Introducción a la Astrofísica de Agujeros Negros 2017

Práctica 1: cálculo tensorial en variedades.

1. Mostrar que en una variedad donde el intervalo es cuadrático en los diferenciales, i.e. $ds^2 = g_{ab}(x)\, dx^a dx^b$, la métrica puede elegirse de manera que $g_{ab}(x) = g_{ba}(x)$.

2. En el espacio euclídeo 3D, escribir el intervalo en coordenadas esféricas y cilíndricas. Identificar los coeficientes de la métrica en ambos sistemas y mostrar que se relacionan como

$$g'_{ab}(x') = g_{cd}(x) \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b}.$$

3. En el espacio euclídeo 3D, ciertas coordenadas x'^a se relacionan con las coordenadas cartesianas x^a como

$$x^1 = x'^1 + x'^2 \qquad x^2 = x'^1 - x'^2 \qquad x^3 = 2x'^1 x'^2 + x'^3.$$

¿Cómo son las curvas coordenadas en el sistema x'^a? Obtener los coeficientes de la métrica $g'_{ab}(x')$ y comprobar que las x'^a no son coordenadas ortogonales.

4. Consideremos una superficie esférica de radio a embebida en el espacio euclídeo 3D (2-esfera).

   a) A partir de la ecuación de la esfera en coordenadas cartesianas (x, y, z) hallar la expresión para el intervalo ds^2 *sobre la superficie de la esfera* en estas coordenadas. Identificar los coeficientes de la métrica.

   b) Escribir el intervalo en un nuevo sistema de coordenadas (ρ, ϕ) que se obtiene del anterior a partir de la transformación $x = \rho \cos\phi$, $y = \rho \sin\phi$. Identificar los nuevos coeficientes de la métrica.

   c) ¿Qué ocurre cuando $x^2 + y^2 = a^2$ ó $\rho = a$?

   d) Aunque en el espacio euclídeo 3D las coordenadas (x, y) y (ρ, ϕ) tienen un significado geométrico claro, podrían haberse elegido para mapear la superficie de la esfera sin necesidad alguna de considerar la existencia de una variedad de mayor dimensión donde la 2-esfera esté embebida. Dibujar las curvas coordenadas *sobre la esfera* para ambos sistemas de coordenadas.

   e) Considerar la circunferencia *sobre la esfera* definida por $\rho = R$. Trabajando en coordenadas (ρ, ϕ) calcular el perímetro, la distancia desde el centro al perímetro y el área del círculo encerrado. Analizar los resultados.

5. Demostrar las siguientes afirmaciones.

   a) $\partial_c g_{ab} = \Gamma^d{}_{ca} g_{db} + \Gamma^d{}_{cb} g_{da}$.

   b) Si $\Gamma^a{}_{bc} = \Gamma^a{}_{cb}$ (en cuyo caso se dice que la variedad tiene torsión cero), entonces se satisface la siguiente relación entre la conexión afín y la métrica:

   $$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc} \right).$$

   c) $g_{ab;c} \equiv \nabla_c g_{ab} = 0$ en todos los sistemas de coordenadas.

6. Consideremos coordenadas polares (ρ, ϕ) en el espacio euclídeo 2D (el plano).

   a) Escribir la regla de transformación de coordenadas polares a cartesianas y viceversa.

   b) Obtener los vectores base coordenados $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ en función de $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$. Dibujar $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ en distintos puntos del plano. Calcular sus derivadas.

   c) Hallar los coeficientes de la métrica g_{ab} en coordenadas polares a partir de los vectores base coordenados. Calcular los coeficientes g^{ab}.

   d) Calcular todas las componentes de la conexión afín $\Gamma^a{}_{bc}$ en coordenadas polares a partir de *i*) las derivadas de los vectores base coordenados, *ii*) de la métrica.

   e) Hallar la expresión para la divergencia de un vector en coordenadas polares. Comparar con el resultado conocido.

   f) Escribir las ecuaciones geodésicas en coordenadas polares. Resolver para hallar $\rho(\phi)$. Interpretar el resultado.

7. Calcular todas las componentes independientes del tensor de Riemann para una 2-esfera de radio a en coordenadas esféricas, $ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$. Mostrar que el escalar de curvatura vale $R = 2/a^2$. Calcular R para un cilindro.