Introducción a la Astrofísica de Agujeros Negros 2017

Práctica 3: agujeros negros.

Espacio-tiempo de Schwarzschild.

1. Deflexión de la luz. Un fotón con $p_t = E$ y $p_\phi = -L$ se propaga en el espacio-tiempo de Schwarzschild acercándose a la masa M desde $r \to \infty$ como se muestra en la Figura 1.

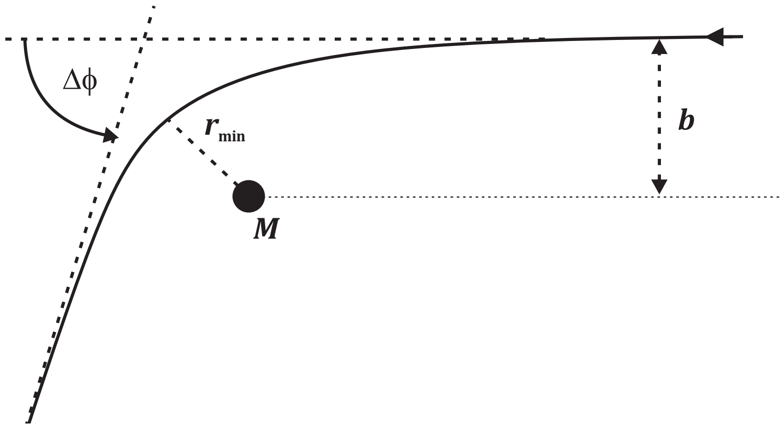

Figura 1: Deflexión de la trayectoria de un fotón cerca de un objeto compacto.

a) Demostrar que el ángulo de deflexión vale

$$\Delta\phi = -\pi + 2\int_0^{u_{max}} \left(\frac{1}{b^2} - u^2 + 2MGu^3\right)^{-1/2} du, \tag{1}$$

donde $u = 1/r$ y $b \equiv L/E$ es el parámetro de impacto.

b) Resolver la integral en el límite $2MG/r \ll 1$ y mostrar que

$$\Delta\phi \approx \frac{4MG}{b}. \tag{2}$$

¿Cuál es la máxima deflexión posible causada por el Sol sobre la trayectoria de un fotón?

2. Calcular y comparar el tiempo propio transcurrido entre dos eventos $A = (t_A, r_0, 0, 0)$ y $B = (t_B, r_0, 0, 0)$ para:

a) un observador fijo en r_0,

b) un observador en órbita circular de radio r_0,

c) un observador en caída libre radial que parte de r_0 en t_A y regresa a r_0 en t_B.

3. Considerar el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas (t, r, θ, ϕ).

a) Mostrar que $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ y $R^\mu = (0, 0, 0, 1)$ son vectores de Killing. Calcular las cantidades conservadas asociadas.

b) Mostrar que el momento angular total $L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2 / \sin^2\theta$ es constante a lo largo de una geodésica.

c) Una hipersuperficie Σ puede definirse mediante la condición $f(x)$ =constante para alguna función f. El gradiente $\partial_\mu f$ es normal a Σ; si el vector normal es nulo (i.e. $(\partial^\mu f)(\partial_\mu f) = 0$) se dice que la hipersuperficie es *nula* (notar que en este caso el vector normal también es tangente a Σ, ya que un vector nulo es ortogonal a sí mismo). Mostrar que el horizonte de eventos en el espacio-tiempo de Schwarzschild (o sea la hipersuperficie $r = 2GM/c^2$) es una hipersuperficie nula.

d) Si un vector de Killing χ^μ es nulo (i.e. $\chi^\mu \chi_\mu = 0$) sobre una hipersuperficie nula Σ, se dice que Σ es un *horizonte de Killing* de χ^μ. Mostrar que el horizonte de eventos en el espacio-tiempo de Schwarzschild es un horizonte de Killing para K^μ.

Espacio-tiempo de Kerr.

4. Ergosfera. Límite estático.

a) Se define la velocidad angular coordenada de un observador (o cualquier partícula) como $\Omega = d\phi/dt$, que coincide con la velocidad angular con respecto a un segundo observador en el infinito. Mostrar que para un observador con momento angular nulo (*zero angular momentum observer*, ZAMO) vale $\Omega_{\mathrm{ZAMO}} \equiv \omega = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$. Escribir ω en coordenadas de Boyer-Lindquist y comprobar que decae como $\sim 1/r^3$. Notar que este efecto, conocido como *"dragging of the inertial frames"*, existirá en cualquier espacio-tiempo con $g_{t\phi} \neq 0$.

b) Mostrar que dentro de la ergosfera no puede existir ningún observador con todas las coordenadas espaciales fijas.

c) Considerar un observador con cuadrivelocidad $u^\mu = u^t\,(1, 0, 0, \Omega)$ (notar que la trayectoria de este observador no será una geodésica). Mostrar que el valor de Ω está restringido al intervalo $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$, donde

$$\Omega_\pm = \omega \pm \left(\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Analizar los signos de $\Omega_\pm$ dentro y fuera de la ergosfera y en el límite estático. Mostrar que en el horizonte externo $r = r_+$ vale

$$\Omega_- = \Omega_+ = \Omega_{\mathrm{H}} = \omega\,(r_+, \theta) = \frac{ac^3}{2GMr_+} = \frac{ac}{r_+^2 + a^2}. \tag{4}$$

Este valor es independiente de θ y se suele llamar "velocidad angular del agujero negro" o "velocidad angular del horizonte", en el sentido de que un observador en $r = r_+$ tiene velocidad angular $\Omega = \Omega_{\mathrm{H}}$ respecto de un segundo observador en el infinito.

5. Mecanismo de Penrose. Una partícula con componente del cuadrimpulso $p_t = E$ ingresa en la ergosfera de un agujero negro de Kerr donde se separa en dos partes. La parte "A" escapa de la ergosfera siguiendo una trayectoria geodésica; la parte "B" es inyectada con $p_t^{(B)} < 0$ y cae hacia el agujero negro cruzando el horizonte de eventos externo en $r_+ = GM + \sqrt{G^2M^2 - a^2}$.

a) Demostrar que $p_t^{(A)} > E$, por lo que la parte que sale de la ergosfera tiene más energía que la partícula inicial.

b) Mostrar que la partícula "B" tiene momento angular $L^{(B)} = -p_\phi^{(B)} < 0$. Concluir, entonces, que la masa M y el momento angular $J = aM$ del agujero negro *disminuyen* como consecuencia de la caída de la partícula "B".

c) Mostrar que la máxima variación posible en el momento angular del agujero negro es $\delta J = \delta M/\Omega_{\mathrm{H}}$, donde $\Omega_{\mathrm{H}} = a/\left(r_+^2 + a^2\right)$ es la velocidad angular de un observador con r y θ fijos en r_+.

d) El área del horizonte de eventos en el espacio-tiempo de Kerr es

$$A = 4\pi\left(r_+^2 + a^2\right). \tag{5}$$

Definimos la *masa irreducible* como

$$M_{\mathrm{irr}}^2 = \frac{A}{16\pi G^2} = \frac{1}{2}\left[M^2 + \sqrt{M^4 - (J/G)^2}\right]. \tag{6}$$

Mostrar que $\delta M_{\mathrm{irr}} > 0$.

e) Probar que

$$M^2 = M_{\mathrm{irr}}^2 + \frac{J^2}{4M_{\mathrm{irr}}^2} \geq M_{\mathrm{irr}}^2, \tag{7}$$

por lo que la máxima energía que es posible extraer del agujero negro antes de detener por completo su rotación es $\Delta M = M - M_{\mathrm{irr}}$. ¿Qué porcentaje de M representa para un agujero negro de Kerr extremo?

Espacio-tiempo de Reissner-Nordström.

6. Trayectoria de una partícula cargada.

a) En un espacio-tiempo curvo, la ecuación de movimiento de una partícula cargada en presencia de campo electromagnético es

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = \epsilon F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}, \tag{8}$$

donde $\epsilon \equiv q/m$, q y m son la carga y la masa de la partícula, respectivamente, y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Maxwell (que es antisimétrico). Demostrar que esta ecuación puede obtenerse a partir del Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + \epsilon A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}. \tag{9}$$

Aquí A_μ es el cuadripotencial a partir del que puede calcularse el tensor de Maxwell como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$.

b) Considerar el espacio-tiempo de Reissner-Nordström:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2}dt^2 - \frac{r^2}{\Delta}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \tag{10}$$

donde $\Delta = (r - r_+)(r - r_-)$ y $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ son los radios del horizonte externo e interno, respectivamente. Por simetría, la única componente no nula del tensor de Maxwell es $F_{tr} = -F_{rt} = Q/r^2$.

Calcular las ecuaciones de movimiento para una partícula cargada en trayectoria radial:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r}{\Delta}(\gamma r - \epsilon Q) \tag{11}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{1}{r}\left[(\gamma r - \epsilon Q)^2 - \Delta\right]^{1/2}, \tag{12}$$

donde $\gamma = E/m$ es una constante.

c) Mostrar que una partícula neutra no puede pasar más allá de cierto $r < r_{\min}$ ya que es repelida por una barrera de potencial creada por la carga en el origen.

d) Calular la aceleración radial $d^2r/d\tau^2$ y demostrar que independientemente del signo de ϵ, la singularidad es repulsiva (i.e. $d^2r/d\tau^2 \to \infty$ para $r \to 0$) si $|\epsilon| < 1$.