Introducción a la Astrofísica de Agujeros Negros

Práctica 2: física en espacios curvos, ecuaciones de Einstein.

1. **Límite newtoniano. I.** En ausencia de gravedad la métrica del espacio-tiempo es la de Minkowski. Diremos que en alguna región el campo gravitacional es débil si existen coordenadas x^μ en las que la métrica toma la forma $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $\left|h_{\mu\nu}\right| \ll 1$. Supondremos además que en estas coordenadas la métrica es *estacionaria*, es decir que $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$. Consideremos una partícula que se mueve a velocidades bajas, o sea que para $i = 1, 2, 3$ se satisface que $dx^i/d\tau \ll dx^0/d\tau$ con $x^0 = ct$.

   a) Mostrar que para que en este límite la ecuación de movimiento de una partícula libre se reduzca a la expresión newtoniana, entonces $g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2$, donde Φ es el potencial gravitatorio.

   b) Calcular el orden de magnitud de la corrección en i) la superficie de la Tierra, ii) la superficie del Sol, iii) la superficie de una estrella de neutrones.

   c) Desde las cercanías de un objeto de masa M se emiten pulsos de luz a una frecuencia $\nu^{(e)}$ que son recibidos por un observador lejano. En el límite de campo débil, estimar el corrimiento $\Delta\nu/\nu^{(e)} = (\nu^{(r)} - \nu^{(e)})/\nu^{(e)}$, donde $\nu^{(r)}$ es la frecuencia de recepción de los pulsos medida por el observador lejano. Calcular su orden de magnitud para un pulso emitido cerca de la superficie el Sol y recibido en la Tierra.

2. **Límite newtoniano. II.** Considerar las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica, $R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, con $\kappa = -8\pi G/c^4$.

   a) Bajo las mismas suposiciones que en el ejercicio anterior, hallar la ecuación para el potencial gravitacional newtoniano en el límite de campo débil. Interpretar.

   b) Estimar una cota superior para Λ a partir de observaciones en el sistema solar.

   c) Moviendo el término con la constante cosmológica al lado derecho de las ecuaciones de Einstein, puede interpretarse $\tilde{T}_{\mu\nu} = \rho_{\text{vac}} c^2 g_{\mu\nu}$ con $\rho_{\text{vac}} = \Lambda c^2/8\pi G$ como el tensor de energía-momento del "vacío". Si la densidad del medio intergaláctico es $\sim 10^{-27}$ kg m^{-3}, determinar si un valor de Λ cercano al de la cota hallada antes tendría efectos observables a escala cosmológica.

3. **Límite newtoniano. III.** Bajo las mismas suposiciones y aplicando el resultado del Ejercicio 1, hallar el valor de la constante κ en las ecuaciones de Einstein sin constante cosmológica, $R_{\mu\nu} - (1/2)Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, comparando resultados con el límite newtoniano. Ayuda: obtener dos expresiones aproximadas para R_{00} a partir de su definición en función de la conexión afín y de las ecuaciones de Einstein. Puede ser útil escribir las ecs. de Einstein en función de la traza de $T_{\mu\nu}$.

4. **Cantidades conservadas.**

   a) Para una partícula masiva, mostrar que la ec. de la geodésica puede escribirse como $p^{\mu}_{;\lambda} p^{\lambda} = 0$, donde $p^{\mu} = m\, u^{\mu} = m\, dx^{\mu}/d\tau$ es el cuadrimpulso. Notar que aunque u^{μ} no está definido para partículas sin masa, a estas aún se les puede asociar un cuadrimpulso, así que esta forma de la ecuación es válida también para geodésicas nulas.

   b) Aplicando el resultado anterior, mostrar que para una partícula masiva

   $$m\, \frac{dp_{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta,\mu}\, p^{\alpha} p^{\beta}.$$

   Concluir que si la métrica es independiente de la coordenada x^{μ}, entonces p_{μ} se conserva a lo largo de la línea de mundo de la partícula.

   c) Mostrar que si un vector ξ^{μ} satisface la *ecuación de Killing*

   $$\nabla_{\beta}\xi_{\alpha} + \nabla_{\alpha}\xi_{\beta} = 0,$$

   entonces $p^{\alpha}\xi_{\alpha}$ = constante a lo largo de una geodésica. Esta es una forma de independiente de las coordenadas de escribir las leyes de conservación. La existencia de un vector de Killing implica la presencia de una simetría intrínseca en el espacio-tiempo.

5. El tensor de energía-momento para una distribución de polvo (fluido perfecto sin presión) es $T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu}$, donde ρ es la densidad propia de masa y $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$.

   a) Imponiendo que $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$, obtener la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento para el polvo.

   b) Mostrar que la línea de mundo $x^{\mu}(\tau)$ de una partícula de polvo obedece la ecuación de la geodésica.