

# Introducción a la Astrofísica de Agujeros Negros 2017

## Práctica 5: agujeros negros en astrofísica.

### 1. Luminosidad de Eddington. Estimación de la energía característica de la radiación de un objeto compacto acretante.

a) Derivar la expresión usual para la luminosidad de Eddington de un objeto acretante de masa  $M$ :

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi G m_p c M}{\sigma_{\text{Th}}} = 1.3 \times 10^{38} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ erg s}^{-1}, \quad (1)$$

donde  $m_p$  es la masa del protón y  $\sigma_{\text{Th}}$  es la sección eficaz de Thomson. Explicitar cuidadosamente todas las suposiciones realizadas.

b) Aunque el espectro de las fuentes acretantes es generalmente no térmico, una estimación cruda de la energía típica  $\langle E_{\gamma} \rangle$  de la radiación emitida por un objeto acretante de radio  $R$  puede obtenerse igualando su luminosidad a la de un cuerpo negro del mismo radio y temperatura  $kT \approx \langle E_{\gamma} \rangle$ . Estimar  $\langle E_{\gamma} \rangle$  para un objeto de masa estelar (una estrella de neutrones o un agujero negro en un sistema binario) y para un agujero negro súpermasivo de  $M \sim 10^6 - 10^9 M_{\odot}$  (como los que existen en los núcleos galácticos). ¿A qué banda del espectro electromagnético corresponden los valores calculados?

**2. Energía de ligadura.** Una partícula de masa  $m$  cae desde el infinito (partiendo desde el reposo) sobre un agujero negro. Se define la *energía de ligadura* (*binding energy*) por unidad de masa  $\tilde{E}_{\text{bind}}$  como

$$\tilde{E}_{\text{bind}} = \frac{m - E_{\text{ISCO}}}{m}, \quad (2)$$

donde  $E_{\text{ISCO}}$  es la energía de la partícula en la última órbita circular estable (*innermost stable circular orbit*, ISCO). Esta es la cantidad de energía por unidad de masa liberada por la partícula durante su caída hacia el agujero negro en una sucesión de órbitas casi circulares.

Calcular  $\tilde{E}_{\text{bind}}$  para un agujero negro de Schwarzschild y para un agujero negro de Kerr maximalmente rotante. En el último caso considerar órbitas ecuatoriales.

**3. Emisión de líneas en régimen de campo fuerte.** Los átomos de Fe débilmente ionizados emiten líneas llamadas de *fluorescencia* cuando un electrón de las capas más internas absorbe un rayo X y la vacancia es ocupada por otro electrón de una capa externa. La línea

de emisión más intensa es la  $K\alpha$  (que corresponde a la transición electrónica  $1p \rightarrow 2s$ ) en  $\sim 6.4$  keV para un átomo de Fe en reposo.

La línea  $K\alpha$  del Fe se detecta en el espectro de las binarias de rayos X (XRBs) y los núcleos galácticos activos (AGN). La emisión se produce cuando átomos de Fe en el disco de acreción son irradiados por rayos X duros provenientes, por ejemplo, de la corona. Las líneas observadas no son angostas sino que están ensanchadas debido a varios efectos. En la Figura 1 se muestra el caso de una detección de esta línea en el espectro de una galaxia. En el sistema en reposo del emisor la línea es monocromática a la frecuencia  $\nu_0$ , lo que corresponde a una intensidad tipo distribución delta de Dirac. Pero si el material que emite está en un disco de acreción, la emisión de la región que se mueve hacia el observador estará corrida al azul y la de la parte que se aleja al rojo. Por este efecto el perfil se deforma a uno tipo doble pico. Si, además, la velocidad de rotación del disco es relativista la emisión estará también afectada por *beaming* (efecto de Relatividad Especial). Finalmente, si el material está sujeto a un campo gravitatorio intenso los fotones sufrirán corrimiento al rojo gravitacional. El resultado neto de los efectos relativistas es que el perfil se vuelve asimétrico.

El cálculo detallado del perfil de la línea es complejo, ver por ejemplo Beckwith & Done (2004) y sus referencias. Es posible, sin embargo, estimar el corrimiento en frecuencia que sufren los fotones emitidos en el disco en algunos casos sencillos.

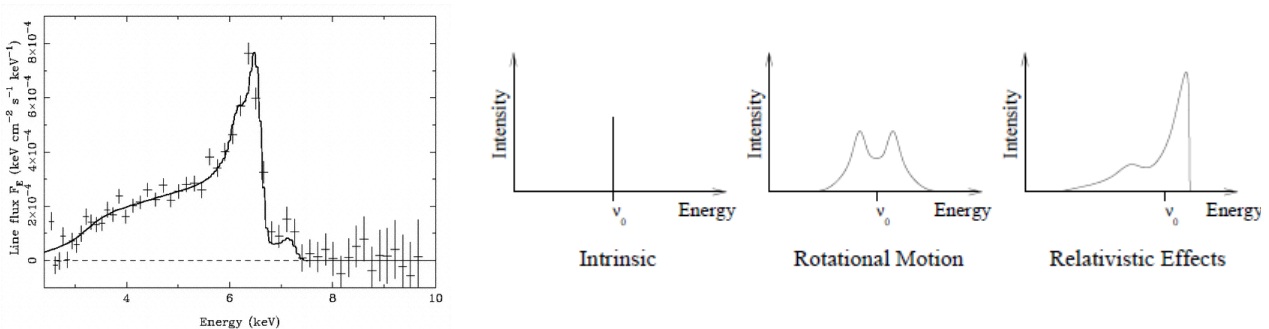


Figura 1: **Izquierda:** perfil de la línea Fe  $K\alpha$  de la galaxia Seyfert 1 MGC-6-30-15. Las cruces son los datos observacionales y la curva sólida un ajuste teórico. De Fabian et al. (2002). **Derecha:** cómo se deforma y ensancha el perfil de la línea por diversos efectos.

Considerar un disco de acreción delgado alrededor de un agujero negro. Sin pérdida de generalidad, supondremos que el disco ocupa el plano  $\theta = \pi/2$ . Desde un punto  $(r, \phi)$  en el disco, el material en órbita circular geodésica con cuadrivelocidad  $u_{em}^\mu$  alrededor del agujero negro emite un fotón con cuadrimpulso  $p^\mu$ . Un observador estático en el infinito recibe el fotón y mide que su cuadrimpulso es  $p_\infty^\mu$ .

a) Si  $\nu_*$  es la frecuencia del fotón en el sistema en reposo del emisor y  $\nu_\infty$  es la frecuencia medida por el observador en el infinito, mostrar que

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_*} = \{u_{\text{em}}^t(r) [1 \pm b \Omega(r)]\}^{-1}, \quad (3)$$

donde  $\Omega = d\phi/dt$  es la velocidad angular coordenada del material en el disco y  $b = |\epsilon/\ell|$  es el parámetro de impacto del fotón (ver Problema 1 de la Práctica 3). ¿A qué situaciones corresponden los signos  $\pm$ ?

b) Suponer que el agujero negro es uno de Schwarzschild y que el disco está visto de canto (*edge on*) como se muestra en la Figura 2. Obtener la expresión para  $\Omega(r)$ . Calcular  $b$  y el cociente de frecuencias en los siguientes dos casos particulares:

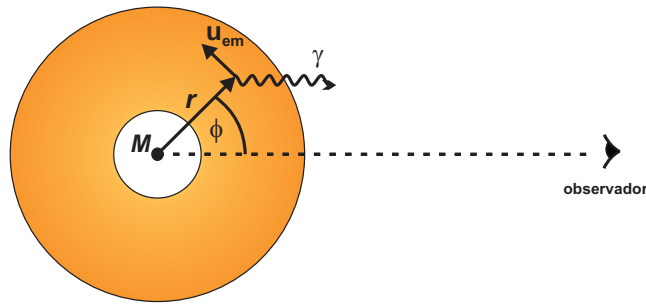


Figura 2: Un fotón es emitido desde el punto  $(r, \phi)$  en el disco de acreción y se propaga en dirección a un observador lejano cuya línea de visual es perpendicular a la normal al disco (disco visto de canto o *edge on*).

- $\phi = 0$  o  $\phi = \pi$ , que corresponde a fotones emitidos por material que se mueve en dirección perpendicular a la línea de la visual. Mostrar que en este caso la frecuencia observada está siempre corrida al rojo. Notar que esta configuración describe también la situación en que el disco está visto de cara (*face on*).
- $\phi = \pm\pi/2$ , que corresponde a fotones emitidos por material que mueve a lo largo de la línea de la visual acercándose o alejándose del observador.
- Calcular el máximo valor del corrimiento al rojo para un disco visto de canto y otro de cara.

c) Repetir el punto anterior para un disco de acreción alrededor de un agujero negro de Kerr. Para ello calcular correspondiente expresión para  $u_{\text{em}}^t(r)$  en la ec. 3. Usar que en este caso

$$\Omega(r) = \frac{c\sqrt{\mu}}{a\sqrt{\mu} \pm r^{3/2}}, \quad (4)$$

donde  $\mu = GM/c^2$  y los signos  $+$  y  $-$  corresponden a un disco co-rotante o contra-rotante respecto del agujero negro, respectivamente. Considerar ambos casos al calcular el máximo valor del corrimiento.

#### Ejercicio 4. Discos de acreción delgados en régimen de campo fuerte.

Consideremos un espacio-tiempo estacionario ( $\partial_t = 0$ ) y axisimétrico ( $\partial_\phi = 0$ ). La forma general de la métrica en este caso es

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dt d\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2. \quad (5)$$

Bajo las hipótesis de que el disco ocupa el plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$ , es geoméricamente delgado (la semi-altura satisface  $H(r) \ll r$ ) y está en equilibrio hidrodinámico, Novikov & Thorne (1973) y Page & Thorne (1974) hallaron la expresión general para el flujo de energía (en unidades de  $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ) emitido a través de las caras del disco:

$$F_{\text{PT}}(r) = \frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{-g_M}} \frac{\Omega_{,r}}{(\tilde{E} - \Omega\tilde{L})^2} \int_{r_{\text{isco}}}^r (\tilde{E} - \Omega\tilde{L}) \tilde{L}_{,r'} dr'. \quad (6)$$

Aquí  $\dot{M}$  es la tasa de acreción,  $g_M$  es el determinante del tensor métrico y  $r_{\text{isco}}$  el radio de la última órbita circular estable. Las funciones  $\Omega = d\phi/dt$ ,  $\tilde{E}$  y  $\tilde{L}$  son la velocidad angular coordenada, la energía específica y el momento angular específico de una partícula en órbita circular geodésica, respectivamente. Estas tres cantidades pueden escribirse en función de los coeficientes de la métrica (ver por ejemplo Harko et al. 2009), por lo que sus expresiones exactas dependerán del espacio-tiempo en que se está trabajando. Para el caso particular del espacio-tiempo de Kerr las fórmulas se dan al final del enunciado del ejercicio.

Si se asume que el disco es ópticamente grueso, cada anillo emitirá como un cuerpo negro a la temperatura local  $T(r)$ , que puede calcularse a partir de la ec. (6) como

$$F_{\text{PT}}(r) = \sigma_{\text{SB}} T(r)^4, \quad (7)$$

donde  $\sigma_{\text{SB}}$  es la constante de Stefan-Boltzmann. Entonces la luminosidad observada del disco (en unidades de  $\text{erg s}^{-1}$ ) en función de la energía  $\epsilon$  es

$$L(\epsilon) = \cos(i) \left( \frac{2}{c^2 h^3} \right) \int_{r_{\text{isco}}}^{r_{\text{out}}} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^4}{\exp\left[\frac{\epsilon}{gkT}\right] - 1} r dr d\phi. \quad (8)$$

Aquí  $i$  es el ángulo entre la normal al plano del disco y la línea de la visual,  $r_{\text{out}}$  es el radio externo del disco y la energía de emisión  $\epsilon_e$  se relaciona con la observada mediante el factor de *redshift*  $g$  como  $\epsilon = g\epsilon_e$ .

Considerar un disco de acreción visto de cara (*face on*) alrededor de un agujero negro de Kerr de masa  $M$  y spin  $a$ . Adoptar un valor de la tasa de acreción del 10% de la de Eddington y  $r_{\text{out}} = 10^3 r_{\text{isco}}$  para el radio externo del disco. Se pide:

a) Graficar (en el mismo gráfico) la temperatura del disco en función del radio en unidades del radio gravitacional  $R_{\text{grav}} = GM/c^2$  para un agujero negro de masa  $M = 10M_{\odot}$  y spin  $a = \pm 0.998$ ,<sup>1</sup>  $a = \pm 0.5$  y  $a = 0$ . Comentar.

b) Graficar (en el mismo gráfico) la temperatura del disco en función del radio en unidades del radio gravitacional  $R_{\text{grav}} = GM/c^2$  para  $a = 0$  y  $M = 10M_{\odot}$ ,  $M = 10^5 M_{\odot}$  y  $M = 10^8 M_{\odot}$ . Comentar.

c) Graficar (en el mismo gráfico) la luminosidad del disco en función de la energía del fotón en unidades de eV para un agujero negro de masa  $M = 10M_{\odot}$  y spin  $a = \pm 0.998$ ,  $a = \pm 0.5$  y  $a = 0$ . Comentar.

Se pueden utilizar las expresiones halladas en el Ejercicio 3 para el factor de *redshift*  $g$ . Notar que en el caso de un disco visto de cara la dependencia de  $g$  en el ángulo azimutal desaparece, por lo que la integral en la ec. (8) se simplifica.

### Fórmulas para calcular el flujo del disco

En el espacio-tiempo de Kerr, la expresión para el flujo radiado por el disco en función de  $r$  es (Page & Thorne 1974)

$$F_{\text{PT}}(r) = \frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{-g_{\text{M}}}} \frac{\Omega_{,r}}{(\tilde{E} - \Omega\tilde{L})^2} \int_{r_{\text{isco}}}^r (\tilde{E} - \Omega\tilde{L}) \tilde{L}_{,r'} dr' = \frac{\dot{M}c^2}{4\pi r^2} f(x). \quad (9)$$

La función  $f(x)$  está dada por

$$f = \frac{3}{2} \frac{1}{(x^3 - 3x + 2a)} \left[ x - x_0 - \frac{3}{2}a \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) - \frac{3(x_1 - a)^2}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \ln\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) - \frac{3(x_2 - a)^2}{x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \ln\left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right) - \frac{3(x_3 - a)^2}{x_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \ln\left(\frac{x - x_3}{x_0 - x_3}\right) \right]. \quad (10)$$

donde  $x = \sqrt{r/R_{\text{grav}}}$  es una coordenada radial adimensional y las demás funciones valen

<sup>1</sup>Thorne (1974) calculó la evolución de la masa y el momento angular de un agujero negro que acreta materia de un disco de acreción y la radiación emitida por el mismo. El resultado es que la acreción de los fotones emitidos por el disco generan un torque que impide que el agujero negro aumente su spin más allá de  $a \approx 0.998$ .

$$x_0 = \sqrt{r_{\text{isco}}/R_{\text{grav}}} = \left\{ 3 + Z_2 - \text{sgn}(a) [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (11)$$

$$Z_1 = 1 + (1 - a^2)^{1/3} \left[ (1 + a)^{1/3} + (1 - a)^{1/3} \right], \quad (12)$$

$$Z_2 = (3a^2 + Z_1^2)^{1/2}, \quad (13)$$

$$x_1 = 2 \cos \left( \frac{1}{3} \arccos a - \frac{\pi}{3} \right), \quad (14)$$

$$x_2 = 2 \cos \left( \frac{1}{3} \arccos a + \frac{\pi}{3} \right), \quad (15)$$

$$x_3 = -2 \cos \left( \frac{1}{3} \arccos a \right). \quad (16)$$

## Referencias

1. Beckwith K. & Done C., MNRAS 352, 353-362 (2004)
2. Fabian A. C. et al., MNRAS 335, L1-L5 (2002)
3. Harko T., Kovács Z. & Lobo F. S. N., PRD 79, id. 064001 (2009)
4. Novikov I. D. & Thorne K. S., *Astrophysics of Black Holes*, en *Black Holes*, C. DeWitt & B. DeWitt (eds.), Gordon & Breach, New York (1973)
5. Page D. N. & Thorne K. S., ApJ 191, 499-506 (1974)
6. Thorne K. S., ApJ 191, 507-519 (1974)