Introducción a la Astrofísica de Agujeros Negros

Práctica 4: termodinámica de agujeros negros.

1. **Gravedad superficial.** Consideremos un vector de Killing χ^μ cuyo horizonte de Killing (ver ejercicio 3 de la Práctica 3) es la hipersuperficie nula Σ. Como χ^μ es normal a Σ, sobre esta hipersuperficie obedece la ecuación de la geodésica,

$$\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu = -\kappa \chi^\nu, \tag{1}$$

donde el término del lado derecho aparece porque la geodésica no tiene que estar necesariamente parametrizada mediante un parámetro afín. El parámetro κ es la *gravedad superficial*, que es constante sobre Σ.

a) Probar que

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} \left(\nabla_\mu \chi_\nu\right) \left(\nabla^\mu \chi^\nu\right), \tag{2}$$

donde el lado derecho está evaluado sobre el horizonte de Killing.

Nota: multiplicar χ^μ por una constante real da otro vector de Killing nulo sobre Σ, así que el valor de κ es en principio arbitrario. En un espacio-tiempo estático y asintóticamente plano, el horizonte de eventos es un horizonte de Killing para el vector de Killing K^μ asociado con las traslaciones temporales. Este vector puede normalizarse como $K^\mu K_\mu(r \to \infty) = 1$, lo que fija el valor de κ. Si el espacio-tiempo es estacionario, χ^μ será una combinación lineal de los vectores de Killing asociados a rotaciones y traslaciones temporales, pero fijar la normalización de K^μ también fija la combinación lineal, así que el valor de κ es nuevamente único.

b) En un espacio-tiempo estático y asintóticamente plano, κ es la aceleración de un observador estático cerca del horizonte, medida por otro observador estático en el infinito. Seguir los siguientes pasos para probarlo.

- Un observador estático es aquel cuya cuadrivelocidad es proporcional al vector de Killing K^μ, $K^\mu = V(x) U^\mu$. Mostrar que $V = \sqrt{K^\mu K_\mu}$. A la función V se la suele llamar el *factor de redshift*. £Por qué?
- Probar que el módulo de la cuadriaceleración se puede escribir como $a = \sqrt{a^\mu a_\mu} = (1/V) \left(\nabla^\mu V \nabla_\mu V\right)^{1/2}$. O sea que $a \to \infty$ sobre el horizonte de Killing: hace falta una aceleración "infinita" para mantener al observador estático allí.
- Un observador en el infinito, sin embargo, medirá una aceleración igual a $a_\infty = Va = \left(\nabla^\mu V \nabla_\mu V\right)^{1/2}$ evaluado en el horizonte. Probar que $a_\infty = \kappa$.
- Mostrar que para un agujero negro de Schwarzschild $\kappa = (4GM)^{-1}$. Notar que esto implica que la gravedad superficial *decrece* si la masa aumenta.

2. **Leyes de la Mecánica de Agujeros Negros.**

   a) Utilizando los resultados del ejercicio 5 de la Práctica 3, obtener la gravedad superficial y la temperatura de un agujero negro de Kerr. Verificar que κ coincide con la definida en la ec. 2 para $\chi^\mu = K^\mu + \Omega_{\rm H} R^\mu$, donde K^μ y R^μ son los vectores de Killing asociados con las traslaciones temporales y las rotaciones, respectivamente.

   b) Calcular la gravedad superficial, la temperatura y la entropía de un agujero negro de Reissner-Nordström. Mostrar que para $M \to Q$ la temperatura tiende a cero pero la entropía no.

   c) Mostrar que el calor específico $C = \partial E/\partial T = T\,\partial S/\partial T$ de un agujero negro de Schwarzschild es negativo. Esto implica que se enfría cuando absorbe energía y aumenta su temperatura cuando radía.

   d) Un reservorio térmico es un sistema que puede entregar o absorber cualquier cantidad de calor sin variar su temperatura; tiene por lo tanto un calor específico infinito. Un agujero negro con temperatura $T_{\rm BH}$ inmerso en un reservorio térmico a una temperatura $T_r < T_{\rm BH}$ radiará y por lo tanto aumentará su temperatura. El proceso de evaporación del agujero negro no se detendrá ya que la temperatura T_r del reservorio es, por definición, constante. Por otro lado, un agujero negro inmerso en un reservorio térmico de temperatura $T_r > T_{\rm BH}$ absorberá energía y se enfriará. También en este caso el proceso continuará indefinidamente. En ninguno de los dos casos se alcanzará el equilibro térmico.

   Un agujero negro puede alcanzar el equilibrio térmico con el ambiente siempre que este tenga un calor específico *finito*. Para un agujero negro de masa M, hallar el rango de valores del calor específico C_r del reservorio para el que es posible que se alcance el equilibro termodinámico. Recordar que el estado de equilibrio es el de mayor entropía a una dada energía.

   e) Dos agujeros negros de Schwarzschild de masas M_1 y M_2 se fusionan, siendo el estado final del sistema un único agujero negro de Schwarzschild de masa M. Encontrar una cota para la energía radiada en el proceso en función de M_1 y M_2. Evaluar para el caso particular $M_1 = M_2$.

   f) Dos agujeros negros de Kerr con masa y momento angular (M_1, J_1) y (M_2, J_2) se encuentran incialmente en reposo en una configuración axisimétrica, es decir que sus ejes de rotación están alineados en la dirección que los une. Si los dos agujeros negros se fusionan, el agujero negro que resulta debe tener $J = J_1 + J_2$ ya que el momento angular no puede radiarse en un espacio-tiempo axisimétrico (ver Wald, “General Relativity”, Problema 6, Capítulo 11). Derivar una cota máxima para la energía radiada en el proceso. Comprobar que es más grande cuando J_1 yJ_2 son antiparalelos.

3. **Radiación de Hawking.**

a) Se puede hacer una estimación muy cruda de la temperatura de Hawking de un agujero negro de Schwarzschild de masa M de la siguiente manera. Considerar un par de partícula virtuales momentáneamente en reposo a una distancia δr del horizonte de eventos. Si τ es el tiempo propio que le toma a la partícula con energía negativa llegar al horizonte, entonces debe cumplirse que $E\tau \sim \hbar$; o sea que $E \sim \hbar/\tau$ es una estimación de la energía de la partícula con energía positiva que escapa. Sin embargo, un observador en el infinito medirá un valor distinto, E_∞, por lo que temperatura del agujero negro será $kT_{\rm BH} \sim E_\infty$. Calcular el valor de $T_{\rm BH}$ que se obtiene de esta manera y comparar con el valor que arroja el cálculo detallado de Hawking en teoría de campos en espacios curvos.

b) Calcular la temperatura de Hawking para agujeros negros de masa $M = 10^6 M_\odot$, $M = M_\odot$ y $M = m_{\rm P}$, donde $m_{\rm P} = \sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{-5}$ g es la masa de Planck. Estimar el tiempo que tardan estos agujeros negros en evaporarse.

c) Estimar la longitud de onda típica de los fotones radiados por un agujero negro de masa M y compararla con el tamao del agujero negro, dado por su radio de Schwarzschild.

d) La temperatura de un agujero negro de masa suficientemente pequea puede ser tan alta como para producir bariones por radiación de Hawking. Estimar la masa M del agujero negro necesaria para producir protones y comparar el radio de Schwarzschild correspondiente con el tamao del protón (su longitud de onda Compton).