

# Introducción a la Astrofísica de Agujeros Negros

## Práctica 3: agujeros negros.

### Espacio-tiempo de Schwarzschild.

- Deflexión de la luz.** Un fotón con  $p_t = E$  y  $p_\phi = -L$  se propaga en el espacio-tiempo de Schwarzschild acercándose a la masa  $M$  desde  $r \rightarrow \infty$ , como se muestra en la Fig. 1.

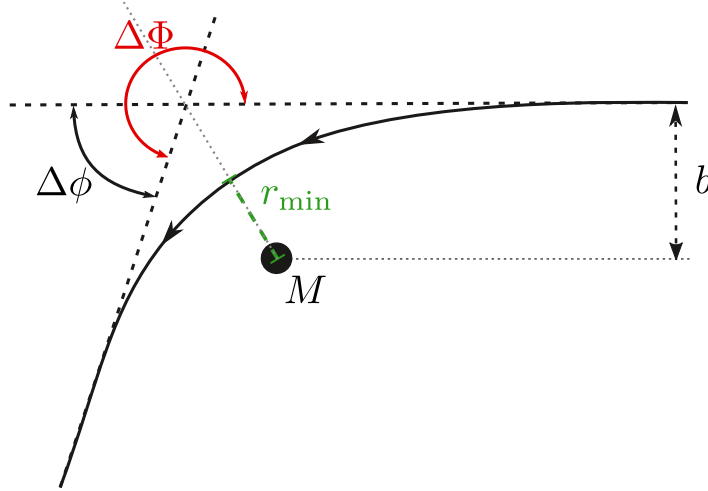


Figura 1: Deflexión de la trayectoria de un fotón cerca de un objeto compacto.

- Demostrar que el ángulo de deflexión vale

$$\Delta\phi = -\pi + 2 \int_0^{u_{\max}} \left( \frac{1}{b^2} - u^2 + 2MGu^3 \right)^{-1/2} du, \quad (1)$$

donde  $u = 1/r$  y  $b \equiv L/E$  es el parámetro de impacto.

- Resolver la integral en el límite  $2MG/r \ll 1$  y mostrar que

$$\Delta\phi \approx \frac{4MG}{b}. \quad (2)$$

¿Cuál es la máxima deflexión posible causada por el Sol sobre la trayectoria de un fotón?

- Calcular y comparar el tiempo propio transcurrido entre dos eventos  $A = (t_A, r_0, 0, 0)$  y  $B = (t_B, r_0, 0, 0)$  para:

- un observador fijo en  $r_0$ ,
- un observador en órbita circular de radio  $r_0$ ,
- un observador en caída libre radial que parte de  $r_0$  en  $t_A$  y regresa a  $r_0$  en  $t_B$ .

3. Considerar el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ .

- Mostrar que  $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$  y  $R^\mu = (0, 0, 0, 1)$  son vectores de Killing. Calcular las cantidades conservadas asociadas.
- Mostrar que el momento angular total  $L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2 / \sin^2 \theta$  es constante a lo largo de una geodésica.
- Una hipersuperficie  $\Sigma$  puede definirse mediante la condición  $f(x) = \text{constante}$  para alguna función  $f$ . El gradiente  $\partial_\mu f$  es normal a  $\Sigma$ ; si el vector normal es nulo (i.e.  $(\partial^\mu f)(\partial_\mu f) = 0$ ) se dice que la hipersuperficie es *nula* (notar que en este caso el vector normal también es tangente a  $\Sigma$ , ya que un vector nulo es ortogonal a sí mismo). Mostrar que el horizonte de eventos en el espacio-tiempo de Schwarzschild (o sea la hipersuperficie  $r = 2GM/c^2$ ) es una hipersuperficie nula.
- Si un vector de Killing  $\chi^\mu$  es nulo (i.e.  $\chi^\mu \chi_\mu = 0$ ) sobre una hipersuperficie nula  $\Sigma$ , se dice que  $\Sigma$  es un *horizonte de Killing* de  $\chi^\mu$ . Mostrar que el horizonte de eventos en el espacio-tiempo de Schwarzschild es un horizonte de Killing para  $K^\mu$ .

### Espacio-tiempo de Kerr.

4. Ergosfera. Límite estático.

- Se define la velocidad angular coordenada de un observador (o cualquier partícula) como  $\Omega = d\phi/dt$ , que coincide con la velocidad angular con respecto a un segundo observador en el infinito. Mostrar que para un observador con momento angular nulo (*zero angular momentum observer, ZAMO*) vale  $\Omega_{\text{ZAMO}} \equiv \omega = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$ . Escribir  $\omega$  en coordenadas de Boyer-Lindquist y comprobar que decae como  $\sim 1/r^3$ . Notar que este efecto, conocido como *arrastré de los sistemas inerciales*, existe en cualquier espacio-tiempo con  $g_{t\phi} \neq 0$ .
- Mostrar que dentro de la ergosfera no puede existir ningún observador con todas las coordenadas espaciales fijas.
- Considerar un observador con cuadrivelocidad  $u^\mu = u^t(1, 0, 0, \Omega)$  (notar que la trayectoria de este observador no será una geodésica). Mostrar que el valor de  $\Omega$  está restringido al intervalo  $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$ , donde

$$\Omega_{\pm} = \omega \pm \left( \omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Analizar los signos de  $\Omega_{\pm}$  dentro y fuera de la ergosfera y en el límite estático. Mostrar que en el horizonte externo  $r = r_+$  vale

$$\Omega_- = \Omega_+ = \Omega_H = \omega(r_+, \theta) = \frac{ac^3}{2GMr_+} = \frac{ac}{r_+^2 + a^2}. \quad (4)$$

Este valor es independiente de  $\theta$  y se suele llamar “velocidad angular del agujero negro” o “velocidad angular del horizonte”, en el sentido de que un observador en  $r = r_+$  tiene velocidad angular  $\Omega = \Omega_H$  respecto de un segundo observador en el infinito.

**5. Mecanismo de Penrose.** Una partícula con componente del cuadrimpulso  $p_t = E$  ingresa en la ergosfera de un agujero negro de Kerr donde se separa en dos partes. La parte “A” escapa de la ergosfera siguiendo una trayectoria geodésica; la parte “B” es inyectada con  $p_t^{(B)} < 0$  y cae hacia el agujero negro cruzando el horizonte de eventos externo en  $r_+ = GM + \sqrt{G^2M^2 - a^2}$ .

- a) Demostrar que  $p_t^{(A)} > E$ , por lo que la parte que sale de la ergosfera tiene más energía que la partícula inicial.
- b) Mostrar que la partícula “B” tiene momento angular  $L^{(B)} = -p_\phi^{(B)} < 0$ . Concluir, entonces, que la masa  $M$  y el momento angular  $J = aM$  del agujero negro *disminuyen* como consecuencia de la caída de la partícula “B”.
- c) Mostrar que la máxima variación posible en el momento angular del agujero negro es  $\delta J = \delta M / \Omega_H$ , donde  $\Omega_H = a / (r_+^2 + a^2)$  es la velocidad angular de un observador con  $r$  y  $\theta$  fijos en  $r_+$ .
- d) El área del horizonte de eventos en el espacio-tiempo de Kerr es

$$A = 4\pi (r_+^2 + a^2). \quad (5)$$

Definimos la *masa irreducible* como

$$M_{\text{irr}}^2 = \frac{A}{16\pi G^2} = \frac{1}{2} \left[ M^2 + \sqrt{M^4 - (J/G)^2} \right]. \quad (6)$$

Mostrar que  $\delta M_{\text{irr}} > 0$ .

- e) Probar que:

$$M^2 = M_{\text{irr}}^2 + \frac{J^2}{4GM_{\text{irr}}^2} \geq M_{\text{irr}}^2, \quad (7)$$

por lo que la máxima energía que es posible extraer del agujero negro antes de detener por completo su rotación es  $\Delta M = M - M_{\text{irr}}$ . ¿Qué porcentaje de  $M$  representa para un agujero negro de Kerr extremo?

### Espacio-tiempo de Reissner-Nordström.

**6. Trayectoria de una partícula cargada.**

- a) En un espacio-tiempo curvo, la ecuación de movimiento de una partícula cargada en presencia de campo electromagnético es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \epsilon F^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (8)$$

donde  $\epsilon \equiv q/m$ ,  $q$  y  $m$  son la carga y la masa de la partícula, respectivamente, y  $F_{\mu\nu}$  es el tensor de Maxwell (que es antisimétrico). Demostrar que esta ecuación puede obtenerse a partir del Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \epsilon A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (9)$$

Aquí  $A_\mu$  es el cuadripotencial a partir del que puede calcularse el tensor de Maxwell como  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ .

b) Considerar el espacio-tiempo de Reissner-Nordström:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (10)$$

donde  $\Delta = (r - r_+)(r - r_-)$  y  $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$  son los radios del horizonte externo e interno, respectivamente. Por simetría, la única componente no nula del tensor de Maxwell es  $F_{tr} = -F_{rt} = Q/r^2$ .

Calcular las ecuaciones de movimiento para una partícula cargada en trayectoria radial:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r}{\Delta} (\gamma r - \epsilon Q) \quad (11)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{1}{r} [(\gamma r - \epsilon Q)^2 - \Delta]^{1/2}, \quad (12)$$

donde  $\gamma = E/m$  es una constante.

- c) Mostrar que una partícula neutra no puede pasar más allá de cierto  $r < r_{\min}$  ya que es repelida por una barrera de potencial creada por la carga en el origen.
- d) Calcular la aceleración radial  $d^2r/d\tau^2$  y demostrar que independientemente del signo de  $\epsilon$ , la singularidad es repulsiva (i.e.  $d^2r/d\tau^2 \rightarrow \infty$  para  $r \rightarrow 0$ ) si  $|\epsilon| < 1$ .