

Introducción a la Astrofísica de Agujeros Negros

Práctica 1: cálculo tensorial en variedades.

1. Mostrar que en una variedad donde el intervalo es cuadrático en los diferenciales, i.e. $ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b$, la métrica puede elegirse de manera que $g_{ab}(x) = g_{ba}(x)$.
2. En el espacio euclídeo 3D, escribir el intervalo en coordenadas cilíndricas y esféricas. Identificar los coeficientes de la métrica en ambos sistemas y mostrar que se relacionan como

$$g'_{ab}(x') = g_{cd}(x) \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b}.$$

3. En el espacio euclídeo 3D, ciertas coordenadas x'^a se relacionan con las coordenadas cartesianas x^a como

$$x^1 = x'^1 + x'^2 \quad x^2 = x'^1 - x'^2 \quad x^3 = 2x'^1 x'^2 + x'^3.$$

- a) ¿Cómo son las curvas coordenadas en el sistema x'^a ? Graficar.
 - b) Obtener los coeficientes de la métrica $g'_{ab}(x')$ y comprobar que las x'^a no son coordenadas ortogonales.
4. Consideremos una superficie esférica de radio a embebida en el espacio euclídeo 3D (2-esfera).
 - a) A partir de la ecuación de la esfera en coordenadas cartesianas (x, y, z) , hallar la expresión para el intervalo ds^2 sobre la superficie de la esfera en estas coordenadas. Identificar los coeficientes de la métrica.
 - b) Escribir el intervalo en un nuevo sistema de coordenadas (ρ, ϕ) que se obtiene del anterior a partir de la transformación $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$. Identificar los nuevos coeficientes de la métrica.
 - c) ¿Qué ocurre cuando $x^2 + y^2 = a^2$ ó $\rho = a$?
 - d) Aunque en el espacio euclídeo 3D las coordenadas (x, y) y (ρ, ϕ) tienen un significado geométrico claro, podrían haberse elegido para mapear la superficie de la esfera sin necesidad alguna de considerar la existencia de una variedad de mayor dimensión donde la 2-esfera esté embebida. Dibujar las curvas coordenadas sobre la esfera (considerar el casquete superior) para ambos sistemas de coordenadas.
 - e) Considerar la circunferencia sobre la esfera definida por $\rho = R$. Trabajando en coordenadas (ρ, ϕ) calcular el perímetro, la distancia desde el centro al perímetro y el área del círculo encerrado. Analizar los resultados.
 5. Demostrar las siguientes afirmaciones.

a) $\partial_c g_{ab} = \Gamma^d_{ca} g_{db} + \Gamma^d_{cb} g_{da}$.

b) Si $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$ (en cuyo caso se dice que la variedad tiene torsión cero), entonces se satisface la siguiente relación entre la conexión afín y la métrica:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}).$$

c) $g_{ab;c} \equiv \nabla_c g_{ab} = 0$ en todos los sistemas de coordenadas.

6. Consideremos coordenadas polares (ρ, ϕ) en el espacio euclídeo 2D (el plano).

a) Escribir la regla de transformación de coordenadas polares a cartesianas y viceversa.

b) Obtener los vectores base coordenados $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi$ en función de $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$. Dibujar $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi$ en distintos puntos del plano. Calcular sus derivadas.

c) Hallar los coeficientes de la métrica g_{ab} en coordenadas polares a partir de los vectores base coordenados. Calcular los coeficientes g^{ab} .

d) Calcular todas las componentes de la conexión afín Γ^a_{bc} en coordenadas polares a partir de *i)* las derivadas de los vectores base coordenados, *ii)* de la métrica, y *iii)* del lagrangiano $\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$.

e) Hallar la expresión para la divergencia de un vector en coordenadas polares. Comparar con el resultado conocido.

f) Escribir las ecuaciones geodésicas en coordenadas polares. Resolver para hallar $\rho(\phi)$. Interpretar el resultado.

7. Calcular todas las componentes independientes del tensor de Riemann para una 2-esfera de radio a en coordenadas esféricas, $ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$. Mostrar que el escalar de curvatura vale $R = 2/a^2$. Calcular R para un cilindro.

8. Mostrar que el operador Laplaciano ($\nabla^2 = g^{ij} \partial_i \partial_j$) no es invariante de Lorentz, mientras que el operador D'Alembertiano ($\square = \partial^\nu \partial_\nu = g^{\nu\sigma} \partial_\sigma \partial_\nu$) si lo es.