_n^{(1)}(\alpha_a R_{sa})} \quad (54)$$

donde  $H_n^{(1)}(z)$  es una función de Hankel de tipo 1 con orden  $n$ .  $\epsilon_a \ll 1$  es una medida de la pequeñez de la perturbación en la presión relativa a  $P^{(0)}$ .  $R_{sa}$  es donde se encuentra la interface entre la región cizallada y el medio ambiente,  $\alpha_a$  es el número de onda radial,

$$\alpha = \gamma^{(0)} \left( \frac{(\omega - kv_z^{(0)})^2}{c_S^2} \left( k - \frac{\omega v_z^{(0)}}{c^2} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (55)$$

reemplazando  $v_z^{(0)} = 0$ ,  $\rho^{(0)} = \rho_a$  y  $c_S = c_{Sa}$ . La solución dada por (54) representa un modo de decaimiento hacia afuera, a medida que  $r \rightarrow \infty$ .

En la región no cizallada del núcleo del haz ( $r < R_{bs}$ ), la solución de la Ec. (52), la cual es regular en  $r = 0$ , es:

$$P^{(1)}(r) = \epsilon_b P^{(0)} \frac{J_n(\alpha_b r)}{J_n(\alpha_b R_{bs})} \quad (56)$$

donde  $J_n(z)$  es una función de Bessel de tipo 1 con orden  $n$ .  $\epsilon_b \ll 1$  es una constante que define la pequeñez de la perturbación en la presión interna.  $R_{bs}$  es donde se localiza la interface entre el núcleo del haz y la parte cizallada del flujo. El número de onda interno,  $\alpha_b$ , viene dado por (55) con  $\rho^{(0)} = \rho_b$ ,  $v_z^{(0)} = v_b$  y  $c_S = c_{Sb}$ . La solución (56) es una onda de presión sostenida, y puede soportar nodos de presión dentro del haz.

Lo que queda por determinar es la solución en la región cizallada entre el núcleo del haz y el medio ambiente,  $R_{bs} < r < R_{sa}$ . No hay disponible una solución general pero pueden encontrarse soluciones particulares para una estructura específica de velocidad o presión. La estructura más simple que puede usarse para conectar el núcleo del haz y el medio ambiente es una *hoja de vórtice*, donde el ancho de la capa cizallada es cero y  $R_{bs} = R_{sa} = R$ . El uso de una hoja de vórtice como interface entre el núcleo del haz y el medio ambiente provee una relación de dispersión conveniente para un análisis matemático detallado. A partir de juntar los desplazamientos radiales con  $P^{(1)}$  en la interface, se obtiene la relación de dispersión:

$$D(k, \omega) = \frac{H_n^{(1)'}(\alpha_a R)}{H_n^{(1)}(\alpha_a R)} \cdot \frac{\alpha_a}{\omega^2(\rho_a + \frac{P^{(0)}}{c^2})} - \frac{J_n'(\alpha_b R)}{J_n(\alpha_b R)} \cdot \frac{\alpha_b}{\gamma_b^2(\omega - kv_b)^2(\rho_b + \frac{P^{(0)}}{c^2})} = 0 \quad (57)$$

Esta relación codifica la estabilidad a primer orden de un flujo cilíndrico limitado por una hoja de vórtice. Así, la perturbación en la presión en una capa linealmente cizallada con revestimiento alrededor del haz es:

$$P^{(1)} = \epsilon_{s1} P^{(0)} \frac{F_n^{(1)}(r)}{F_n^{(1)}(R_{bs})} + \epsilon_{s2} P^{(0)} \frac{F_n^{(2)}(r)}{F_n^{(2)}(R_{sa})} \quad (58)$$

en el intervalo  $R_{sa} > r > R_{bs}$ .  $F^{(1)}$  y  $F^{(2)}$  son soluciones independientes de (52) en la capa cizallada y pueden ser expresadas como series infinitas y convergentes de términos o pares de series. Es claro, a partir de la Ec. (52), que los modos de Kelvin-Helmholtz son ondas sonoras asociadas con la interface haz/medio ambiente. La tasa de crecimiento de la inestabilidad está relacionada con la extensión a la cual estas ondas están localizadas en el haz o son eficientemente radiadas.

## 4.2. Inestabilidades de Kelvin-Helmholtz en haces magnéticos no relativistas

Las ecuaciones básicas de movimiento para un fluido ideal, compresible en movimiento no relativista ( $v \ll c$ ) son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (59)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (60)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (61)$$

$$s = s(P, \rho) \quad (62)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (64)$$

Si estas ecuaciones son interpretadas como una superposición de equilibrios en estados estacionarios definidos por (33 - 36) y perturbaciones de la forma (37 - 40), se las podría reducir a un conjunto de 8 ecuaciones no redundantes en las perturbaciones. Sin embargo, estas 8 ecuaciones son muy complicadas para trabajar. Han sido ampliamente discutidas una variedad de tratamientos de estas ecuaciones en diferentes límites, o con diferentes formas de la distribución del campo magnético. Una de ellas corresponde a Ferrari et al. (1981), en la cual se discute la estabilidad de flujos cilíndricos sin gradientes de velocidad, densidad, o el campo magnético axial, pero con una velocidad relativista del haz. Un análogo no relativista de sus resultados puede ser hallado a partir de reducir las Ec. (59 - 64) a una única ecuación gobernante para la perturbación en la presión,

$$\frac{d^2 P^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP^{(1)}}{dr} + P^{(1)} \left( \frac{\left( k^2 - \frac{(kv_z^{(0)} - \omega)^2}{c_S^2} \right) \left( \frac{(kv_z^{(0)} - \omega)^2}{c_A^2} - k^2 \right)}{\left( k^2 - (kv_z^{(0)} - \omega)^2 \left( \frac{1}{c_A^2} + \frac{1}{c_S^2} \right) \right)} - \frac{n^2}{r^2} \right) = 0 \quad (65)$$

La solución para  $P^{(1)}$  puede escribirse como:

$$P^{(1)}(r) = \epsilon_a P_a \frac{H_n^{(1)}(\alpha_a r)}{H_n^{(1)}(\alpha_a R_{sa})} \quad (66)$$

en el medio ambiente ( $r > R_{sa}$ ), y

$$P^{(1)}(r) = \epsilon_b P_b \frac{J_n(\alpha_b r)}{J_n(\alpha_b R_{bs})} \quad (67)$$

en el haz ( $r < R_{bs}$ ), donde los números de onda radiales involucrados están dados por:

$$\alpha = k \left( \frac{\left( 1 - \left( \frac{\omega - kv_z^{(0)}}{kc_S} \right)^2 \right) \left( \left( \frac{\omega - kv_z^{(0)}}{kc_A} \right)^2 - 1 \right)}{1 - \left( \frac{\omega - kv_z^{(0)}}{kc_A} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{c_A}{c_S} \right)^2 \right)} \right)^{1/2} \quad (68)$$

con la velocidad del sonido  $c_S = c_{Sa}$  o  $c_{Sb}$ , la velocidad de Alfvén  $c_A = c_{Aa}$  o  $c_{Ab}$ , la densidad  $\rho^{(0)} = \rho_a$  o  $\rho_b$ , la velocidad del flujo  $v_z^{(0)} = 0$  o  $v_b$ , y la presión  $P^{(0)} = P_a$  o  $P_b$ , para  $\alpha_a$  o  $\alpha_b$  respectivamente.

La condición de equilibrio de la presión transversal (36) requiere

$$P_a + \frac{B_{za}^2}{2\mu_0} = P_b + \frac{B_{zb}^2}{2\mu_0}. \quad (69)$$

La Ec. (65) excluye específicamente los gradientes radiales en velocidad y densidad, y la relación de dispersión solo puede ser derivada para el límite de una capa con vórtice:

$$D(k, \omega) = \frac{H_n^{(1)'}(\alpha_a R)}{H_n^{(1)}(\alpha_a R)} \cdot \frac{\alpha_a}{\rho_a} \cdot \frac{1}{\omega^2 - k^2 c_{Aa}^2} - \frac{J_n'(\alpha_b R)}{J_n(\alpha_b R)} \cdot \frac{\alpha_b}{\rho_b} \cdot \frac{1}{(\omega - kv_b)^2 - k^2 c_{Ab}^2} = 0 \quad (70)$$

Los modos Kelvin-Helmholtz son ondas magnetosónicas las cuales están parcialmente atrapadas en la cavidad del haz. Las tasas de crecimiento de los modos dependen de la habilidad del sistema para radiar dichas ondas (i.e., en el acoplamiento de impedancia entre el fluido del haz y el medio ambiente).

### 4.3. Describiendo la inestabilidad

El análisis de una relación de dispersión se realiza en términos de parámetros que describen las propiedades de los modos que son soportados:  $\lambda_0$  la longitud de onda de un modo,  $\tau_e$  la escala temporal en la cual dicho modo crece por un factor  $e$ , y  $\lambda_e$  la distancia hacia el haz en la cual ese modo crece por un factor  $e$ .  $\tau_e$  se lo suele referir al marco del haz, donde la tasa de crecimiento de la inestabilidad puede ser también la escala temporal en la cual la energía se alimenta dentro de un espectro turbulento de ondas magnetohidrodinámicas.  $\lambda_0$  y  $\lambda_e$  son más informativas en el marco del medio ambiente (el marco del observador), dado que describen la configuración a gran escala adoptada por el haz bajo la influencia de la inestabilidad Kelvin-Helmholtz.

La longitud de crecimiento de una perturbación de una frecuencia angular particular se encuentra resolviendo la relación de dispersión para el número

complejo  $k$  como una función del número real  $\omega$ . La longitud de onda y la longitud de crecimiento de inestabilidades son:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{Re(k)} \quad (71)$$

$$\lambda_e = -\frac{1}{Im(k)} \quad (72)$$

y la perturbación en la presión crece con la distancia hacia el haz,  $z$ , como

$$|P^{(1)}| = |P^{(1)}(r)e^{i(kz+n\theta-\omega t)}| \quad (73)$$

$$\propto e^{z/\lambda_e}. \quad (74)$$

Generalmente se dice que la operación de una inestabilidad es aquella en la que el modo de crecimiento más rápido viene a dominar el flujo luego de un período corto de incubación. Así, la relación de dispersión se analiza para buscar los valores de  $\omega$  y  $n$  que producen el mínimo valor de  $\lambda_e$  para un haz, cuando la estabilidad del haz es descrita por  $\lambda_e^*$ , y la forma a la cual el haz se deforma durante la fase lineal de la inestabilidad es descrita por  $n$ ,  $\lambda_0^*$  y  $\lambda_e^*$ .

Para el análisis espacial del crecimiento de la inestabilidad, se grafican las curvas de inestabilidad  $\lambda_e(\lambda_0)$ , a partir del estudio de la relación de dispersión dada por (57). En particular, se dibujan para números de modo azimutal  $n = 0, 1, 2$ , en las Figuras 4, 5 y 6. Puede observarse que para cada uno de los modos, se tienen varias ramas, representadas por  $N$ , número de modo radial, el cual representa el número de ceros en la perturbación en la presión en el intervalo  $0 < r < R$ . Los modos  $N = 0$  son los “Modos Ordinarios”, mientras que los modos  $N > 0$  son los “Modos de Reflexión”. Los modos de reflexión aparecen solamente para velocidades del haz suficientemente grandes ( $v_b > c_{Sa} + c_{Sb}$ ). Si la velocidad  $v_b$  es mucho más pequeña, solo el modo ordinario está presente.

Para aquellos haces que pueden soportar modos de reflexión ( $N = 1, 2$  en las Figuras 4, 5 y 6), las curvas de inestabilidad muestran que varios modos pueden ser excitados a longitudes de onda  $\lambda_0$  suficientemente chicas. Por ejemplo, a  $\lambda_0 = 10R$  en un haz con un número de Mach  $M_b = 10$  y  $\rho_a = \rho_b$ , los modos con  $n = 0, N = 0, 1, 2$ , con  $n = 1, N = 0, 1$  y con  $n = 2, N = 0, 1$  están excitados. Si solo los modos de esta longitud y  $n < 3$  son accesibles para el haz, entonces el modo  $n = 2, N = 0$ , el cual tiene la longitud de crecimiento más pequeña  $\lambda_e = 7R$ , dominaría la estructura del haz y debería ser visible para los observadores. Dado que el valor de  $\lambda_0$  considerado no tiene

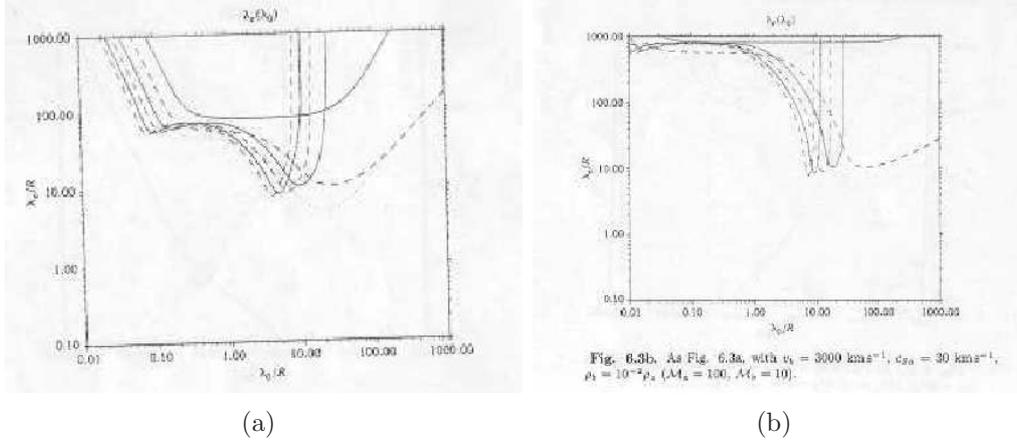


Figura 4: Longitud de crecimiento espacial de la inestabilidad  $\lambda_e$  vs. la longitud de onda  $\lambda_0$ . *Izq.:*  $v_b = 3000 \text{ km/s}$ ,  $c_{Sa} = 300 \text{ km/s}$  y  $\rho_b = \rho_a$  ( $M_a = M_b = 10$ ). *Der.:*  $v_b = 3000 \text{ km/s}$ ,  $c_{Sa} = 30 \text{ km/s}$  y  $\rho_b = 10^{-2} \rho_a$  ( $M_a = 100, M_b = 10$ ).

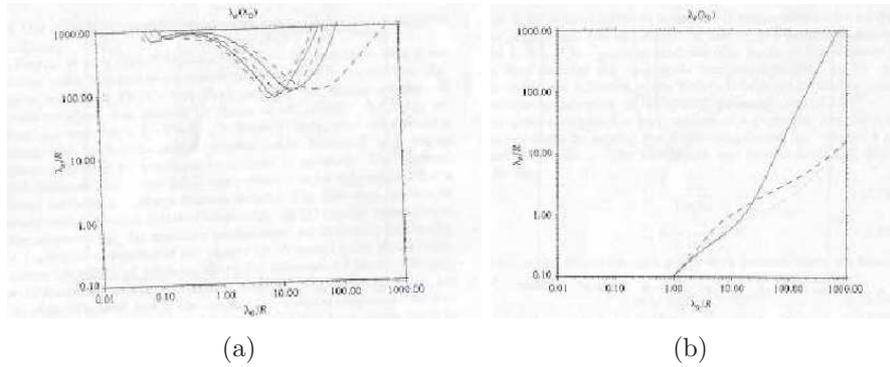


Figura 5: Longitud de crecimiento espacial de la inestabilidad  $\lambda_e$  vs. la longitud de onda  $\lambda_0$ . *Izq.:*  $v_b = 3000 \text{ km/s}$ ,  $c_{Sa} = 300 \text{ km/s}$  y  $\rho_b = 10^2 \rho_a$  ( $M_a = 10, M_b = 100$ ). *Der.:*  $v_b = 3000 \text{ km/s}$ ,  $c_{Sa} = 300 \text{ km/s}$  y  $\rho_b = 10^{-2} \rho_a$  ( $M_a = 10, M_b = 1$ ).

por qué ser el único que es excitado en el haz, la Figura 4(a) sugiere que el modo de crecimiento más rápido tiende a ser el de menor longitud de onda y mayor  $n$ . Sin embargo, puede verse que el modo ordinario ( $N = 0$ ) tiene una longitud de onda más chica comparado con los modos de número de reflexión creciente ( $N > 0$ ) a medida que  $n$  crece. Así, modos  $N$  con grandes  $n$  son pocos probables de tener un efecto individual significativo en un haz.

En su conjunto, las Figuras 4, 5 y 6 demuestran que la inestabilidad espa-

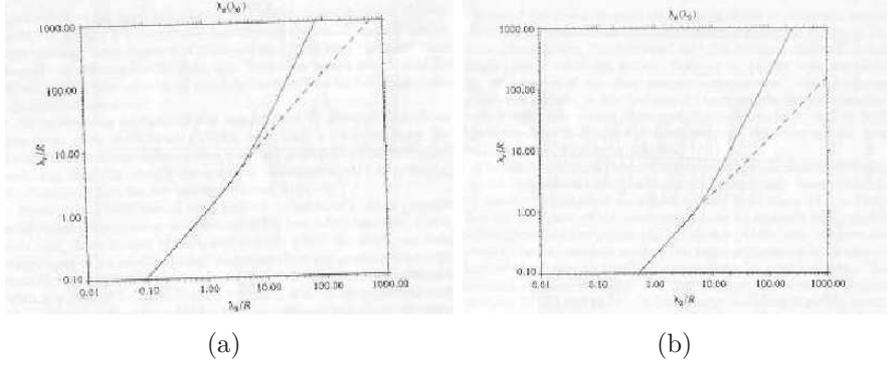


Figura 6: Longitud de crecimiento espacial de la inestabilidad  $\lambda_e$  vs. la longitud de onda  $\lambda_0$ . *Izq.*:  $v_b = 3000 \text{ km/s}$ ,  $c_{Sa} = 3000 \text{ km/s}$  y  $\rho_b = 10^2 \rho_a$  ( $M_a = 1, M_b = 10$ ). *Der.*:  $v_b = 300 \text{ km/s}$ ,  $c_{Sa} = 300 \text{ km/s}$  y  $\rho_b = \rho_a$  ( $M_a = M_b = 1$ ).

cial de haces de baja densidad es mayor que la de haces de alta densidad con la misma velocidad. Este resultado es diferente respecto al resultado para la inestabilidad temporal de haces: el crecimiento temporal de una inestabilidad de Kelvin-Helmholtz es más rápida si las densidades del haz y el medio ambiente son iguales. La diferencia surge a partir de la fuerte dependencia de la velocidad del modo en las propiedades del haz y del medio ambiente. Si el haz es denso, la rapidez del modo es cercana a la velocidad del haz. Si en cambio es poco denso, entonces la inercia del medio ambiente tiene un efecto significativo en la rapidez del modo. La estabilidad global de un haz es incrementada a medida que el número de Mach  $M_b$  es incrementado, pero las longitudes de crecimiento de los modos *pinching* ( $n = 0$ ) crecen más rápido que las de los modos *helical* ( $n = 1$ ). Esto sugiere que los haces tienden a desplegar nodos a pequeños números de Mach y tienden a arremolinearse a números altos de Mach donde los flujos son más estables.

Si la densidad de un haz es incrementada mientras que el flujo de energía cinética y la presión interna se mantienen constantes, la velocidad ( $v_b$ ) y la velocidad del sonido interna ( $c_b$ ) del flujo decrecen. El efecto combinado de estos cambios es que las longitudes de crecimiento  $\lambda_e^*$  de los modos apenas se incrementan, y que las longitudes  $\lambda_0^*$  crecen más rápido como funciones de  $\rho_b$ . Si la densidad del haz es incrementada mientras el momento del flujo se mantiene constante, solo resultan pequeños cambios en los valores de  $\lambda_e^*$  y  $\lambda_0^*$ . Un crecimiento o decrecimiento suficientemente grande de  $\rho_b$ , sujeto a un flujo de energía cinética fijo o un flujo de momento, puede causar que

$v_b$  de crezca por debajo de  $c_{Sa} + c_{Sb}$ , de modo que los modos de reflexión no aparezcan más.

Las perturbaciones en la presión  $P^{(1)}(r)$  para los modos  $n = 0, N = 0$  y  $n = 1, N = 2$  de la Figura 4(a) cercanas a la inestabilidad máxima están representadas en la Figura 7. Las partes real e imaginaria de las autofunciones de  $P^{(1)}$  están indicadas por líneas sólida y punteada, respectivamente.

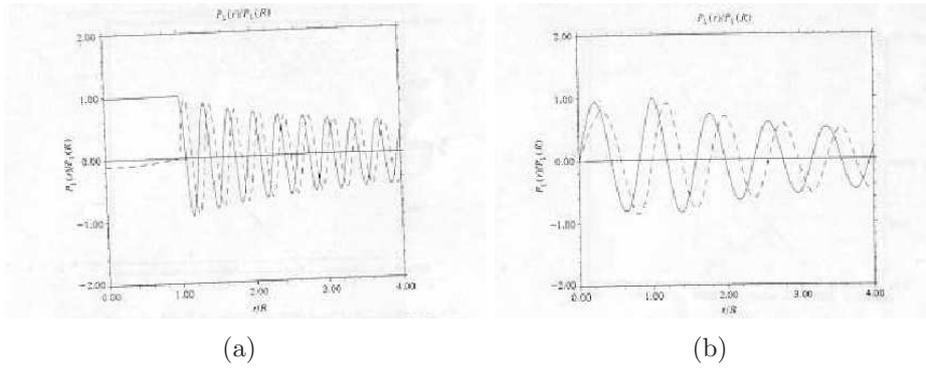


Figura 7: Soluciones representativas para las perturbaciones en la presión como función del radio a la máxima inestabilidad ( $\lambda_0^*, \lambda_e^*$ ) para el haz con parámetros  $v_b = 3000 \text{ km/s}$ ,  $c_{Sa} = 300 \text{ km/s}$  y  $\rho_b = \rho_a$  ( $M_a = M_b = 10$ ). Izc.:  $n = 0, N = 0$ . Der.:  $n = 1, N = 2$

Se observa que la perturbación en la presión tiene una amplitud considerable por encima de una fracción significativa del radio del haz. Los modos con  $N > 0$  exhiben  $N$  ceros en la presión dentro del haz. El modo ordinario ( $N = 0$ ) es una consecuencia de la existencia de algún límite entre un fluido en movimiento y una región estática de un fluido. En cambio, los modos de reflexión ( $N > 0$ ) requieren que el fluido contenga más de una superficie plana, y son particularmente fuertes donde el fluido contiene una región encerrada cuyas paredes pueden vibrar coherentemente (e.g., la cavidad del haz). En tal caso, las inestabilidades que ocurren como ondas sonoras radiadas desde una superficie son reflejadas de vuelta por la otra superficie (con algún retraso) de modo que interfieren constructivamente. De esta manera, el haz se comporta como una guía acústica de ondas: ondas estacionarias a través de la guía de ondas permiten que modos cooperativos de la paredes puedan ser excitados, y perturbaciones en crecimiento pueden ser producidas si el coeficiente de reflexión para una onda chocando una pared es mayor que la unidad. La aparición de los modos de reflexión a intervalos regulares de  $\lambda_0$  en las Figuras (4, 5 y 6) puede ser interpretado en términos de este aco-

plamiento frecuencia-dependiente de los modos internos del haz con ondas magnetosónicas radiadas.

El estudio de estructuras de inestabilidad en capas de cizalladura ha sido muy desarrollado y los resultados arrojan que las inestabilidades más rápidas surgen para longitudes de onda similares al ancho de la pared (o el radio del haz), y que los modos de reflexión dejan de ser importantes a longitudes de onda más chicas que el grosor de la capa de cizalladura. Se encuentra que cuanto más nítida es la velocidad de cizalladura, más grande es la tasa de crecimiento para todas las longitudes de onda, y el efecto de los gradientes de densidad es mucho más pequeño que el de los gradientes de velocidad. Es posible suprimir la inestabilidad a longitudes de onda cortas eligiendo una velocidad suave de cizalladura arbitraria. Además, se encuentra que un haz cizallado se estabiliza también por su expansión.

En cuanto a la estabilidad de un haz cilíndrico limitado por capas lineales de cizalladura, a medida que el espesor ( $\delta$ ) de la capa se incrementa, los modos ordinarios son apenas estabilizados a longitudes de onda grandes. Para longitudes cercanas al radio del haz ( $R$ ), y a  $\delta$  moderados, la mezcla de modos puede causar ligeramente una inestabilidad mayor del modo ordinario en comparación a si estuviera en una capa de vórtice. Los modos de reflexión son estabilizados por los efectos de la cizalladura, y las longitudes de onda a las cuales los modos aparecen,  $\lambda_0^{\text{crit}}$ , cambian ligeramente. Valores más grandes de  $\delta$  causan un incremento en la estabilización del flujo, y los modos de reflexión se vuelven menos importantes. Los aumentos en las longitudes de crecimiento para modos ordinarios son menores que para los de reflexión. Estos resultados sugieren que una capa de cizalladura efectivamente provee una longitud de onda de corte por debajo de la cual ningún modo de Kelvin-Helmholtz aparece, y que a  $\lambda_0 \gg R$  la capa de cizalladura tiene un efecto pequeño en la estabilidad de un haz.

Por otra parte, se ha encontrado que una rotación uniforme de un haz permite modos  $n = 0$  de desestabilización adicionales para flujos con número de Mach bajo, y que estos modos permanecen activos aún cuando el campo magnético suprime otros modos  $n = 0$ . Dado que los modos con  $n \neq 0$  pueden ser descritos como rotantes, es de esperar que el análisis de estos modos para haces rotantes muestre efectos más fuertes en el patrón de inestabilidad, con la aparición de varias ramas de estos modos y la degeneración de modos con  $n$  positivo y negativo siendo quebrada.

Los efectos magnéticos para las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz muestran que todos los modos son estables para flujos sub-Alfvénicos ( $v_b < c_{Ab}$ ) y campos magnéticos axiales. Los modos  $n = 1$  se estabilizan a partir de un campo axial menor ( $c_{Ab} > 0.5v_b$ ). Por el contrario, campos azimutales son desestabilizantes. En todos los casos, la naturaleza de la inestabilidad

es similar a aquella de un flujo no magnético, y las tasas de crecimiento de inestabilidades no son mucho más diferentes de aquellas de los flujos no magnéticos para campos axiales menores que los valores críticos para la estabilización. En cuanto a los modos lentos magnetosónicos, solo los ordinarios están presentes a velocidades del haz bajas (subsónicas); los modos lentos de reflexión magnetosónicos dominan luego la estabilidad; y a números de Mach más altos, son los modos rápidos de reflexión magnetosónicos los que determinan la estabilidad del flujo.

El efecto de los modos de Kelvin-Helmholtz en lo que sobrevive del haz no puede ser predicho con certeza a partir de los resultados de la inestabilidad lineal simple. Dado que los modos con  $\lambda_0$  pequeños son los más inestables, es probable que la estructura del haz se adapte a suprimir esos modos antes de que el crecimiento de modos más grandes pueda ocurrir. Este ajuste rápido puede invalidar la independencia asumida de  $z$  del flujo usada para derivar las relaciones de dispersión vistas (Ec. 57 y 70). Si ocurren modos de longitud de onda grande, éstos deberían crecer en una estructura del haz severamente modificada. Sin embargo, los resultados del cálculo simple que involucra una capa de cizalladura tienden a sugerir que la modificación de la estructura del haz puede ser ignorada a la hora de predecir la inestabilidad a longitudes de onda grandes. Distintos autores sugieren que las inestabilidades dominantes siempre serán aquellas con longitudes de onda comparables con el ancho de la capa de cizalladura. Dado que este ancho que es producido no se conoce, no es posible predecir qué longitudes de onda dominarán la estabilidad de un dado haz.

Todo el cálculo lineal previamente mencionado no contiene información acerca de los límites de las amplitudes de la inestabilidad. El método usado para derivar las relaciones de dispersión (Ec. 57 y 70) puede ser extendido a segundo orden, escribiendo a la presión como:

$$P = P^{(0)}(\mathbf{r}, t) + P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + P^{(2)}(\mathbf{r}, t) \quad (75)$$

y llevando la expansión de las Ec. (18 - 32) a segundo orden para obtener ecuaciones lineales de  $P^{(2)}$ , pero cuadráticas en  $P^{(1)}$ , y así el comportamiento de  $P^{(2)}$  puede arrojar límites al crecimiento de la inestabilidad. Este tipo de cálculos presentan dificultades analíticas, con lo cual se sugiere como alternativa usar simulaciones numéricas de haces, para poder descubrir los resultados del crecimiento de la inestabilidad en casos axisimétricos, y luego extenderlos a inestabilidades no axisimétricas. Algunos autores han llegado a la conclusión de que los modos *pinching* de reflexión (con  $n = 0$  y  $N > 0$ ) no tienen un efecto significativo en perturbar haces, dado que su crecimiento no lineal satura con una serie de choques cónicos débiles, los cuales causan

divergencia alternativa y reenfoque del flujo. Cálculos en bloques de haces (los cuales pueden modelar los modos  $n = 0$  y  $n = 1$  de haces cilíndricos) indican que los modos de reflexión se saturan con la formación de choques oblicuos débiles, mientras que los modos ordinarios no se saturan y pueden producir distorsiones a gran escala y perturbación en el flujo. Dado que el modo ordinario *pinching* es solo importante para flujos transónicos, esto sugiere que el modo ordinario *helical* puede llegar a ser el canal de inestabilidad con longitud de onda larga más importante para haces supersónicos. Las simulaciones numéricas encuentran longitudes de crecimiento  $\lambda_e^* = (2 - 4)M_b R$  y longitudes de onda  $\lambda_0^* \approx 5R$  para números de Mach  $M_b = 3 - 6$ .

Se observa de las Figuras 4, 5 y 6 que es esperable que los haces de baja densidad realicen una transición rápida hacia una turbulencia, pues sus modos de longitud de onda corta tienen longitudes de crecimiento menores que  $R$ . Esta transición solo puede ser prevenida si el haz está bien protegido de la influencia de modos con longitudes de onda menores que unos pocos  $R$ . Haces más densos que el medio ambiente son bastantes estables y solo están levemente afectados por modo de longitud de onda corta (hasta que la frecuencia de la perturbación de conducción se vuelva muy alta; esto es, hasta que la longitud de onda del modo de conducción se vuelva mucho menor que el radio del haz). Para estructuras simples del haz, la única predicción clara de la teoría de Kelvin-Helmholtz es que los haces livianos harán una transición rápida desde un flujo laminar a uno turbulento, mientras que los haces densos pueden permanecer laminares por mucho más tiempo.

## 5. Aplicación de los modos Kelvin-Helmholtz a jets

El crecimiento de los modos vistos anteriormente puede derivar en distorsiones observables en el haz, siempre y cuando las longitudes de onda y de crecimiento no sean severamente modificadas en su transición de la fase de crecimiento lineal a no lineal, y si además los haces no son destruidos por la influencia de las longitudes de onda más cortas de la inestabilidad.

### 5.1. Estructura de un haz distorsionado

La teoría lineal vista sugiere que inestabilidades con un rango de longitudes de onda crecerán en un haz a menos que el haz contenga un campo magnético axial tal que  $c_{Ab} > v_b$  o

$$B_{zb} > (n/m^{-3})^{1/2} (v_b/c) nT. \quad (76)$$

A bajas potencias del campo, las inestabilidades no serán significativamente diferentes de aquellas para un fluido sin campo magnético. De las Figuras 4, 5 y 6 se vio que la operación de una inestabilidad Kelvin-Helmholtz será dominada por el modo con la longitud de onda más pequeña  $\lambda_0$  y con el  $n$  más grande, y que las longitudes de crecimiento de las inestabilidades son pequeñas a no ser que el haz sea supersónico tanto interna como externamente, i.e.  $v_b > c_{Sa}$  y  $v_b > c_{Sb}$ . Solo el modo ordinario será activo salvo que  $v_b > c_{Sa} + c_{Sb}$ . Que el haz sea supersónico también implica que  $\lambda_e > R$  para longitudes de onda  $\lambda_0 > R$ , y así la estabilidad del mismo está dominada por los modos de reflexión a longitudes de onda cortas y por los modos ordinarios a longitudes grandes. Se puede concluir que si las estructuras observadas en los radio jets son causadas por la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, entonces los haces son supersónicos tanto interna como externamente.

Dado que el resultado de dicha inestabilidad es la transición hacia la turbulencia del flujo del haz, una mayor o menor inestabilidad en los haces astrofísicos puede interpretarse como un indicador de la susceptibilidad de los mismos a dicha transición. Ferrari et al. (1979) sugirieron que los jets luminosos en radio, los cuales están presentes comunmente en radio galaxias de baja potencia y quasars de alta potencia, son indicativos de aceleración turbulenta de partículas, la cual ocurre en haces inestables, y que los jets invisibles de las radio galaxias de alta potencia deben ser interpretados como haces más estables y por lo tanto no han desarrollado turbulencias fuertes y su consecuente aceleración de partículas. A partir del hecho que los haces livianos son más inestables que los densos, se puede sugerir que esta tendencia hacia la emisión brillante en radio puede ser tenida en cuenta como un trazador de la densidad del haz.

La longitud de onda del crecimiento más rápido es siempre establecida por la longitud de onda mínima permitida y el número de modo azimutal máximo permitido. Dado que no se tiene evidencia directa de la operación de los modos con  $\lambda_0$  pequeña, se asume que estos modos operan para producir el calentamiento Kelvin-Helmholtz del fluido del haz, el cual resulta en la creación de un perfil de densidad, velocidad y temperatura autoconsistente a través del haz. En este modelo, los nudos (*knots*) son interpretados como los límites no lineales de los modos  $n = 0$ , y los giros (*twists*) son asociados a los modos  $n = 1$ .

De la Figura 7 puede verse que tanto los modos ordinarios como de reflexión involucran la transición de energía de la onda a través del diámetro del haz, y que las perturbaciones en la presión no decrezcan rápidamente lejos del límite del haz. Si la amplitud de las perturbaciones en la presión se toma para reflejar el brillo en radio de un haz, entonces se puede deducir que haces afectados por las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz no deberían

desplegar un apreciable limbo brillante. Pese a que el resultado de que haces distorsionados, que no muestran el limbo brillante, está en acuerdo con las predicciones del modelo de Kelvin-Helmholtz, existe una característica de otros modelos para haces-doblados, y que no puede ser tomada como soporte para un origen Kelvin-Helmholtz para jets doblados. Se debe destacar que los efectos de proyección pueden causar patrones complicados como para ser vistos a partir de estructuras simples de un haz, de modo que la orientación relativa del haz y la línea de la visual son de suma importancia en la interpretación de las estructuras observadas en jets.

## 5.2. Inestabilidades y variabilidad

Como se menciona en la sección previa, el desarrollo de las inestabilidades no se producirá a menos que el campo magnético axial sea menor que el valor crítico,  $B_{zb} < B_c$  (Romero 1995):

$$B_c = v_b \sqrt{4\pi\rho_b}. \quad (77)$$

De ser así, tales inestabilidades podrán producir cambios significativos en la morfología del haz, originando detalles que pueden ser los responsables de la rápida variabilidad cuando interaccionan con las ondas de choque relativistas. Si el número de Mach,  $M_b$ , está en el rango 2-5 (haces transónicos), los modos  $n \geq 1$  serán dominantes y el haz desplegará curvas periódicas, con lo que la variabilidad podrá ser producida acorde al modelo de *swinging jet*. Si en cambio,  $M_b$  se encuentra en un régimen hipersónico ( $M_b > 5$ ), la estabilidad del haz estará dominada por el modo  $n = 0$  y se aplicará el modelo de *pinching jet*. Para  $M_b$  mayores, los modos de reflexión tienen una tasa de crecimiento más rápida y no pueden ser estabilizados por equipartición de campos magnéticos. Cuando la inestabilidad crece al punto de saturación, vimos que se produce una transición rápida hacia la turbulencia. La variabilidad podrá entonces ser producida por el modelo de *turbulent jet*.

### 5.2.1. Modelo de *swinging jet*

La idea principal de este modelo es poder relacionar la variabilidad observada en un blazar con un escenario de “bamboleo” o precesión del jet. Recordemos, a partir del modelo unificado de AGNs, que los blazares son una subclase de AGN en donde la dirección del jet se encuentra cerca de la línea de la visual. Básicamente, se asume que la variabilidad es la consecuencia de que el camino de los grumos, que se mueven relativísticamente dentro del jet, se desvía ligeramente de la línea de la visual. Esto es debido a que se tienen desviaciones pequeñas en la dirección del jet (Ver Fig. 8).

Estas pequeñas desviaciones producen un cambio en el factor Doppler asociado, el cual genera un cambio significativo en la magnitud observada. Esto se explicaría a través de efectos relativistas, los cuales magnifican cualquier perturbación presente.

De la definición de factor Doppler:

$$\delta = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta \cos \theta)} = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta \cos \theta_0 \cos \phi)} \quad (78)$$

donde  $\Gamma$  es el factor de Lorentz, y  $\theta_0$  es el ángulo más pequeño entre la dirección del jet y la línea de la visual.

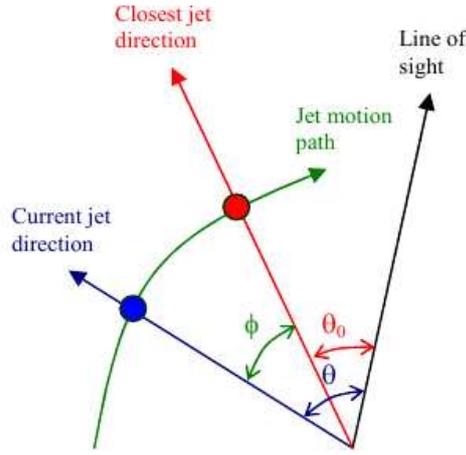


Figura 8: Cambio en la dirección del jet y los correspondientes ángulos (Bachev et al., 2012).

De la expresión anterior, puede verse que la máxima amplificación se da para  $\theta_0 = 0$ . Por otro lado, a través del cálculo del flujo, el cual depende del factor Doppler, puede obtenerse el cambio asociado en la magnitud:  $F_\nu = F'_\nu \delta^{3+\alpha}$ , con  $\alpha$  el índice espectral. De esta manera, obtenemos el cambio en la magnitud:  $dm/dt \simeq d \ln \delta / dt$ , e integrando podemos conocer cómo varía la magnitud en función del tiempo, i.e., la curva de luz.

### 5.2.2. Modelo de *turbulent jet*

Dentro de los mecanismos que pueden causar variabilidad en la emisión no térmica de los blazares se destaca la turbulencia en el plasma hidromagnético de un jet, dada la velocidad relativa extrema del flujo relativa al medio externo (Marscher, 1996).

La evidencia de la existencia de jets hidromagnéticamente turbulentos viene de las observaciones ya que se ha medido polarización lineal considerablemente menor de la esperada por la radiación sincrotrón estandar, lo cual indica que el campo magnético contiene una componente orientada al azar.

La interacción entre ondas de choque y el medio turbulento en un jet puede explicar algunas características claves de la emisión del blazar. Dado que una onda de choque amplifica solo la componente del campo que permanece paralela al frente de choque, un choque debe ordenar el campo aleatorio tal que se encuentre predominantemente en esa dirección. Esto de echo se observa en la componente brillante de los BL Lac y de algunos quasars.

Marscher (1996) cree que los choques de frecuencia estratificada que se propagan a través de la turbulencia hidromagnética en un jet son los causantes de la variabilidad a corto plazo de tiempo en la emisión no térmica de un blazar.

Esta variabilidad en la densidad de flujo inducida por turbulencia surge de fluctuaciones no solo en la densidad de electrones relativistas y magnitud del campo magnético, si no también de la orientación del campo.

Desafortunadamente, no se sabe mucho de la turbulencia hidromagnética en un plasma relativista. Lo ideal sería poder predecir el espectro de potencia de las variaciones causadas por interacciones de los choques con la turbulencia y comparar estos resultados con datos observacionales. Por el momento se trabaja con simulaciones numéricas de choques en jets (Gómez et al.; 1996, 1997).

### 5.2.3. Modelo de *pinching jet*

Este modelo puede aplicarse cuando  $M_b > 5$  y  $n = 0$ . Hardee en su trabajo de 1976 encontró que en la superficie de un jet cilíndrico existen los modos *pinching* inestables peculiares de la geometría cilíndrica. Las ondas crecientes de  $n = 0$  que dan lugar a *pinching* periódicos del jet compiten con las ondas de crecimiento *fluting* a  $n \geq 1$  las cuales no cambian la sección transversal del jet. El modo *pinching* puede producir variaciones en la densidad de electrones dentro del jet. Cuando el número de Mach es  $M_b \geq 1$  y las ondas de este modo están relacionadas con el radio del jet  $R$  por  $\lambda_0 \sim 2\pi R$ , la tasa de crecimiento del modo *fluting* es superada por la tasa de crecimiento del modo *pinching*. En este caso, las perturbaciones son capaces de producir pequeñas y regularmente espaciadas inhomogeneidades en la estructura del jet. Si estos “pellizcos” crecen lo suficientemente rápido, el modo inestable  $n = 1$  será estabilizado por las variaciones en la densidad del jet inducida por los “pellizcos”.

En el caso de un jet hipersónico ( $M_b \sim 6$ ) que se está propagando al medio externo con una densidad mayor que  $2.4 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$  en la región donde el radio del jet es  $\sim 0.37 \text{ pc}$  (no muy lejos del núcleo), las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz pueden dar lugar a inhomogeneidades en la densidad con una escala espacial de  $\sim 3.6 \text{ pc}$ , las cuales se requieren para interpretar las variaciones en la densidad de flujo originadas por la propagación del choque a lo largo del jet.

## 6. Discusión

Se cree que en la base del jet las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz no dominan por completo. En esta región, el jet está dominado magnéticamente y es por esto que las inestabilidad *Current-Driven* comienzan a aparecer (Perucho M., 2012). Estas inestabilidades son generadas por diferencias en las fuerzas magnéticas cuando un campo toroidal está presente. En el caso en que un modo *pinching* es producido, la fuerza más grande, producida por las líneas comprimidas, permite que el *pinch* crezca. En cambio, si un modo *kink* es producido, las líneas magnéticas se acercan a la región más interna de la retorcadura, incrementando la fuerza magnética y extendiendo la curvatura del jet. Ambos modos se estabilizan cuando aparece una componente de un campo poloidal. En el régimen relativista, las tasas de crecimiento decaen a medida que decae la velocidad alfvénica y, en lo que respecta al régimen no lineal, una “*helicity*” (cociente entre las componentes de los campos toroidal y poloidal) creciente del campo magnético con un radio creciente del jet estabiliza el flujo con respecto al modo *kink*.

Como se mencionó anteriormente, la inestabilidad *Current-Driven* domina a escalas de sub-parsecs. Sin embargo, el papel que juega esta inestabilidad se verá reducido a medida que el jet se expanda, y también debido a la rotación, la cual puede tener un efecto de estabilidad. Sabemos que aquellos flujos que poseen velocidades sub-alfvénicas, son estables debido a la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz. Pero una vez que los jets alcanzan velocidades super-alfvénicas, las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz pasan a dominar por encima de las inestabilidades de *Current-Driven*, y comienza a tomar importancia en la estabilidad a largo plazo de los jets.

Por otra parte, en cuanto al modelo que mejor explicaría la microvariabilidad en blazares nosotros podríamos inclinarnos por el modelo *Swinging Jets* ya que en el trabajo en desarrollo de Marchesini et al., 2015 este modelo a lo grado reproducir las observaciones en buen acuerdo, aunque no descartamos del todo el modelo *Turbulent Jets*.

## 7. Conclusiones

A lo largo de todo este trabajo hemos podido estudiar globalmente la estabilidad de los jets astrofísicos.

A escalas del orden de los sub-parsecs las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz no son predominantes; en ese caso el comportamiento del jet puede explicarse a través de las inestabilidades de *Current-Driven*. A escalas mayores, pasan a dominar las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz. Los modos ordinarios ( $N = 0$ ) dominan la estabilidad de un haz para números de Mach pequeños, mientras que los modos de reflexión ( $N > 0$ ) se destacan en flujos más rápidos. Para cada uno de estos modos, se pueden dar los modos  $n = 0$  (*pinching*),  $n = 1$  (*helical*),  $n = 2$  (*heliptical*), etc. Dependiendo de cuál de estos modos predomine es posible asociarle un modelo de jets que explique la variabilidad en los blazares; estos modelos son *Swinging Jets*, *Turbulent Jets* y *Pinching Jets*. De todo el análisis llevado a cabo y en base a trabajos actuales podríamos decir que el modelo que mejor se ajusta a las observaciones es el de *Swinging Jets*.

## 8. Bibliografía

- Bachev R., 2012, MNRAS, 424, 2625
- Birkinshaw M., Cap. 6: *The Stability of Jets, Beams and Jets in Astrophysics*, 1991, The Cambridge University Press
- Hardee P., 2011, Jets at All Scales, IAU Symposium *N*o. 275, 2011
- Marchesini E. et al; 2015, A&A, en preparación
- Marscher A., 1996, Blazar continuum variability, ASP Conference Series, Vol. 110, 1996
- Perucho M.; 2012, International Journal of Modern Physics Conference Series, 8, 241
- Porth O. et al; 2015, arXiv:1408.3318v2
- Reynoso M. M. et al; 2012, A&A, 545, A125
- Romero G. E., 1995, Ap&SS, 234, 49
- Bosch-Ramón V., 2013, Apuntes del curso “*High-Energy Processes in Sources with Relativistic Outflows*”