

Introducción a la Astrofísica de Agujeros Negros 2022

Ejercicios adicionales.

Fecha de entrega: 17 de Mayo.

1. El espacio-tiempo anti-de Sitter (AdS) es la única solución de vacío de las ecuaciones de Einstein con $\Lambda < 0$. En dimensión N el intervalo es

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{N-2}. \quad (1)$$

- a) Indique qué cantidades deben conservarse a lo largo de la línea de mundo de una partícula y por qué.
 - b) Para $N = 3$, hallar una expresión para \dot{r} (el punto indica diferenciación respecto de un parámetro afín) para partículas con y sin masa en función de cantidades conservadas.
2. Consideremos un sistema binario constituido por dos objetos de masa M en una órbita circular en el plano x^1-x^2 , cada una a una distancia R de su centro de masa común y con una frecuencia angular orbital Ω , como se muestra en la Fig. 1. Este

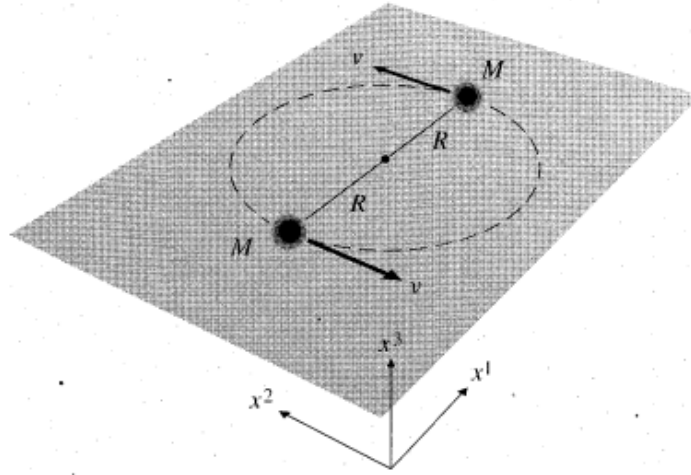


Figura 1: Sistema binario formado por dos objetos de masa M separados una distancia $D = 2R$.

sistema constituye una fuente localizada y no relativista de ondas gravitacionales (GWs). En este caso, la solución a las ecuaciones linealizadas de Einstein ($\square \bar{h}^{\alpha\beta} = -(16\pi G/c^4)T^{\alpha\beta}$, con \bar{h} la perturbación de la métrica) toma la forma:

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c^4} \frac{8GM}{r} \Omega^2 R^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t_r & -\sin 2\Omega t_r & 0 \\ -\sin 2\Omega t_r & \cos 2\Omega t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde $t_r = t - r/c$ es el tiempo retardado.

Resuelva:

- a) ¿En qué dirección se propagan las GWs?
- b) Obtenga la frecuencia f y la amplitud h (recibida a una distancia r de la fuente) de la radiación gravitacional emitida por el sistema en función de los parámetros del mismo (M y R).
- c) Calcule cuánto valen f y h para los siguientes casos:
 - i. Dos agujeros negros estelares de masa $M = 30 M_\odot$, separados por una distancia $D = 2$ UA y ubicados a una distancia de 100 Mpc de la Tierra.
 - ii. Dos agujeros negros estelares de masa $M = 30 M_\odot$, separados por una distancia $D = 2000$ km y ubicados a una distancia de 100 Mpc de la Tierra.
 - iii. Dos agujeros negros supermasivos de masa $M = 10^8 M_\odot$, separados por una distancia $D = 2$ pc y ubicados a una distancia de 1 Gpc de la Tierra.
 - iv. Dos agujeros negros supermasivos de masa $M = 10^8 M_\odot$, separados por una distancia $D = 200$ UA y ubicados a una distancia de 1 Gpc de la Tierra.
- d) En la Fig. 2 se muestra un ejemplo de una detección de GWs por la colaboración LIGO/Virgo.

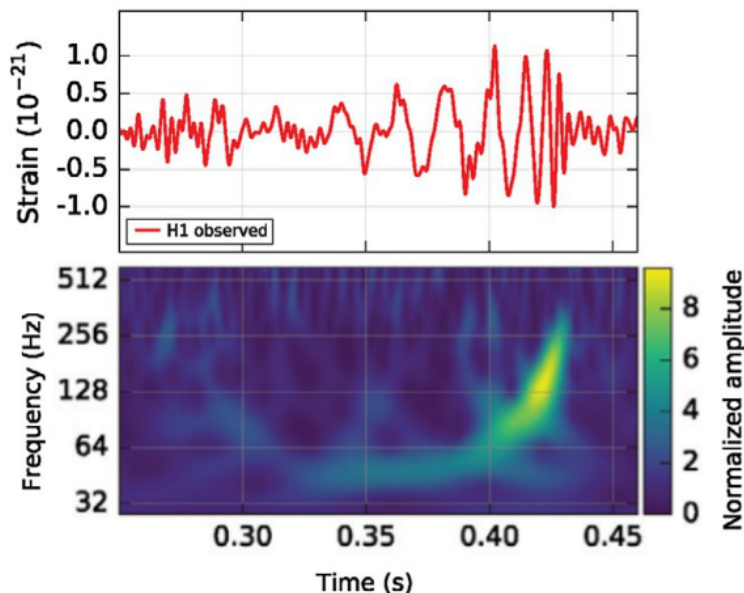


Figura 2: Arriba: amplitud de la GW en función del tiempo. Abajo: espectro dinámico de la GW.

Discuta:

- i. ¿Cuáles son las 3 etapas características en el patrón de GWs?
- ii. ¿Cómo se interpreta el gráfico del panel inferior?

III. Si tras la fusión de los objetos se forma un agujero negro que pulsa radialmente, ¿el mismo puede seguir emitiendo GWs?