

Resumen de Electromagnetismo

Los fenómenos electromagnéticos pueden describirse completamente si se especifican en todo el sistema físico en estudio los cuatro campos siguientes: campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$, vector desplazamiento $\vec{D}(\vec{r}, t)$, inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ y campo magnético $\vec{H}(\vec{r}, t)$. Las fuentes de estos campos son la densidad de carga $\rho(\vec{r}, t)$ y la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$. Las leyes que gobiernan la variación en el espacio y el tiempo de los campos electromagnéticos son las ecuaciones de Maxwell (en el sistema

MKS)

SI

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \partial \vec{D} / \partial t + \vec{J}$$

(1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

que deben ser complementadas con relaciones constitutivas que ligan los campos \vec{B} y \vec{D} con \vec{H} y \vec{E} ; en su forma más simple para medios lineales, ^{en reposo} isotropos, homogéneos y de respuesta local en tiempo y espacio estas relaciones son

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

(2)

donde las constantes ϵ y μ son la permitividad

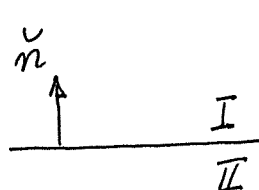
eléctrica y ^{permeabilidad} magnética. En medios conductores en los que la presencia de campos genera una densidad de corriente eléctrica tendremos que obtener la relación que liga \vec{J} con los campos; en los casos más simples está dada por la ley de Ohm en la forma

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3)$$

donde σ es la conductividad. Por otro lado la densidad de carga $\tilde{\rho}$ y la densidad de corriente \vec{J} deben satisfacer la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (4)$$

Trabajando con las ecuaciones de Maxwell se pueden obtener las condiciones de contorno para los campos de dos medios adyacentes I y II



$$\begin{aligned} B_N^I - B_N^{II} &= 0 \\ D_N^I - D_N^{II} &= \tilde{\sigma} \\ \vec{E}_T^I - \vec{E}_T^{II} &= 0 \\ \vec{H}_T^I - \vec{H}_T^{II} &= \vec{K} \wedge \hat{n} \end{aligned} \quad (5)$$

donde los subíndices T y N indican componentes tangencial y normal a la superficie de separación.

(tomando el versor normal "entrando" en el medio I)
 $\vec{\sigma}$ es la densidad superficial de carga y \vec{K} es la densidad superficial de corriente.

Los efectos mecánicos de los campos sobre las partículas cargadas (bajo condiciones no relativistas) pueden tratarse en el marco de la mecánica clásica; la fuerza sobre las mismas está dada por la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \tag{6}$$

De las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar teoremas de conservación de energía e impulso. La densidad de energía electromagnética en un medio lineal ^(sin dispersión ni disipación, para campos monocrom. y sin disipac.) es

$$E = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \tag{7}$$

y el flujo de energía por unidad de área viene dado por el vector de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} \tag{8}$$

Utilizando las dos ecuaciones de Maxwell homogéneas se pueden introducir potenciales escalar Φ y vectorial \vec{A} tales que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (9)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

La elección de ϕ y \vec{A} no es única; se obtienen los mismos campos si se hace una transformación de contraste (cambio de "gauge") usando potenciales ϕ' y \vec{A}' relacionados con ϕ y \vec{A} mediante una función escalar \mathcal{K} :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \mathcal{K} \quad (10)$$

$$\phi' = \phi - \partial \mathcal{K} / \partial t$$

Debido a esta libertad se pueden imponer condiciones a los potenciales; los gauges más usados son el gauge de Coulomb en el que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (11)$$

y el de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

La regla de transformación de los campos cuando son observados en dos sistemas inerciales K y K' , donde K' se mueve respecto a K con velocidad uniforme \vec{v} está dada por:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \gamma (\vec{E} + c \vec{\beta} \wedge \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \vec{\beta} \\ \vec{B}' &= \gamma (\vec{B} - \vec{\beta} \wedge \frac{\vec{E}}{c}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \vec{\beta}\end{aligned}\quad (13)$$

donde

$$\vec{\beta} = \vec{v}/c \quad (14)$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

Si $v \ll c$ estas relaciones toman la forma:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (15)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}$$

Uno de los fenómenos característicos del Electromagnetismo y que está incluido en las ecuaciones de Maxwell es la propagación de ondas; su existencia se puede entender del hecho de que un campo magnético variable en el tiempo produce un campo eléctrico, y un campo eléctrico variable produce un campo magnético. En un medio homogéneo ^{no dispersivo} y sin fuentes \vec{j} y \vec{J} (suponiendo $\sigma = 0$), los campos eléctrico \vec{E} y de inducción magnética \vec{B} obedecen a las ecuaciones

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

que son ecuaciones de onda con velocidad de propagación

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (17)$$

Para el vacío resulta

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c \quad (18)$$

Si el medio es conductor o la respuesta del mismo no es local en el tiempo resultan permitividades ϵ y μ dependientes de la frecuencia, y la relación de dispersión para una onda de vector de onda \vec{k} y frecuencia ω es

$$\epsilon(\omega)\mu(\omega)\omega^2 = k^2, \quad (\sigma=0) \quad (19)$$

$$\epsilon\mu\left(1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon}\right)\omega^2 = k^2$$

Al tener en general $\epsilon(\omega)$ una parte real y una imaginaria, se tendrán además de la dispersión fenómenos de absorción o disipación.

Otro fenómeno muy importante en Electromagnetismo es el de radiación. Si se considera por ejemplo una partícula cargada en un movimiento arbitrario en el vacío, la resolución de las ecuaciones de Maxwell da que se pueden poner los campos como suma de dos términos:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_I(\vec{r}, t) + \vec{E}_R(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_I(\vec{r}, t) + \vec{B}_R(\vec{r}, t)$$
(20)

con $\vec{E}_I \perp \vec{B}_I$ y $\vec{E}_R \perp \vec{B}_R$; \vec{E}_I, \vec{B}_I son los campos de inducción que decaen como $\frac{1}{R^2}$ al alejarse de la carga mientras que los campos de radiación \vec{E}_R, \vec{B}_R , decaen más lentamente, como $(1/R)$; si se calcula con estos últimos el flujo de energía a través de una esfera centrada en la carga éste resulta independiente del radio de la esfera. Los campos de radiación son nulos si la partícula no está acelerada.

Los sistemas de unidades más usados en la literatura son el MKS^(SI) y el Gaussiano. En el libro de Jackson, "Classical Electrodynamics" en el apéndice sobre unidades, hay una tabla de conversión. En la página siguiente reproduzco parte de la tabla; reemplazando en ambos miembros de una ecuación válida en el sistema Gaussiano los símbolos que están bajo "Gauss" por los que están bajo "MKS"^(SI) se obtiene la ecuación válida en el sistema MKS.

En el MKSA las unidades básicas son Kg, m, sec, ampere mientras que en el gaussiano las unidades básicas son g, cm, sec.

Para distribuciones de carga y corriente acas-
das espacialmente e independientes del tiempo
se puede hacer un desarrollo multipolar
fuera del volumen que contiene a la ~~carga~~
fuente con términos que decaen cada vez más
rápidamente. Para el potencial electrostático
 $\phi(\vec{r})$ se tiene

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right]$$

donde el primer término es el monopolar, el 2°
el dipolar y el que sigue el cuadrupolar. Aquí
se está tomando el origen de coordenadas dentro
del volumen que contiene a la fuente. Para el
vector potencial producido por corrientes estacionarias
se tiene

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \right];$$

el campo magnetostático no tiene término monopolar,
y \vec{B} decae, para fuentes en volúmenes finitos, como $1/r^3$
o más rápidamente.

Cuando las fuentes varían como $e^{-i\omega t}$, si se con-
sideran distancias fuente-observador mucho meno-
res que la longitud de onda ($\lambda = 2\pi c/\omega$), se puede
hacer un desarrollo multipolar parecido, con algu-
nas diferencias. Mientras que si la distancia
fuente-observador es mucho mayor que λ se
tienen campos de radiación, en los que tanto
 \vec{E} como \vec{B} decaen como $1/r$.

Gauss

MKS (SI)

c

$$1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$\vec{E} (\phi)$

$$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{E} (\phi)$$

$\vec{J} (\tilde{\rho})$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{J} (\tilde{\rho})$$

$\vec{B} (\vec{A})$

$$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \vec{B} (\vec{A})$$

σ

$$\sigma / (4\pi\epsilon_0)$$

ϵ

$$\epsilon/\epsilon_0$$

μ

$$\mu/\mu_0$$

MKSA

Gaussiana
3 in lugar de 2.99792...

I

ampere

$$3 \cdot 10^9$$

statampere

Q

coulomb

$$3 \cdot 10^9$$

statcoulomb

ϕ, V

volt

$$\frac{1}{300}$$

statvolt

E

volt/m

$$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$$

statvolt/cm

B

tesla

$$10^4$$

gauss

H

ampere $\frac{-\text{vuelta}}{m}$

$$4\pi \cdot 10^{-3}$$

oersted

σ

mho/m

$$9 \cdot 10^9$$

1/sec

I - Consideraciones generales sobre la teoría de plasmas

Concepto de plasma - Longitud de apantallamiento de Debye - Respuesta colectiva y respuesta individual

Un plasma es un fluido de partículas cargadas; éste puede presentar una densidad de carga no nula (por ejemplo los electrones de conducción en un metal) o ser cuasi-neutro (por ejemplo un gas parcial o totalmente ionizado o un líquido conductor); trataremos solamente el 2º caso.

¿Cuándo un conjunto de partículas cargadas puede considerarse un plasma? Los límites que se consideran son variables según la literatura. Nosotros pondremos como primera condición que la densidad de las partículas cargadas sea suficientemente grande como para poder usar una aproximación de fluido; o sea que sea posible tomar elementos de volumen que siendo pequeños contengan gran número de partículas cargadas; entendemos por pequeños que las dimensiones lineales sean mucho menores que las longitudes características de las variaciones de las magnitudes macroscópicas del sistema (incluyendo los campos medios).

Para un fluido formado por partículas no cargadas ^{para poder tratarlo como tal} además de lo anterior se debe cumplir la condición de que el camino libre medio entre colisiones resulte muy pequeño frente a las dimensiones lineales características. Si el camino libre medio es del orden o mayor que la escala de longitudes el gas se comporta como una colección de partículas individuales. En el caso de partículas no cargadas la interacción entre las mismas es de corto alcance (interacciones electromagnéticas entre multipolos de orden superior a uno). En el caso de plasmas la situación es diferente: dada la presencia de partículas cargadas las interacciones dominantes son de largo alcance. Una magnitud más apropiada que el camino libre medio para distinguir entre comportamiento colectivo y comportamiento individual es la longitud de Debye, cuya deducción e interpretación física daremos más adelante.

En un fluido se definen cantidades macroscópicas como densidad, temperatura, presión y velocidad de transporte de masa, que son promedio de cantidades microscópicas tales como impulso y energía cinética de las partículas. En la aproximación de fluido se obtiene un conjunto completo de ecuaciones diferenciales que vinculan las pro-

propiedades macroscópicas del sistema directamente unas con otras; en el caso de plasmas una peculiaridad es que, en estas ecuaciones deben incluirse los campos electromagnéticos medios.

Para comenzar con un ejemplo familiar, consideremos un gas ordinario no relativista confinado por las paredes de un recipiente. ^{que no permite el intercambio de energía} Si esperamos suficiente tiempo, las colisiones de las moléculas entre ellas y con las paredes del recipiente llevarán al sistema al equilibrio, en el cual la densidad es en todas partes la misma, las velocidades de las moléculas están distribuidas isotrópicamente y la energía se reparte entre las partículas de acuerdo con una ley bien determinada; más aún si el gas es una mezcla de dos especies de partículas la energía promedio por grado de libertad va a ser la misma para cada componente. Entonces, entre otras propiedades podemos atribuir al gas una temperatura que es proporcional a la energía media por grado de libertad y una presión que es proporcional a la energía media por unidad de volumen. ^{Ahora} ^{mas} Perturbamos ^{de modo que sea} levemente el equilibrio ^{es} posible subdividir el sistema en elementos de volumen cuyas dimensiones ^{son} ^{sean} grandes comparadas con el camino libre medio y pequeñas comparadas con la escala de longi-

tudes de la perturbación. En una primera aproximación podemos considerar al gas en cada elemento de volumen como estando en equilibrio termodinámico de modo que es posible definir en el elemento una densidad, una temperatura y una presión; estas cantidades no serán ahora constantes en todo el volumen del gas sino que variarán punto a punto. Además, superpuesta a la agitación térmica de las partículas individuales puede haber un movimiento conjunto del gas descrito por una velocidad de transporte de masa que nuevamente podrá ser diferente en diferentes puntos. En una segunda aproximación consideraremos los pequeños apartamientos de la situación de equilibrio termodinámico debido al intercambio de partículas entre elementos vecinos que pueden tener temperaturas diferentes o pueden moverse con diferentes velocidades; estos intercambios dan lugar a fenómenos tales como conducción de calor y viscosidad. En el caso de un gas ordinario tendremos una ecuación de conservación de masa, una ecuación de movimiento o conservación de impulso (llamada también ecuación de momentos, ecuación de Navier-Stokes o de Euler si no hay viscosidad), una ecuación de estado y una ecuación de conservación de energía o transporte de calor.

En el caso del plasma, como dijimos antes, hay que tener en cuenta los campos electromagnéticos medios. ^{por lo que hay que agregar las ecs. de Maxwell} Para un fluido ionizado los campos electromagnéticos actúan tanto en los electrones como en los átomos ionizados produciendo efectos dinámicos que incluyen movimiento global del mismo fluido, ~~estas ^{corrientes eléctricas} ~~movimiento de masas~~~~ a su vez produce modificaciones en los campos; de modo que resulta un complicado sistema acoplado no lineal de campos y materia.

* y corrientes eléctricas debido a la diferente velocidad de elect. y iones;

Longitud de Debye - Vamos a analizar las condiciones bajo las cuales las fuerzas electromagnéticas entre ~~iones~~ ^{partículas cargadas} aseguran el comportamiento colectivo de un gas ionizado - Para comprender el significado físico del parámetro que describe las fuerzas electrostáticas es conveniente comenzar considerando específicamente el caso de hidrógeno totalmente ionizado; supondremos que el gas es neutro (o sea constituido por igual número de electrones que de protones), que la recombinación es despreciable y que está originalmente confinado en cierto volumen por un recipiente que por simplicidad supondremos esférico de radio R . Las colisiones entre partículas llevan al sistema a un equilibrio térmico en el cual la densidad es uniforme y los electrones y protones tienen la misma energía cinética media.

Supongamos ahora que removemos repentinamente las paredes del recipiente; si no fuera por las cargas eléctricas de los electrones y de los iones, los electrones debido a su mayor velocidad se difundirían mucho más rápido que los protones. Sin embargo la separación de cargas resultante produce campos eléctricos que se oponen a esta difusión diferencial y mantienen la nube de electrones y la nube de protones casi juntas.

La efectividad del campo eléctrico en prevenir la separación de electrones y protones se expresa usualmente en términos de una longitud, llamada longitud de Debye. Para hacer una estimación de esta separación supongamos que mientras los electrones se difunden a una esfera de radio $(R+h)$ manteniendo una densidad uniforme los protones no se difunden apreciablemente. Si la densidad ^{numérica} de los protones para $r < R$ es n , la densidad ^{numérica} de los electrones para $r < (R+h)$ será

$$\frac{\frac{4\pi}{3} R^3}{\frac{4\pi}{3} (R+h)^3} n \approx \left(1 - \frac{3h}{R}\right) n \quad (1)$$

con lo que la densidad eléctrica resulta (llamando $(-e)$ a la carga del electrón)

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} ne - \left(1 - \frac{3h}{R}\right) ne = \frac{3h}{R} ne & r < R \\ -\left(1 - \frac{3h}{R}\right) ne & R < r < R+h \end{cases} \quad (2)$$

Para tener una idea de la magnitud del campo eléctrico resultante, calculemos su valor máximo que se da para $r = R$ y vale

$$E.(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^3}{3} \frac{3neh}{R} \frac{1}{R^2} = \frac{neh}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Para obtener una estimación de h observemos que la energía electrostática resultante es creada a expensas de la energía cinética del movimiento aleatorio de los electrones; por lo tanto la densidad de energía electrostática debe ser menor que la energía térmica por unidad de volumen de los electrones; o sea

$$\frac{\epsilon_0 \bar{E}^2}{2} < \epsilon_{T,e} \quad (4)$$

$$\frac{n^2 e^2 h^2}{2\epsilon_0} < \frac{3}{2} n k T$$

lo que da como estimación para h

$$h < \sqrt{\frac{3kT\epsilon_0}{ne^2}} \quad (5)$$

Aparte de un factor numérico del orden de la unidad esta expresión coincide con la longitud de apantallamiento de Debye λ_D que definiremos en forma más precisa enseguida. Entonces, en el ejemplo de un gas neutro de protones y electrones en expansión, podemos decir que la nube de electrones se difunde más que la nube de protones a lo sumo en una distancia del orden de la longitud de Debye.

Es interesante ver que para $r < R$, la diferencia de densidad de protones y de electrones, dividida por la densidad original de e u de ellos es proporcional a h/R

$$\frac{n_p - n_e}{n} \approx \frac{3h}{R} ; \tag{6}$$

por otro lado la región en el borde donde hay diferencia apreciable de densidades es del orden de h .

La longitud de Debye como distancia de apantallamiento.

En un sistema de partículas cargadas, globalmente neutro, en una escala de longitudes muy corta debemos describir el comportamiento en términos de una sucesión de colisiones Coulombianas, pero en una escala mayor los electrones tienden a cooperar; si una sobrecarga positiva aparece en cualquier

hasta
11/8/11
20/8/15

lugar, los electrones (que son los que tienen menos inercia) se mueven rápidamente para neutralizarla; este comportamiento colectivo tiende a reducir la naturaleza de largo alcance de las interacciones entre partículas. Un electrón ^(ó un ión positivo) individual es, después de todo, una fluctuación local de densidad de carga. Los electrones de los alrededores son repelidos ^(ó atraídos) de tal forma que tienden a apantallar el campo Coulombiano del primer electrón ^(ión), transformándolo en una interacción de corto alcance.

La primera deducción del efecto de apantallamiento descrito más arriba fue dado por Debye en su teoría de los electrolitos. Nosotros supondremos aquí que tenemos una cierta densidad de electrones $n(\vec{r})$ en equilibrio térmico sobre un fondo uniforme de iones positivos de densidad n_0 ; si hay un potencial electrostático $\phi(\vec{r})$, la distribución espacial de los electrones estará dada por

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{(e\phi/kT)} \tag{7}$$

Si imaginamos una carga Q ubicada en el centro de esta distribución, tendremos que el potencial $\phi(\vec{r})$ debe satisfacer la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\tilde{\rho}(\vec{r})}{\epsilon_0} = -\frac{Q \delta(\vec{r})}{\epsilon_0} - \frac{n_0 e}{\epsilon_0} [1 - e^{(e\phi/kT)}] \tag{8}$$

Si $(e\phi/kT)$ se supone pequeño, la ecuación puede ser linealizada

$$\nabla^2 \phi - k_D^2 \phi = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}) \quad (9)$$

donde

$$k_D^2 = \frac{n_0 e^2}{kT \epsilon_0} \quad (10)$$

Una solución con simetría esférica de esta ecuación es

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-k_D r}}{r} \quad (11)$$

que muestra que en el equilibrio los electrones se distribuyen de forma de apantallar la carga Q en una distancia del orden de la longitud de Debye

$$\lambda_D = k_D^{-1} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{n_0 e^2}} \quad (12)$$

El balance entre energía ~~cinética~~ Térmica y energía electrostática determina la magnitud del radio de apantallamiento. Para la corona solar con una densidad del orden de 10^6 cm^{-3} y $T \sim 10^6 \text{ K}$ resulta $\lambda_D \sim 10 \text{ cm}$, mientras que para el material interestelar con $n \sim 1 \text{ cm}^{-3}$ y $T \sim 10^4 \text{ K}$ resulta $\lambda_D \sim 1000 \text{ cm}$.

*
? p. 9 →
Doyal
Standarden

→ según For. y Quelle corresponde a regiones H II y no a med. interestelar

Un plasma es un gas ionizado en el cual la longitud de apantallamiento de Debye es mucho menor que las longitudes características del sistema(L). Si se tiene en cambio lo contrario tendremos que el comportamiento colectivo implícito en un modelo de fluido se pierde completamente y nos quedarán unas pocas partículas moviéndose rápidamente e interactuando a través de colisiones Coulombianas.

Llamaremos plasma a un conjunto de partículas ionizadas en el que se cumplan

$$\frac{\lambda_D}{L} \ll 1, \quad n_0 \lambda_D^3 \gg 1 \tag{13}$$

Vimos que en el ejemplo dado anteriormente del gas de electrones y protones en expansión se cumplía

$$\frac{n_p - n_e}{n} \sim \frac{\lambda_D}{R}$$

que, con la condición (13) da

$$\frac{n_p - n_e}{n} \sim \frac{\lambda_D}{R} \ll 1$$

o sea que hay cuasi-neutralidad; esta condición, $\frac{n^+ - n^-}{n} \ll 1$, se cumple en todos los plasmas en procesos de baja frecuencia; además λ_D da el orden de magnitud de la región en la

frontera del plasma en el que hay apartamiento notorio de la cuasi-neutralidad.

Para que lo de ^{sobre cuasi} arriba sea válido, la frec. de los campos que provocan las fluct. de carga debe ser menor que la frec. de choque \rightarrow

Rangos de aplicación de los diferentes enfoques

Las ecuaciones a las que obedece un plasma son generalmente muy complejas; analicemos brevemente que tipo de fenómenos ocurren y que tipo de enfoque conviene en los distintos rangos de densidad, temperatura y frecuencia de los campos. Un análisis que ayuda a ver qué se debe tener en cuenta es mirar como se establece la relación $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ en una sustancia conductora. En el modelo simple de Drude se considera a los electrones acelerados por los campos aplicados pero cambiando su dirección por colisiones de modo que al movimiento en la dirección del campo se oponen una fuerza de fricción $\nu m \vec{v}$, donde ν es la frecuencia de colisión efectiva. La ley de Ohm representa un balance entre la fuerza aplicada y la de fricción. Cuando la frecuencia de los campos es del orden o mayor que ν , los electrones tienen tiempo de acelerarse y desacelerarse entre colisiones; entonces hay que tener en cuenta los efectos inerciales y la ley de conducción se hace más complicada. A frecuencias bien arriba de la frecuencia de colisión

Para que haya quasi neutralidad en un plasma es necesario que la frecuencia de los campos que producen las fluctuaciones de carga sea menor que la frec. de choque que, en el caso de partículas cargadas se define como la inversa del tiempo de deflexión (tiempo medio para que una partícula se defleja 90°)
(Spitzer, L., Physics of fully ionized gases)

los electrones y los iones se aceleran en direcciones opuestas por los campos eléctricos y tienden a separarse, con lo que aparecen intensas fuerzas restauradoras y se originan oscilaciones en la densidad de carga. Estas se conocen como "oscilaciones de plasma" y no deben confundirse con otro tipo de oscilaciones de baja frecuencia que envuelven movimiento del fluido pero no separación de cargas, como por ejemplo las ondas magnetohidrodinámicas.

En líquidos conductores y gases ionizados densos la frecuencia de colisión es suficientemente grande aun para muy buenos conductores y no se produce separación de cargas en la presencia de campos. Los campos eléctricos provendrán o de cargas externas al fluido, o de variaciones temporales de campos magnéticos, o del movimiento del fluido en presencia de campos magnéticos; a su vez las corrientes eléctricas producidas son fuente de campos magnéticos. El movimiento mecánico del sistema se puede describir en términos de un modelo de un único fluido ^{cuasi-neutro}. A ~~bajas~~ ^{no muy altas} frecuencias se puede despre-
 ciar la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère y ésta es la aproximación conocida como magnetohidrodinámica (MHD).

En gases ionizados menos densos la frecuencia de colisión es menor pero la MHD sigue siendo aplicable en procesos cuasi-estacionarios o de baja frecuencia; las aplicaciones astrofísicas caen frecuentemente en esta categoría. A frecuencias más altas la separación de cargas y la corriente de desplazamiento no pueden ser despreciadas. Aquí hay un rango de condiciones físicas en el que es posible usar un modelo de dos fluidos, uno de electrones y otro de iones^(*). Pero para temperaturas altas y densidades bajas se debe incluir la dispersión de las velocidades de las partículas alrededor de sus valores medios, por lo que hay que usar la ecuación de Boltzmann; esto se conoce a veces como teoría cinética de plasmas. Si la temperatura es más alta o las densidades más bajas aún, se pierde totalmente el comportamiento colectivo ya que la longitud de Debye se hace demasiado grande.

Es importante notar que los rangos de validez de cada teoría dependen no solo del sistema de partículas sino del fenómeno que se quiere estudiar, por ejemplo si es la transmisión de ondas, de la frecuencia de las mismas.

Durante el curso trabajaremos dentro de la aproximación MHD, pero previamente haremos un

(*) Si se puede despreciar la presión por ser la temperatura muy baja se puede usar la aprox. de "plasma frío" aunque las β sean altas.

Si la densidad es baja y existe campo magnético lo suficientemente grande como para que la frecuencia de plasma sea mayor que la de choque, hay que usar una ley de Ohm más compleja. Si la frecuencia de los campos es baja de modo que, salvo la ley de Ohm, valen las otras aproximaciones de la MHD, se tendrá la HMHD (magneto h. de Hall)

La aprox. de "plasma frío" es un modelo de un solo fluido, (como la MHD) pero en la que se tiene en cuenta la separación de cargas y la corriente de desplazamiento y se desprecia el ∇p ; para frecuencias altas hay que tener en cuenta términos adicionales en la ley de Ohm (además del de Hall). Para frecuencias bajas la ap. de plasma frío se solapa con la MHD (o con la HMHD) si en esta ∇p es despreciable.

estudio del movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos con diversas características; usualmente estos resultados se utilizan para analizar el comportamiento de sistemas de partículas cargadas de baja densidad en los que se desprecian las colisiones y en los que los campos producidos por las mismas partículas son muy pequeños comparados a los campos externos.

Plasmas en Astrofísica y Geofísica

Material ionizado, total o parcialmente, podemos encontrarlo en muy diversos medios; por ejemplo en el sol y las estrellas la ionización es muy alta debido a las altas temperaturas; el medio interestelar se ioniza por acción de la radiación de las estrellas; el viento solar está ionizado en su nacimiento y la recombinación es muy baja; en la tierra la alta atmósfera está ionizada y más lejos aún de la superficie de la tierra existe el llamado cinturón de Van Allen de electrones y protones atrapados por el campo magnético terrestre; en otros planetas existen también regiones ionizadas, como el anillo de forma toroidal de Júpiter.

En muchos de estos plasmas es muy importante la interacción con el campo magnético dando lugar a multitud de fenómenos, como por ejemplo propa-

gación de ondas magnéticas y magnetoacústicas, confinamiento por acción del campo magnético, algunos altamente energéticos como los "flares" solares en los que la energía magnética acumulada se transforma en energía cinética y térmica; procesos en los que el movimiento del plasma da origen a campos magnéticos por medio del efecto dinámico, como por ejemplo en el sol o en los núcleos de la tierra u otros planetas formados por líquidos conductores.

Referencias:

Rossi, B, y Olbert, S, "Introduction to the Physics of Space", cap 9, - p.p. 243 - 248

Jackson, J. D. "Classical Electrodynamics"

Cap X, Secciones 10.1 y 10.9

Liq conduc | v es muy grande | no hay separac. de cargas | modelo de 2 flúidos | si w del campo no es muy alta despr. corr. de despl \Rightarrow MHD
 gases muy densos | $T = T^+ = T^-$

gases menos densos | si $w \ll v$ (quasi-estac) \Rightarrow MHD (aplic. astraf.)
 w alta \Rightarrow sep. de cargas | modelo de 2 flúidos | $T \neq T^+$ ("plasma caliente")
 \downarrow Temp. no muy bajas

gases aún menos densos y temp. altas | Hay que incluir dispersión de veloc. \Rightarrow ec. de Boltzmann
 Teoría cinética de plasmas

Hay otras aproximaciones que son aplicables ~~o hay~~ que ~~no~~ \neq bajo ciertas condiciones

- Si \vec{B} es grande y la densidad baja hay que tener en cuenta el término de Hall en la ley de Ohm. Si se puede aplicar por lo demás la MHD (que usa una ley de Ohm simple) se tiene la HMHD
- Si la temp. es baja de modo que la presión también lo es y se puede despreciar $\vec{\nabla} p$, se tiene la aprox. de plasma frío, es un modelo de 1 flúido y si la frec. es alta hay que tener en cuenta el término inercial en la ley de Ohm; también se consideran el de Hall y el de grad. de p_e según las situaciones. Si la frec. es baja la aprox. de p. frío se solapa con la MHD si en esta se desprecia $\vec{\nabla} p$

Cap II - Movimiento de partículas cargadas en campos electromagnéticos.

Analizaremos el movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos o campos eléctricos y magnéticos con diversas características. Estos resultados ^{podemos} se utilizan para estudiar sistemas de partículas cargadas de muy baja densidad en los que no hay comportamientos colectivos, y los campos producidos por las mismas partículas son pequeños comparados con los campos de origen externo.

Campo magnético uniforme.

Supongamos que tenemos un campo de inducción magnética constante y uniforme \vec{B} y que el campo eléctrico es nulo.

La ecuación de movimiento de una partícula de carga q es

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \tag{1}$$

Al ser la fuerza perpendicular a \vec{v} , $|\vec{v}| = cte$ ya que

$$\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dp^2}{dt} = 0 \Rightarrow p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = cte \tag{2}$$

$$\Rightarrow v^2 = cte \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = cte$$

Separando \vec{v} en un término paralelo a \vec{B} y otro

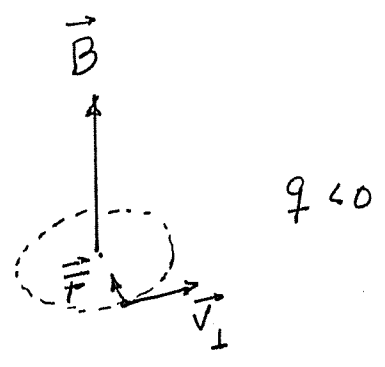
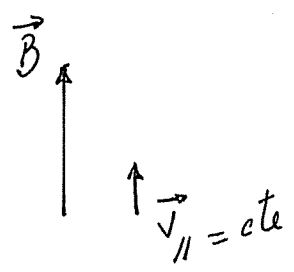
perpendicular

$$\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}; \tag{3}$$

por ser la fuerza perpendicular a \vec{v} y $\gamma = cte$ resulta

$$\vec{v}_{||} = cte; \tag{4}$$

por otro lado \vec{v}_{\perp} cambia de dirección pero no de módulo; en el plano normal a \vec{B} la partícula describe un movimiento circular de radio r_B y frecuencia angular ω_B .



$$m_0 \gamma r_B \omega_B^2 = |q| v_{\perp} B$$

$$m_0 \gamma v_{\perp} \omega_B = |q| v_{\perp} B$$

Luego ω_B , frecuencia de Larmor o frecuencia ciclotrónica, vale

$$\omega_B = \frac{|q| B}{m_0 \gamma} \tag{5}$$

y el radio

$$r_B = \frac{v_{\perp}}{\omega_B} = \frac{m_0 \gamma v_{\perp}}{|q| B} \tag{6}$$

La frecuencia aumenta con B, y a velocidades no relativistas es independiente de la velocidad; el radio es mayor a mayor velocidad perpendicular y menor al aumentar B.

El movimiento de la partícula en el espacio es una hélice (^{si $v \parallel B > 0$} destrógera si $q < 0$ y levógera si $q > 0$) cuyo eje está en la dirección de \vec{B} .

Definimos el "centro de giro" como ~~el promedio~~ ^{el centro de curvatura} ~~de la trayectoria~~ ^{de la posición} de la partícula; da una idea de la posición media de la misma; en un campo B uniforme el "centro de giro" se mueve en una línea recta.

Campos eléctrico y magnético uniformes; $\vec{E} \perp \vec{B}$. Deriva $(\vec{E} \wedge \vec{B})$

Como hemos supuesto $\vec{E} \perp \vec{B}$ es (7)
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 .$$

Tanto $\vec{E} \cdot \vec{B}$ como $E^2 - B^2 c^2$ son invariantes ante transformaciones de Lorentz; luego $\vec{E} \cdot \vec{B}$ será nulo en todo sistema de referencia y el signo de $E^2 - B^2 c^2$ será el mismo. Separemos los casos $E < Bc$ y $E > Bc$.

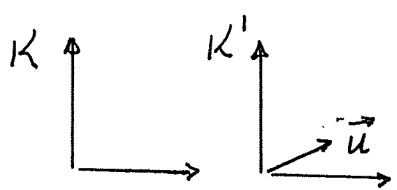
a) $E < Bc$

Al ser $E^2 < B^2 c^2$ y $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ podemos encontrar

un sistema de referencia K' en el que el campo eléctrico se anule (4)

$$\vec{E}' = 0 \quad (8)$$

Las leyes de transformación de \vec{E} y \vec{B} ante una transformación de Lorentz entre sistemas K y K' que se mueven con velocidad relativa \vec{u} son



$$\vec{E}' = \gamma_u (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) - \frac{\gamma_u^2}{\gamma_u + 1} \left(\frac{\vec{u}}{c} \cdot \vec{E} \right) \frac{\vec{u}}{c} \quad (9)$$

$$\vec{B}' = \gamma_u \left(\vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2} \wedge \vec{E} \right) - \frac{\gamma_u^2}{\gamma_u + 1} \left(\frac{\vec{u}}{c} \cdot \vec{B} \right) \frac{\vec{u}}{c}$$

con $\gamma_u = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.

Eligiendo la velocidad relativa \vec{u} perpendicular tanto a \vec{E} como a \vec{B} , la condición de que $\vec{E}' = 0$ se reduce a:

$$0 = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}.$$

Podemos despejar \vec{u} multiplicando vectorialmente por \vec{B}

$$0 = \vec{B} \wedge \vec{E} + \vec{B} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \wedge \vec{E} + \vec{u} B^2 - \vec{B} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{B}}{B} \right) \underset{=0}{B}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} < c$$

(10)

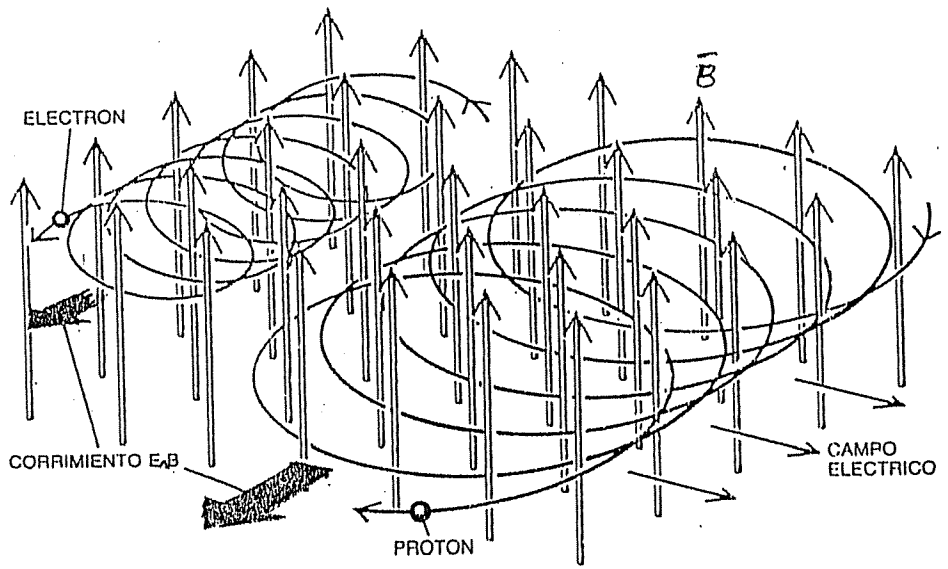
En el sistema de referencia K' habrá solo campo

de inducción magnética \vec{B}' que tendrá la misma dirección que \vec{B} ; luego, en K' la partícula realizará un movimiento helicoidal; en el plano perpendicular a \vec{B} será un movimiento circular. Visto desde el sistema original K , tendremos en el plano perpendicular a \vec{B} la combinación de un movimiento circular y de una traslación con velocidad \vec{v}_D igual a la velocidad relativa de los sistemas (ec. 10)

$$\vec{v}_D = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} ; \tag{11}$$

esto se conoce como deriva $\vec{E} \wedge \vec{B}$. El agregar un campo eléctrico al magnético, tal que $E \perp B$, hace que la partícula se desplace en dirección perpendicular tanto a \vec{E} como a \vec{B} . El signo de \vec{v}_D es independiente del signo de la carga. Al movimiento en el plano normal a \vec{B} hay que agregarle una traslación con $v_{||}$ en dirección paralela.

El "centro de giro" se mueve en una recta, con $\vec{v}_{||}$ en la dirección de \vec{B} y \vec{v}_D en dirección de $\vec{E} \wedge \vec{B}$.



Deriva $\vec{E} \wedge \vec{B}$
cuando $\vec{v}_{||} = 0$

b) $E > Bc$

En este caso $E^2 > B^2 c^2$, y no podremos encontrar un sistema de referencia en que se anule el campo eléctrico. Se puede hallar un sistema K' en que se anule B' ; eligiendo la velocidad relativa de los sistemas, \vec{u} , perpendicular a \vec{E} y a \vec{B} , de las leyes de transformación (9) resulta que, para que $\vec{B}' = 0$, \vec{u} debe satisfacer

$$\vec{B} - \vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c^2} = 0,$$

de donde

$$\vec{u} = c^2 \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{E^2} < c. \tag{12}$$

En el sistema K' solo existe campo eléctrico; el movimiento será en la dirección de \vec{E}' uniformemente acelerado (si la velocidad es no relativista) y en dirección normal una traslación con velocidad cte. Si la velocidad es relativista será un "movimiento hiperbólico" ($\frac{\vec{r}}{r} = cte$). Volviendo al sistema K las características del movimiento no se modifican; no hay giro alrededor de \vec{B} .

Movimiento en campos no uniformes.

Analizaremos el movimiento de partículas cargadas en campos de inducción magnética constantes ^{en el tiempo} pero no uniformes, con campo eléctrico nulo. A diferencia

de los casos anteriores el cálculo se hará en forma aproximada; supondremos que la escala de longitudes en la que la variación del campo se hace apreciable es mucho mayor que el radio de giro de las partículas. Podemos suponer entonces que en aproximación de orden cero las partículas realizan un movimiento helicoidal alrededor de una línea de \vec{B} , con la frecuencia de Larmor que corresponda al valor local de la inducción magnética, y una corrección de primer orden significará un desplazamiento en la trayectoria del centro de giro.

Estudiaremos dos casos de variación espacial: cuando \vec{B} mantiene la dirección pero su módulo se modifica en dirección normal a \vec{B} , y cuando las líneas de \vec{B} tienen curvatura, pero con $|\vec{B}| = \text{cte.}$ El caso en que $|\vec{B}|$ varía en ^{la} dirección del campo se verá más adelante, cuando se analicen las variaciones temporales.

Deriva $\vec{\nabla}|\vec{B}|$

Supongamos que \vec{B} tiene dirección constante y su módulo varía en la dirección \hat{n} , con

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (13)$$

La partícula gira alrededor de un eje cuyas coordenadas son las del "centro de giro"; desarrollamos $|\vec{B}|$ alrededor de \vec{r}_{CG} :

$$|\vec{B}(\vec{r})| = |\vec{B}(\vec{r}_{CG})| + (\vec{r} - \vec{r}_{CG}) \cdot \vec{\nabla} |\vec{B}| \Big|_{\vec{r}_{CG}} + \dots$$

Llamaremos $\vec{B}_0 = \vec{B}(\vec{r}_{CG})$ y η a la coordenada en la dirección \vec{n} . Tenemos entonces

$$\vec{B}(\vec{r}) = |\vec{B}(\vec{r})| \frac{\vec{B}_0}{B_0} \quad (14)$$

$$|\vec{B}(\vec{r})| \cong B_0 + [\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{CG})] \frac{\partial |\vec{B}|}{\partial \eta} \Big|_0 \quad (15)$$

La velocidad en dirección perpendicular a \vec{B} varía según la ley

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{m_0 \gamma} (\vec{v}_\perp \wedge \vec{B}) \quad (16)$$

Poniendo \vec{v}_\perp como suma de un término de orden cero y otro de primer orden, $\vec{v}_\perp = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$, reemplazando (14) y (15) en (16) y reteniendo términos hasta primer orden queda

$$\frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{q}{m_0 \gamma} \left[\vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0 + [\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{CG})] \frac{\partial |\vec{B}|}{\partial \eta} \frac{\vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0}{B_0} + \vec{v}_1 \wedge \vec{B}_0 \right] \quad (17)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{d\vec{v}_0}{dt} = \frac{q}{m_0 \gamma} [\vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0]$$

resulta:

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{q}{m_0 \gamma} \left[\vec{v}_1 + \left[\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{CG}) \right] \frac{1}{B_0} \frac{\partial |B|}{\partial z} \right] \vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0. \quad (18)$$

\vec{v}_1 variará en el tiempo a lo largo de un período pero su valor será aproximadamente el mismo después de una vuelta; luego, en aproximación de 1º orden:

$$\left\langle \frac{d\vec{v}_1}{dt} \right\rangle \sim 0; \quad \Rightarrow$$

por lo tanto, para que se satisfaga (18), aparte de términos oscilatorios \vec{v}_1 deberá tener un promedio no nulo que llamaremos \vec{v}_G :

$$\vec{v}_G = \langle \vec{v}_1 \rangle = - \frac{1}{B_0} \frac{\partial |B|}{\partial z} \left\langle \left[\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{CG}) \right] \vec{v}_0 \right\rangle. \quad (19)$$

Como

$$\vec{v}_0 = \frac{q}{m_0 \gamma} (\vec{r} - \vec{r}_{CG}) \wedge \vec{B}_0,$$

tendremos:

$$\left\langle \left[\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{CG}) \right] \vec{v}_0 \right\rangle = \frac{q}{m_0 \gamma} \left\langle \left[\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{CG}) \right] (\vec{r} - \vec{r}_{CG}) \right\rangle \wedge \vec{B}_0 \quad (20)$$

donde \vec{B}_0 se ha sacado afuera del promedio por ser cte; en el movimiento de giro en el plano perpendicular a \vec{B}_0 , las variaciones en direcciones normales entre sí están desfasadas en $\pi/2$; luego, al promedio temporal en (20) solo contribuirá la componente en la dirección \hat{n} :

$$\left\langle \left[\hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_{CG}) \right] (\vec{r} - \vec{r}_{CG}) \right\rangle = \frac{1}{2} r_B^2 \hat{n}$$

Pongamos \vec{v}_1 como suma de un término promedio sobre una vuelta y un término que oscila con $\omega = qB_0/m_0c = 2\pi/c$

$$\vec{v}_1 = \langle \vec{v}_1 \rangle + \vec{v}_1$$

$\langle \vec{v}_1 \rangle$ puede variar pero mucho más lentamente que \vec{v}_1 ; además $\langle d\vec{v}_1/dt \rangle = 0$ - llamando $\vec{V}_G = \langle \vec{v}_1 \rangle$

$$d\vec{v}_1/dt = d\vec{V}_G/dt + d\vec{v}_1/dt$$

$$\langle d\vec{v}_1/dt \rangle = d\vec{V}_G/dt ; |\langle d\vec{v}_1/dt \rangle| \ll \frac{V_G}{c} \sim \omega V_G$$

El módulo del promedio del 1º término del 2º miembro de (18) es justamente ωV_G . Para que el 1º miembro sea mucho menor que un término del 2º miembro de una ecuación, los 2 términos del 2º miembro deben ser muy parecidos salvo el signo

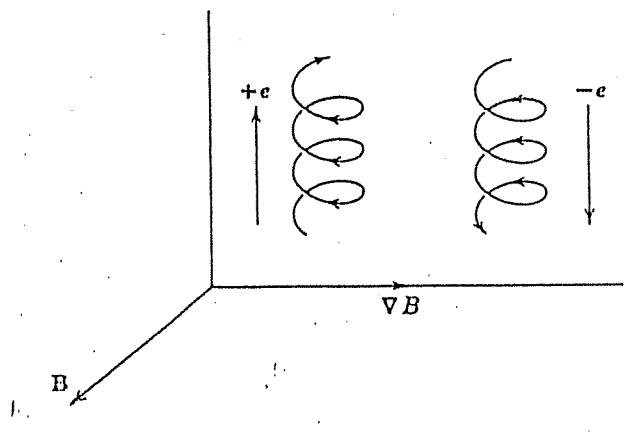
$$\vec{V}_G = - \dots$$

Luego

$$\vec{J}_G = \frac{q}{m_0 \gamma} \frac{r_B^2}{2 B_0} \left(\frac{\partial |\vec{B}|}{\partial \zeta} \right) \vec{B}_0 \wedge \vec{n}$$

$$\vec{J}_G = \pm \frac{\omega_B r_0^2}{2 B_0^2} (\vec{B} \wedge \vec{\nabla} |\vec{B}|) \quad q \geq 0 \quad (21)$$

La deriva de gradiente se puede entender cualitativamente viendo que el radio de giro es inversamente proporcional a B; cuando la partícula va hacia una zona de B mayor el radio disminuye, y a la inversa en la otra mitad de períodos. No teniendo en cuenta $v_{||}$, la situación es como indica la figura:



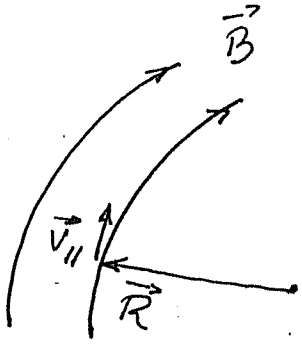
Deriva de curvatura

Consideremos un campo de inducción de módulo uniforme, tal que las líneas de campo tienen una curvatura, con radio de curvatura R . Supongamos que la partícula cargada tiene en un punto

una velocidad tangente a la línea, dada por $v_{||}$, tal que $[v_{||}^2/c^2] < 1$. La curvatura de las líneas es pequeña, de modo que

$$r_B \ll R.$$

En el sistema de referencia que rota con velocidad angular $v_{||}/R$, a la fuerza debida a \vec{B} se le agrega una fuerza centrífuga



$$\frac{\delta m_0 v_{||}^2}{R};$$

tomando como \vec{B} el del sistema inercial con igual velocidad en el punto donde está la partícula, que es igual a \vec{B} en el sistema original, se tendría una situación similar a la de \vec{B} y \vec{E} uniformes, con $\vec{E} \perp \vec{B}$, ya que la fuerza centrífuga es equivalente a un campo eléctrico en dirección \vec{R} de magnitud

$$\vec{E}_{ef} = \frac{\delta m_0}{q} \frac{v_{||}^2}{R^2} \vec{R} \quad (22)$$

Teniendo en cuenta que la curvatura de las líneas es pequeña, y la condición sobre la velocidad, resulta

$$|\vec{E}_{ef}| < c |\vec{B}|.$$

Aparecerá entonces una deriva de tipo $\vec{E} \times \vec{B}$. En el sistema en rotación se tendrá un movimiento circular sumado a una traslación en dirección perpendicular a \vec{B} y a \vec{R} , llamada "deriva de curvatura"

Deriva de curvatura

Otra forma de verlo -

Si en un momento dado una partic. tiene la \vec{v} tang a la línea de \vec{B} no sufre fuerza y sigue in mov. rectilíneo, con lo que empieza a aparecer un áng entre \vec{v} y \vec{B} y por lo tanto una fuerza de Lorentz \perp a \vec{v} y a \vec{B} .



Esto genera una veloc \perp que irá aumentando hasta que la fuerza que la provoca se anule; esto sucede porque la v_{\perp} con \vec{B} produce una fuerza hacia el centro de curvatura que hace que la partícula se "doble" hacia la línea de campo; cuando $|q v_{\perp} \wedge \vec{B}|$ sea igual a la fuerza centrífuga $m_0 \gamma v_{\parallel}^2 / R$, la v_{\perp} (y será v_c) no variará.

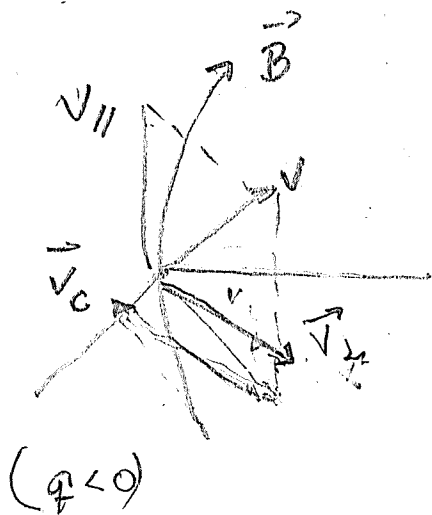
más - En realidad, la veloc. inicial hay que separarla en una componente \parallel a \vec{B} (que es igual al v_0) y otra componente \perp que es nula ($\vec{v}_c + \vec{v}'_{\perp}$), con $\vec{v}'_{\perp} = -\vec{v}_c$; el \vec{v}'_{\perp} hará que la partícula espiralee, \vec{v}_c hará que siga la línea de \vec{B} (debido a la fuerza ~~de~~ L. hacia el centro de curvatura que produce) \Rightarrow

- Relación entre las aceleraciones debidas al mov. circular de espiral y la debida a seguir la línea "acel. de curvat" = $\frac{v_{\parallel}^2}{R}$
- acel. de espirales = $\frac{q v_{\perp} B}{m_0 \gamma}$

Si $\gamma \gg 1$ la 1ª puede ser mayor que la 2ª

Dada una veloc. \vec{v} cualquiera la descomp. en $v_{||}$ en la direcc de \vec{B} y, en el plano \perp a \vec{B} , una comp que será \vec{v}_c en la direcc. \perp al plano de \vec{B} y la que resta \vec{v}_\perp .

Este dará lugar al mov. circular y no contribuye a la vel del centro de giro - $v_{||}$ y v_c darán la veloc. del centro de giro



$v_{||}$ no genera fuerzas

v_c genera con \vec{B} la fuerza centrípeta necesaria para que $v_{||}$ vaya cambiando y siguiendo a la línea de \vec{B} .

Est...

... en un...

$$\vec{v}_c = \frac{\gamma m_0}{q} \frac{v_{||}^2}{R^2} \frac{1}{B^2} \vec{R} \wedge \vec{B}$$

$$= \pm \frac{v_{||}^2}{\omega_B R} \frac{\vec{R} \wedge \vec{B}}{RB} \quad q \geq 0 \quad (23)$$

En el sistema de referencia original, resulta entonces un movimiento helicoidal a lo largo de la línea de \vec{B} , y una deriva perpendicular con velocidad \vec{v}_c .

El "centro de giro" se mueve a velocidad ^{en módulos} cte, con componente $v_{||}$ en la dirección de \vec{B} y \vec{v}_c en la dirección de $\vec{R} \wedge \vec{B}$, que cambia de sentido según el signo de la carga.

Movimiento en campos dependientes del tiempo. Invariantes adiabáticos

Para analizar el movimiento de las partículas en campos de inducción lentamente variables en el tiempo, tendremos en cuenta que en la aproximación de orden cero el movimiento, en el plano perpendicular al campo, es periódico. Los resultados también nos servirán para movimientos en campos estáticos cuyo módulo varía en la dirección del campo, pues al trasladarse el centro de giro, para la partícula es como si hubiera una variación temporal.

En Mecánica Analítica cuando se estudian transformaciones canónicas y ecuaciones de Hamilton-Jacobi se ve que para sistemas periódicos es conveniente definir para cada variable generalizada q_i y correspondiente impulso canónico p_i la integral de acción

$$J_i = \oint p_i dq_i$$

donde la integral es sobre un período. Para un sistema mecánico periódico (o múltiplemente periódico) J_i es una constante para cada trayectoria.

Consideremos ahora un sistema mecánico cuyo Hamiltoniano depende, además de las coordenadas y de los impulsos, de un parámetro a ; ^{además, supongamos que} cuando el parámetro es constante el sistema es periódico o múltiplemente periódico y ^{que} se conserva H ; cuando el parámetro es variable, $a(t)$, el Hamiltoniano no es ^{más} una constante. Llamaremos invariante adiabático a una cantidad que ^(pudiendo considerarse de en 12 p.p.a.) varía muy poco si la variación del parámetro es lenta; si τ es el período del movimiento cuando a es constante, supondremos que

$$\frac{\Delta a}{a} \ll 1 \quad (24)$$

donde Δa es la variación en el tiempo τ ; además

supondremos que la variación de \underline{a} durante ese tiempo es monótona con $\dot{a} \sim \text{cte}$; con esta suposición la condición (24) se puede poner

$$\varepsilon \dot{a} \ll a. \tag{25}$$

Diríamos que una cantidad es un invariante adiabático si varía más lentamente que \underline{a} , o sea su variación, en promedio, no contiene términos lineales en \dot{a} .

Se puede probar que las variables de acción son invariantes adiabáticos. Utilizaremos este resultado para analizar el movimiento de una partícula cargada en un campo de inducción \vec{B} lentamente variable.

Busquemos cual es la variable de acción para el movimiento transversal a \vec{B} para un campo uniforme y cte; poniendo

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}$$

tendremos

$$J = \int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi. \quad (\varphi \geq 0) \tag{25}$$

Para una partícula cargada en un campo electromagnético el impulso canónico está dado por:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} + q \vec{A};$$

a un ángulo de rotación le corresponde un impulso canónico que es un impulso angular:

$$p_\varphi = \gamma m_0 r v_\varphi + q r A_\varphi;$$

$$p_\varphi = \gamma m_0 r^2 \dot{\varphi} + q r A_\varphi. \tag{26}$$

Para un campo de inducción uniforme en la dirección z se puede elegir

$$A_\varphi = \frac{B r}{2}$$

ya que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \hat{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{B r}{2} \right) \hat{z} = B \hat{z}.$$

Por otro lado (ver (5)):

$$\dot{\varphi} = - \frac{q B}{m_0 \gamma};$$

reemplazando en (26):

$$p_\varphi = - r^2 \frac{q B}{2} + q \frac{r^2 B}{2} = - \frac{r^2 q B}{2}. \tag{27}$$

Luego la integral de acción resulta, de (25):

$$J = \frac{\pi r^2 |q| B}{2} \tag{28}$$

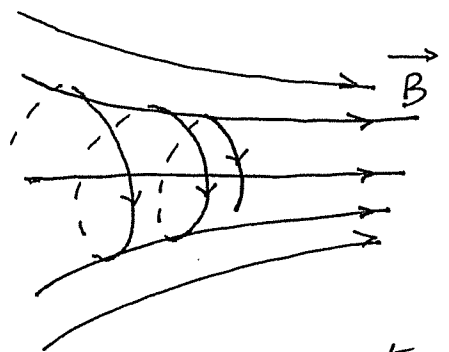
J es entonces proporcional al flujo magnético que atraviesa una espira; se puede poner también como

$$\rightarrow J = \frac{\pi m_0^2 \gamma^2}{2|q|} \frac{v_{\perp}^2}{B}, \quad (29)$$

teniendo en cuenta la relación (6).

Si B varía lentamente en el tiempo la trayectoria se irá modificando de modo que J no cambie, o sea que el flujo de B , y por lo tanto el número de líneas que atraviesan una espira, se mantenga constante.

Lo mismo sucede si la variación de \vec{B} es espacial, variando el módulo en la dirección de movimiento, de forma que al trasladarse la partícula en la dirección de \vec{B} , vea una variación lenta; si se mueve hacia regiones donde el campo es más intenso disminuye el radio de giro, y a la inversa.



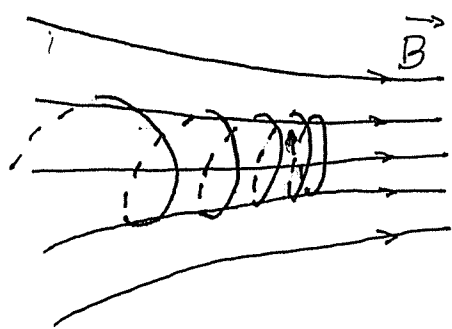
Esto trae además otra consecuencia; como en un movimiento en un campo magnético estacionario se conserva la energía, tendremos:

$$v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = v^2 = cte$$

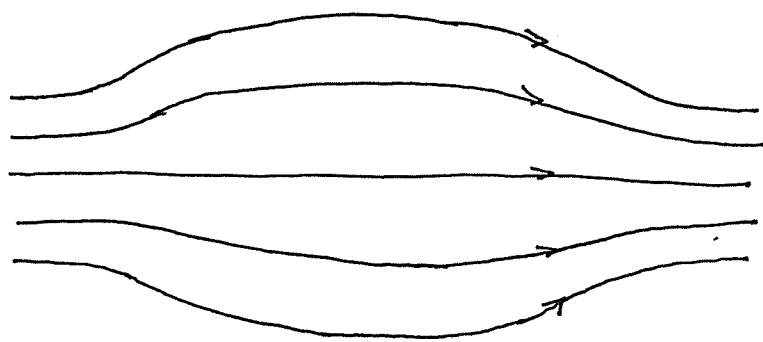
o sea:

$$v_{\parallel}^2 = v^2 - v_{\perp}^2. \quad (36)$$

De (29) vemos que si aumenta B debe aumentar v_{\perp} para mantener J invariante. Por lo tanto v_{\parallel}^2 disminuye; si la variación de B es suficiente puede llegar a anularse v_{\parallel} , y entonces cambia de signo, con lo que la partícula retrocede; este es el principio del "espejo magnético".



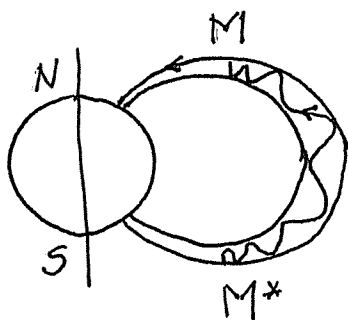
Si la configuración de campo de inducción tiene una forma adecuada, por ej:



la partícula puede quedar atrapada en una región pues cada vez que llega a un extremo, retrocede; para ello es necesario que la partícula tenga una energía y una v_{\parallel} adecuadas. Se tiene entonces una "botella magnética".

El campo de inducción magnética de la tierra tiene características de este tipo; las partículas cargadas, si tienen la energía adecuada, pueden quedar atrapadas por el campo \vec{B} formando el "cinturón de van Allen".

El campo magnético de la tierra es aproximadamente el de un dipolo con el momento magnético apuntando de N a S. Asociado al movimiento de una partícula en un campo dipolar hay tres invariantes. El primero, I_1 , es el J que habíamos mencionado antes y corresponde al movimiento helicoidal de la partícula alrededor de una línea de \vec{B} . Si la partícula tiene el rango adecuado de v^2 y v_{\perp}^2 queda atrapa-



pada, apareciendo dos "puntos de retorno" o "puntos espejo" M y M^* , en los hemisferios norte y sur. El valor del

campo de inducción en M y M^* , B_M , depende del valor del invariante I_1 y de v^2

De (29)

$$I_1 = \frac{\pi m_0^2 \gamma^2}{2 |q|} \frac{v_{\perp}^2}{B} = C \gamma^2 \frac{v_{\perp}^2}{B}$$

Por otro lado

$$V_{||}^2 + V_{\perp}^2 = V^2 = \text{cte}$$

En los puntos M y M^* , $V_{||}^2 = 0$, $B = B_M$; si $V_{||}^2 = 0$ entonces $V_{\perp}^2 = V^2$, por lo que

$$I_1 = C \gamma^2 \frac{V^2}{B_M}$$

o sea
$$B_M = \frac{C \gamma^2 V^2}{I_1} \tag{31}$$

El centro de giro realiza una oscilación latitudinal entre M y M^* ; asociado a este movimiento periódico hay otro invariante adiabático, I_2 ó J_e

$$J_e = I_2 = \oint \vec{p}_{||}^{(CG)} \cdot d\vec{l} = \oint \delta m_0 V_{||}^{CG} dl \tag{32}$$

$$V_{||} = V \cos \alpha$$

$$V_{\perp} = V \sin \alpha$$

Por la invariancia de I_1 ,

$$\frac{V_{\perp}^2}{B} = \frac{V^2}{B_M} \implies \sin^2 \alpha = \frac{B}{B_M} \tag{33}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{B}{B_M}}$$

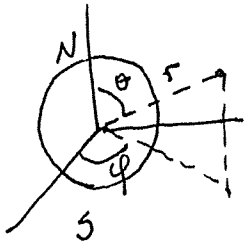
Reemplazando en (32):

$$T_e = T_z = 2 \sqrt{8} m_0 \int_{M^*}^M \sqrt{1 - \frac{B}{B_M}} dl \quad (34) \quad (20)$$

De la misma forma se puede calcular el período de la oscilación latitudinal.

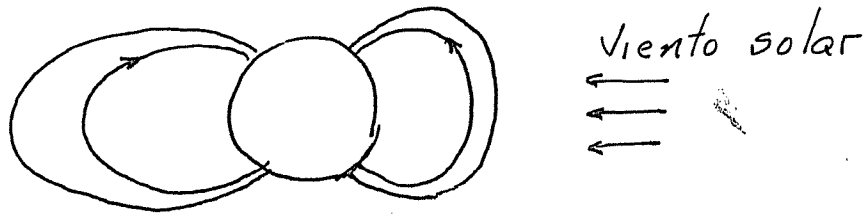
$$T_e = \frac{2}{v} \int_{M^*}^M \frac{dl}{\sqrt{1 - B/B_M}} \quad (35)$$

La oscilación latitudinal no se realiza siempre en el mismo meridiano sino que hay una deriva en φ . Esta deriva se debe a las derivas de $\vec{V}|\vec{B}|$ y de curvatura, ya que el campo dipolar varía su módulo y tiene líneas curvas; ambas derivas apuntan en el mismo sentido siendo hacia el este para cargas positivas y al este para cargas negativas (ec. (21) y (23)).



Si el campo de inducción magnética es puramente dipolar, el centro de giro al derivar en azimut encontrará valores de B iguales y no modificará ni la altura r por la que pasa por el ecuador en su movimiento oscilatorio, ni los puntos espejo M y M^* . Pero el campo de la tierra no es exactamente dipolar, entre otras razones por la presencia del viento solar, que "aplasta"

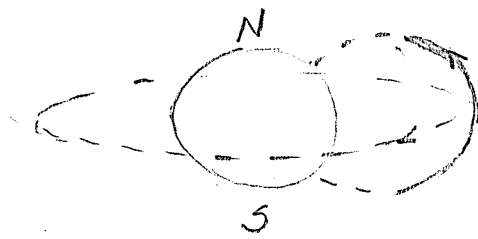
las líneas del lado del sol, y las separa del lado contrario



La variación de \vec{B} que encuentra la partícula al derivar en φ en una oscilación latitudinal es lo suficientemente pequeña como para considerarla una variación adiabática. Luego se tienen que conservar I_1 e I_2 ; la partícula "buscará" una línea de B adecuada y modificará M y M^* para que aunque el campo sea diferente que en la oscilación anterior, I_1 (y por lo tanto B_M) e I_2 se conserven; esto hará que el r que tiene al pasar por el ecuador se modifique; pero al seguir derivando en φ y llegar a estar en una situación similar a la inicial, el r volverá a ser el mismo del principio.

Finalmente asociado al movimiento en un campo dipolar hay un tercer invariante I_3 , ya que al derivar azimutalmente en su oscilación latitudinal, el promedio de la posición del centro de giro realiza una rotación alrededor de la tierra, movimiento que es periódico. I_3 está asociado al flujo con período T_φ .

de \vec{B} concatenado por esa trayectoria circular



Si \vec{B} varía temporalmente en forma muy lenta, el radio de esa trayectoria deberá modificarse de modo de mantener el flujo constante.

Los períodos de los movimientos de giro alrededor de $\vec{B}(z)$, oscilación latitudinal (T_e) y rotación alrededor de la tierra (T_ϕ) son de ordenes de magnitud diferentes. Para tener una idea de los rangos de variación:

Protones de 10^5 eV:	τ :	$10^{-2} \sim 10^{-4}$	sec
	T_e	~ 10	"
	T_ϕ	$\sim 10^4$	"

Electrones de 10^4 eV	τ :	$10^{-5} - 10^{-7}$	sec
	T_e	~ 1	"

Referencias

Jackson, J. D. "Electrod. Clásica"
Cap XII -

Goldstein, H. "Mecánica Clásica" - 2ª Edición - Cap 10.

Rossi B, Olbert S, "Introduction to the Physics of Space"
Cap 2, 5 y 6 -

T_ϕ	$\sim 10^5$	"
----------	-------------	---

III. Aproximación Magnetohidrodinámica

Si tenemos un gas ionizado en presencia de campos electromagnéticos, estos influyen fuertemente en el movimiento de las partículas a través de la fuerza de Lorentz, provocando o modificando las corrientes e influyendo también en el movimiento del gas en su conjunto. A su vez las corrientes modifican el campo electromagnético a través de las ecuaciones de Maxwell. El resultado es un sistema altamente interrelacionado.

En la aproximación Magnetohidrodinámica (MHD) se hacen una serie de suposiciones que simplifican algo el problema:

1) El conjunto de partículas ionizadas puede considerarse como un plasma, o sea un fluido continuo en el que

$$\lambda_D \ll L, \quad n \cdot \lambda_D^3 \gg 1 \quad (1)$$

L es una long. caract. de variac. de las magn. medias, donde λ_D es la longitud de Debye y n es la densidad numérica de partículas.

2) El plasma es eléctricamente casi-neutro en el elemento de plasma; el número de partículas cargadas positivamente es muy parecido al de las cargadas negativamente

$$|n^+ - n^-| \ll n \quad (2)$$

para ello debe cumplirse $\omega \ll \nu$ cuando

Esto trae como consecuencia que la densidad de carga eléctrica $\tilde{\rho}$, aunque no necesariamente nula es muy pequeña

3) Hay equilibrio termodinámico local, por lo que es posible definir una temperatura T .

4) La permitividad ϵ y la permeabilidad μ son uniformes. Para los plasmas astrofísicos se los aproxima en general por sus valores para el vacío: ϵ_0 y μ_0 .

5) Las velocidades del plasma son no relativistas

$$v \ll c \quad (3)$$

6) Las variaciones temporales de las magnitudes son mucho menores que las espaciales multiplicadas por la velocidad de la luz. Simbólicamente

$$\frac{\partial}{\partial t} \ll c \frac{\partial}{\partial x} \quad (4)$$

Esto permite hacer una de las aproximaciones básicas de la MHD: despreciar la corriente de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell; además trae como consecuencia que el campo eléctrico es, en promedio, mucho menor que el campo de inducción multiplicado por c . Como la densidad de carga $\tilde{\rho}$ es muy pequeña,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \sim 0;$$

de la ley de Faraday y de la ~~condición~~ ^{ecuación} (4):

$$|\vec{\nabla} \wedge \vec{E}| = \left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right| \ll \frac{B}{L} c; \quad \frac{E}{L} \ll \frac{B}{L} c$$

salvo que el campo E sea prácticamente uniforme, esto lleva a que

$$E \ll Bc. \tag{5}$$

Si el campo eléctrico es mucho menor que Bc , su variación temporal será mucho menor aún que la variación espacial de B multiplicada por c^2 , y por lo tanto en la ecuación de Ampere-Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \mu \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \mu \vec{J} \tag{6}$$

se puede despreciar la corriente de desplazamiento
→ Como consecuencia la \vec{J} de la μ término $\approx \vec{J}$ por $\vec{E} \ll Bc$

7) La relación que liga la densidad de corriente con los campos está dada por una ley de Ohm simple

$$\vec{J}' = \sigma \vec{E}' \tag{7}$$

donde \vec{E}' es el campo eléctrico en el sistema de referencia en que el elemento de plasma está quieto. Además de la condición de que la frecuencia de variación temporal de los campos sea mucho menor que la frecuencia de colisión entre partículas, que se debe cumplir para que no haya separación de cargas, es necesario, como veremos más adelante, que el campo magnético no sea muy intenso para una densidad de partículas baja.

Ecuaciones de la MHD

1) Ecuaciones electromagnéticas.

La forma simplificada de las ecuaciones de Maxwell que se utiliza en MHD está dada por las tres ecuaciones siguientes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \quad (10)$$

Como se ha despreciado la corriente de desplazamiento, corresponde también no incluir la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \tilde{\rho} / \epsilon$; una vez que se determine \vec{E} puede eventualmente servir para determinar el valor residual de $\tilde{\rho}$, si interesase.

Una consecuencia inmediata de (9) es que la ecuación de continuidad de la carga es en este caso

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (11)$$

La forma de la ley de Ohm en MHD es

$$\vec{J}' = \sigma \vec{E}'$$

donde \vec{E}' es el campo eléctrico en el sistema de referencia en que el plasma está quieto. Si el elemento de plasma se mueve con velocidad \vec{v} , con $v \ll c$:

$$\vec{J}' = \vec{J} + \tilde{\rho} \vec{v} \approx \vec{J}$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

con lo que se obtiene

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \tag{12}$$

hasta
20/8/13
24/8/15

2) Ecuaciones mecánicas de la MHD

La conservación de la masa está expresada por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{13}$$

donde $\rho(\vec{r}, t)$ y $\vec{v}(\vec{r}, t)$ son la densidad de masa y veloc. del plasma.
Definimos la derivada convectiva, sustancial o material, que representa la variación en el tiempo para un dado elemento de plasma que se está moviendo, en lugar de la variación en el tiempo en un punto fijo

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \tag{14}$$

La ecuación de continuidad se puede poner también

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{15}$$

Incompresibles.

La ecuación de movimientos se obtiene aplicando la segunda ley de Newton a un elemento de plasma

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{J} \wedge \vec{B} + \vec{F}' \tag{16}$$

El término $(-\vec{\nabla} p)$ da la fuerza por unidad

de volumen debida a la variación de la presión.
 El término $\vec{J} \times \vec{B}$ proviene de la fuerza de Lorentz; se desprecia la contribución $\vec{p} \times \vec{E}$, por ser \vec{p} pequeño y $E \ll Bc$.

En \vec{F}' incluimos todas las otras fuerzas por unidad de volumen, por ejemplo la fuerza gravitatoria

$$\vec{F}_g = -\nabla\phi = \rho \vec{g}$$

o la fuerza viscosa; esta última para flujos incompresibles toma la forma:

$$\vec{F}_v = \eta_v \nabla^2 \vec{v}$$

donde η_v es el coeficiente de viscosidad. En muchas situaciones se puede despreciar.

3) Ecuaciones termodinámicas.

Es necesario dar una ecuación de estado que relacione ρ , p y T . Usualmente se puede tomar la del gas ideal

$$p = \frac{R}{\mu} \rho T = \frac{k_B}{m} \rho T = n k_B T \tag{17}$$

(A veces μ está incorporado en R)
 donde R es la cte. de los gases, μ la masa atómica media, k_B la cte de Boltzmann, m la masa media y n el nº de partículas por unidad de volumen.

Si la temperatura no es un dato, para completar

las ecuaciones es necesario tener en cuenta la ecuación de conservación de energía.

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = -\mathcal{L} \quad (18)$$

donde S es la entropía por unidad de masa y \mathcal{L} es la función pérdida de energía que incluye las pérdidas por disipación ohmica J^2/σ , flujo de calor por conducción, radiación, etc. (energía/vol-tiempo)

Para un gas ideal esta ecuación toma la forma

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1} \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = -\mathcal{L} \quad (19)$$

donde γ es el cociente entre los calores específicos del gas a presión cte y a volumen cte.

$$\gamma = C_p / C_v \quad (20)$$

Ley de Ohm generalizada

Aunque en MHD se utiliza la ley de Ohm simple mencionada más arriba, analizaremos una forma más general para poder discutir en que condiciones podemos aproximar por la ley simple. Si consideramos un plasma totalmente ionizado haciendo un modelo de dos fluidos, electrones y protones, utilizando las ecuaciones de movimiento de e/u y teniendo en cuenta la interacción entre ambos resulta

(Cuando se pueden despreciar los términos inerciales, que aparecen en la ley de Ohm simple, que aparecen en la ley de Ohm generalizada)

$$\frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{1}{en^+} \vec{J} \wedge \vec{B} + \frac{1}{en^+} \vec{\nabla} P_e \quad (21)$$

donde e es la carga del protón y P_e es la presión electrónica. El término que contiene $\vec{J} \wedge \vec{B}$, "término de Hall", surge como consecuencia del movimiento espiral de las partículas cargadas en presencia de un campo magnético y cobra importancia cuando la densidad, para un dado campo magnético, es lo suficientemente pequeña como para permitir que las partículas describan al menos una vuelta completa en sus trayectorias espirales entre colisiones sucesivas. Llamando Ω a la frecuencia de Larmor del electrón y τ al tiempo de choque electrón-protón, si $\Omega\tau \gg 1$ el término de Hall es importante frente a J/σ , salvo que \vec{J} y \vec{B} tengan aproximadamente la misma dirección. Una consecuencia del término de Hall es que aparecen conductividades "efectivas" diferentes en dirección paralela o perpendicular a \vec{B} .

Para $\Omega\tau \ll 1$, el término de Hall se puede despreciar.

No haremos un análisis detallado del término de gradiente de presión electrónica, pero observemos que si se tiene en cuenta el término de Hall, el de $\vec{\nabla} P_e$ en principio no se puede despreciar,

si $\vec{F}' = 0$ totalmente con mot y elect.

(9)

ya que $P_e = p/2$ y $\vec{\nabla} P$ y $\vec{J} \wedge \vec{B}$ aparecen ambos en la ecuación de movimiento; si $\vec{F}' = 0$, ésta es (ver 16):

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{J} \wedge \vec{B};$$

si el término inercial es pequeño comparado con la fuerza electromagnética, esta ecuación indica que $\vec{J} \wedge \vec{B}$ es del orden de $\vec{\nabla} P$ y por lo tanto de $\vec{\nabla} P_e$. Por otro lado, en los plasmas magnetizados en los que el campo magnético es un factor importante en el movimiento, la fuerza de Lorentz será del orden o mayor que la fuerza debida al gradiente de presión. Por lo tanto si se puede despreciar el término de Hall, despreciaremos también el de $\vec{\nabla} P_e$.

A veces las condiciones físicas son tales que se pueden mantener todas las aproximaciones de la MHD, salvo que hay que incluir los términos de Hall y el de $\vec{\nabla} P_e$ en la ley de Ohm. Nosotros supondremos una ley de Ohm simple.

Ecuación de inducción

Debido a que en MHD se desprecian la corriente de desplazamiento y la contribución del campo eléctrico en la fuerza de Lorentz, es posible encontrar un conjunto completo de ecuaciones en las que no aparece:

Para ello reemplazaremos la ley de Ohm en la ecuación de Faraday

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{\nabla} \wedge \left[\frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{v} \wedge \vec{B} \right] \quad (22)$$

Teniendo en cuenta que en MHD se aproxima (c.f. (9))

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

y que

$$\vec{\nabla} \wedge [\vec{\nabla} \wedge \vec{B}] = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

la ecuación (22) queda

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \vec{B} \quad (23)$$

Ecuación de inducción

Esta ecuación, fundamental en MHD, es conocida como ecuación de inducción. El coeficiente $1/\mu\sigma$ se conoce como difusividad magnética.

De la ecuación de inducción vemos que la variación $\partial \vec{B} / \partial t$ depende de dos términos, uno de convección, $\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B})$, y otro de difusión: $\nabla^2 \vec{B} / \mu\sigma$. Según cual de ellos predomine el comportamiento con el tiempo del campo de inducción magnética es muy diferente.

Veremos los dos límites, en los cuales predomina uno

solo de los términos, y luego analizaremos el criterio para establecer cual es el mayor.

a) Límite difusivo

Cuando se puede despreciar el término convectivo la ecuación de inducción se reduce a una ecuación de difusión:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \vec{B} \quad (24)$$

$\frac{1}{\mu\sigma}$: difusividad magnética

El hecho de que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ sea proporcional a las variaciones espaciales expresadas en $\nabla^2 \vec{B}$ hace que éstas tiendan a desaparecer; variaciones espaciales del campo de una escala L serán destruidas en un tiempo del orden del tiempo de difusión τ_d ; de la ecuación (24) podemos obtener una estimación

$$\frac{B}{\tau_d} \sim \frac{1}{\mu\sigma} \frac{B}{L^2}$$

Luego

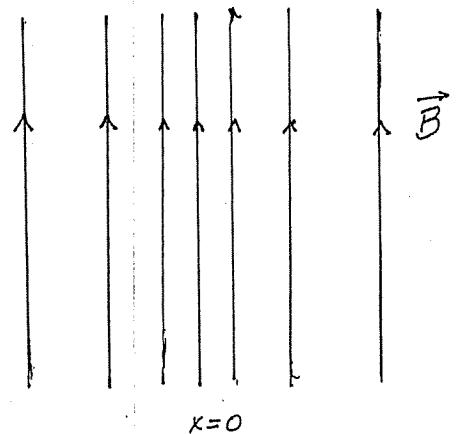
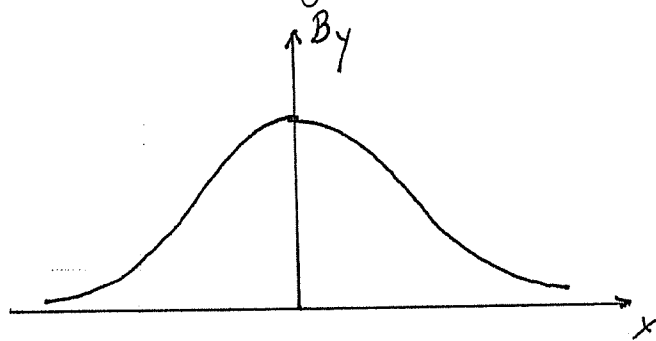
$$\tau_d = \mu\sigma L^2 \quad (25)$$

Cuando la conductividad es mayor, el tiempo de difusión es mayor; pero depende más fuertemente de la escala de longitudes. Por tal motivo, para la mayoría de los problemas en astrofísica, el tiempo de difusión es muy grande; pero en algunas situaciones,

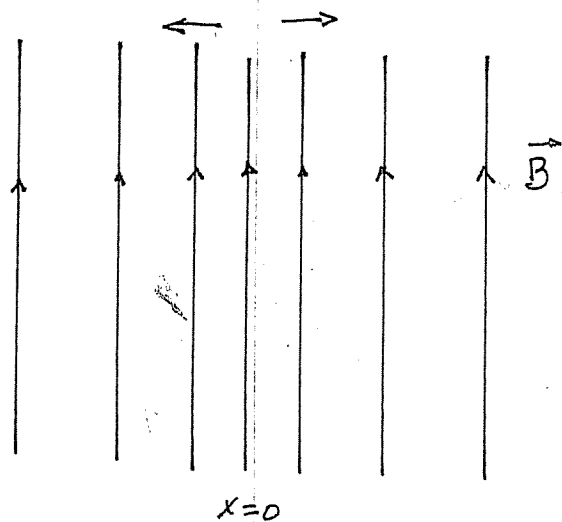
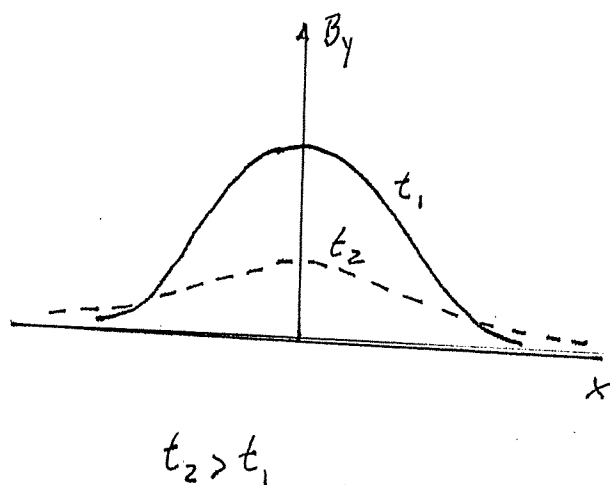
por ejemplo en la reconexión magnética, esto no es así. Para tener una idea, doy algunos ejemplos.

Esfera de cobre de 1 cm	$\tau \sim 1 \text{ seg}$
Núcleo de la tierra	$\tau \sim 10^4 \text{ años}$
Campo magnético solar (sin incluir fenómenos de menor escala, como por ej. los flares)	$\tau \sim 10^{10} \text{ años}$

Para ilustrar el efecto difusivo consideremos un campo de inducción magnética en la dirección y que varía solo en x , de la siguiente manera:



En este caso $\nabla^2 B_y = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$; en los puntos donde el campo es mayor, $\nabla^2 B_y$ resulta negativo, y según la ecuación de difusión $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ resulta negativo y el campo tiende a disminuir; solo crecerá donde $\frac{d^2 B_y}{dx^2}$ sea ^{positivo} ~~negativo~~, pero solo lo hará hasta que ese punto se transforme en un punto con $\frac{d^2 B_y}{dx^2}$ ^{negativo} ~~positivo~~, y a partir de ese momento disminuirá. Con este comportamiento de \vec{B} , las líneas de campo se difunden a través del plasma.



hasta 15
31/8/15

b) Límite de conductividad perfecta

Se llama así al caso en que en la ecuación de inducción el término convectivo domina sobre el de difusión. Si se supone conductividad perfecta, $\sigma \rightarrow \infty$, el término difusivo se anula; pero aunque σ sea finito, si las escalas espaciales son suficientemente grandes, como veremos luego, el término convectivo puede hacerse mucho mayor que el difusivo, y la ecuación de inducción se reduce a:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (26)$$

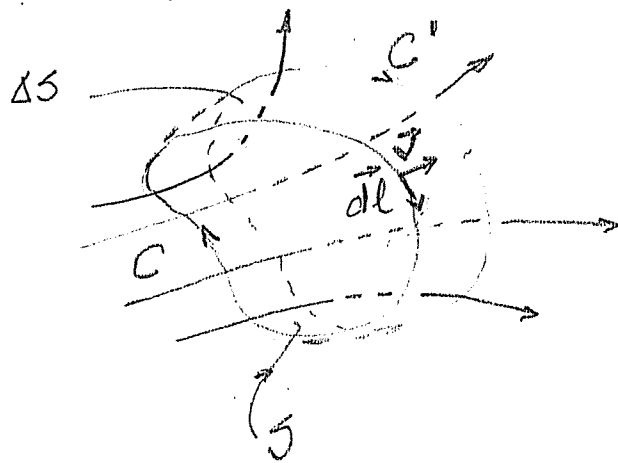
En este caso vale un teorema muy importante:

Teorema de Alfvén del flujo congelado

"En un plasma perfectamente conductor, o donde la escala de longitudes es suficientemente grande como para despreciar el término difusivo, el flujo magnético a través de una superficie rodeada por una curva cerrada que se mueva con el plasma permanece constante en el tiempo". De esto resulta que "el campo magnético

se comporta como si las líneas de \vec{B} se movieran con el plasma".

Consideremos una curva cerrada C que se mueve con el plasma; después de un intervalo Δt ocupará una posición C' . El flujo magnético concatenado por C' diferirá en el concatenado por C por dos razones: la variación de \vec{B} con el tiempo en el intervalo Δt y el flujo que atraviesa la superficie S rodeada por C pero no la superficie rodeada por C' porque las líneas salen por la superficie lateral "barrida" por C al moverse, o a la inversa



Para calcular esta última contribución, observemos que el elemento de ΔS correspondiente a un elemento $d\vec{l}$ de C es

$$d\vec{l} \wedge \vec{v} \Delta t$$

y por lo tanto el flujo saliente por ΔS es

$$\oint_C \vec{B} \cdot (d\vec{\ell} \wedge \vec{v}) \Delta t$$

La variación de flujo por unidad de tiempo debido a las dos causas mencionadas será

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &= \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_C \vec{B} \cdot (d\vec{\ell} \wedge \vec{v}) \\ &= \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \end{aligned} \quad (27)$$

Aplicando Stokes

$$\frac{DF}{Dt} = \iint_S \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) \right] \cdot d\vec{S} \quad (28)$$

y en virtud de la ecuación de inducción en el límite de conductividad perfecta (c. f. 26)

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad (29)$$

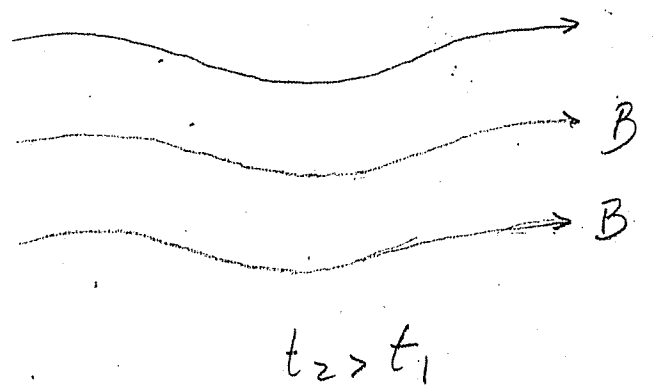
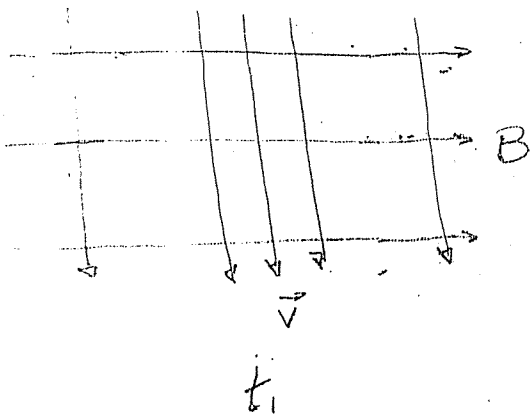
con lo que queda demostrado la primera parte del teorema de Alfvén.

La ecuación (27) es un resultado general matemático que da la variación del flujo de una magnitud de divergencia nula a través de una superficie rodeada por una curva en movimiento

Llamaremos superficie magnética en un sentido general a toda superficie en la que \vec{B} es tangente en

cualquier punto. Como cualquier curva cerrada sobre la superficie magnética encierra un flujo nulo y al moverse con el plasma, según el teorema de Alfvén, el flujo concatenado seguirá siendo nulo, es como si la superficie magnética se moviera con el plasma. Si consideramos ahora una línea de campo, ésta es la intersección de dos superficies magnéticas; como éstas se mueven con el plasma, la línea de campo también lo hace. Se dice que las líneas de \vec{B} están "congeladas" en el plasma. Debido a esta propiedad podemos identificar cada línea de campo por los elementos de plasma que están sobre ella. El plasma se puede mover ^{libremente} en dirección de las líneas, pero un movimiento perpendicular acarrea un desplazamiento de las líneas (o sea una variación de \vec{B} que aparece como si las líneas se corrieran) \rightarrow

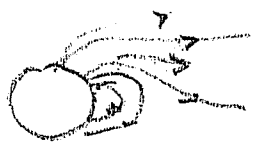
Por ejemplo, si $\vec{v} \perp \vec{B}$ y v es más intenso en una zona



y luego decae.

Para estimar cuando el plasma al moverse arrastra las líneas, y cuando el campo \vec{B} impide el movim. \perp del plasma, comparamos la energía cinética con la magnética; si la 1ª es mayor domina (a grandes rasgos) el 1º efecto y en el caso contrario, el 2º.

En el caso de estrellas, al alejarse de la superf. de la estrella B se hace menor y el viento estelar arrastra las líneas; en el estado estacionario, teniendo en cuenta además que las líneas están "anclados" en la sup. de la estrella, quedan líneas ^{de B} cerradas y líneas "abiertas" (que cierran los polos). Es por estos últimos que sale el viento.



En general se tendrán los dos términos en la ecuación de inducción, por lo que las líneas de \vec{B} serán parcialmente arrastradas por el plasma y parcialmente difundidas.

Un parámetro útil para ver cual de los dos términos de la ecuación de inducción

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \vec{B}$$

en principio puede predominar es el número de Reynolds magnético. Para obtenerlo analicemos los órdenes de magnitud de los dos términos en la ecuación, sin tener en cuenta características particulares dadas por las direcciones relativas de \vec{v} y \vec{B} o por su forma de variación; llamando \vec{v}_0 y \vec{B}_0 a valores típicos de \vec{v} y \vec{B} tendremos

$$\text{término } \overset{\text{advectivo}}{\text{conductor}} \sim \frac{v_0 B_0}{L}$$

$$\text{término difusivo} \sim \frac{1}{\mu\sigma} \frac{B}{L^2}$$

por lo que

$$\frac{\text{término } \overset{\text{advectivo}}{\text{conductor}}}{\text{término difusivo}} \sim \mu\sigma v_0 L = R_M$$

R_M es el número de Reynolds magnético, que se puede poner también en función del tiempo de difusión $\tau = (\mu\sigma L^2)$ (ec. 25):

$$R_M = \mu \sigma v_0 L = \frac{v_0 \tau}{L} \quad (30)$$

Si $R_M \ll 1$ domina la difusión; si $R_M \gg 1$ domina el término ^{convectivo o advectivo,} conductivo y las líneas son transportadas por el plasma (o el campo de inducción \vec{B} obstaculiza el movimiento transversal del plasma). Vemos que R_M depende de σ , pero también depende linealmente de la escala de longitudes L del problema. En el laboratorio usualmente es $R_M < 1$ o $\ll 1$ y el acoplamiento entre flujo del plasma y campo magnético es débil; en problemas geofísicos o astrofísicos en general, aunque no siempre, es $R_M \gg 1$ y el acoplamiento entre flujo del plasma y campo magnético es fuerte. Así mientras que en el laboratorio las líneas de campo se deslizan rápidamente en el material, en masas cósmicas grandes las líneas de campo se pueden considerar muy aproximadamente como congeladas en el material.

En el caso particular de un problema estático, $v = 0$, el término convectivo se anula y se tendría variación temporal de \vec{B} debido al término difusivo. pero si el tiempo de difusión es muy grande, podemos considerar \vec{B} constante para tiempos mucho menores que el tiempo de difusión. En forma similar, si hay flujo de plasma, imponiendo la condición.

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0 \quad (31)$$

podemos considerar que B es estacionario para $t \ll \tau$; en este caso aunque R_M sea mucho mayor que 1, el término ~~convectivo~~ ^{convectivo} es menor que el difusivo pues se anula, pero este último es pequeño si τ es grande. Podemos seguir diciendo que las líneas son arrastradas por el plasma, pero el esquema de líneas no varía en el tiempo pues $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \sim 0$. (para $t \ll \tau$)

Haciendo un análisis similar con la ley de Ohm

$$\frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

que al realizarse con la ecuación de inducción, se puede ver que:

$$R_M \ll 1, \quad |\vec{v} \wedge \vec{B}| \ll \left| \frac{\vec{J}}{\sigma} \right|$$

$$R_M \gg 1, \quad |\vec{v} \wedge \vec{B}| \gg \left| \frac{\vec{J}}{\sigma} \right|$$

y por lo tanto la ley de Ohm se reduce en cada límite a:

$$R_M \ll 1 \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$R_M \gg 1 \quad \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0 \quad (32)$$

hasta 3/3/14
En el límite de conductividad infinita (o de escala grande) se obtiene una relación directa entre el campo eléctrico \vec{E} y los campos de velocidad e inducción magnética. Como $v \ll c$ vemos nuevamente que se

cumple $|\vec{E}| \ll |\vec{B}|c$. Los campos \vec{E} y \vec{B} son perpendiculares entre sí, y en función de ellos podemos obtener el valor de la velocidad del plasma perpendicular a \vec{B} , que además coincide en este caso con la de las líneas; usando (32):

$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \left(\vec{v} \cdot \frac{\vec{B}}{B} \right) \frac{\vec{B}}{B} = \frac{1}{B^2} \left[\vec{B} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) \right] = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} \quad (33)$$

Esta expresión coincide con la "deriva $\vec{E} \wedge \vec{B}$ " que sufre una partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos perpendiculares.

Debemos tener presente que el hecho de que la ley de Ohm si $R_m \gg 1$ se reduzca a (32) no implica que $\vec{J} = (\nabla \wedge \vec{B})/\mu$ se anule.

Es interesante hacer notar que, a diferencia de lo que sucede en el laboratorio donde normalmente el campo \vec{E} inducido externamente, y el valor de \vec{v} determinan \vec{J} , y de allí, \vec{B} , en problemas cósmicos el orden se invierte y el campo \vec{B} es considerado primario.

Resumen de ecuaciones - MHD ideal.

Las ecuaciones que gobiernan la MHD son:

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

b) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \vec{B}$ (inducción)

c) $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ (continuidad)

d) $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + \vec{F}$ (movimiento) (34)

e) $p = \frac{k_B}{m} \rho T$ (estado)

f) $\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1} \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = -\mathcal{L}$ (energía)

La ecuación a) en problemas de pendientes del tiempo puede usarse como condición inicial, ya que de b) $\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \equiv 0$. Estas ecuaciones permiten determinar ρ, p, T, \vec{v} y \vec{B} . La densidad de corriente se obtiene de

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J}$$

y el campo eléctrico a partir de

$$\frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Finalmente, si interesa, la densidad de carga se puede hallar de

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \tilde{\rho} / \epsilon$$

El llamado límite de conductividad infinita (en

realidad límite de escalas de longitud grandes) se conoce a veces como MHD ideal. En ella la ecuación de inducción toma la forma

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (35)$$

y la ley de Ohm

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0; \quad (36)$$

en la MHD ideal además se desprecian en la ecuación de movimiento las fuerzas viscosas.

Fuerza de Lorentz

Al analizar la ecuación de inducción estudiamos la forma en que el flujo del plasma influye sobre \vec{B} . Veamos ahora a la inversa como influye una cierta configuración de campo magnético sobre el movimiento del plasma.

La ley de movimiento, suponiendo $\vec{F}' = 0$ es

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (37)$$

La fuerza de Lorentz por unidad de volumen se puede poner, reemplazando $\vec{J} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) / \mu$ y usando la relación vectorial

$$\vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}),$$

de la siguiente forma:

$$\vec{J} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu} [(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}] = \frac{1}{\mu} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) \quad (37')$$

El segundo término es semejante a la densidad de fuerza producida por una presión: $-\vec{\nabla} p$; podemos definir entonces una presión magnética:

$$p_M = \frac{B^2}{2\mu} \quad (39)$$

En geometrías simples, como por ejemplo que \vec{B} tenga una sola componente, el término $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$ se anula (ya que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$), y la ecuación de movimiento (38) queda

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{J} \wedge \vec{B} - \vec{\nabla} p = -\vec{\nabla} (p_M + p);$$

para que haya equilibrio estático debe satisfacerse

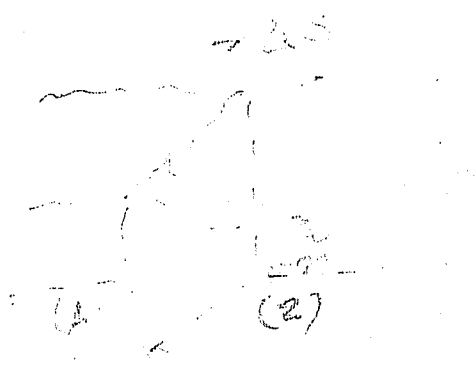
$$p_M + p = \text{cte}; \quad (40)$$

cualquier cambio en la presión del gas, p , debe ser compensada por un cambio igual y de signo opuesto en la presión magnética. Por ejemplo si el plasma está confinado magnéticamente a una cierta región del espacio, p decae rápidamente en los bordes de la región y por lo tanto allí la presión magnética debe aumentar igualmente rápido.

Volviendo al caso general, el primer término en (38), $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} / \mu$ es no nulo si \vec{B} varía en la dirección de \vec{B} , y se puede considerar, como veremos enseguida, como la resultante de tensiones ^{de tracción} que actúan a lo largo

de las líneas.

En mecánica de los fluidos y también en electromag-
netismo se define el tensor de tensiones t_{ij} con el cual
se pueden obtener tanto la fuerza por unidad de su-
perficie que un elemento de fluido ejerce sobre una ad-
yacente a través de la superficie de separación, como la
densidad de fuerza que actúa sobre cada elemento.



La parte (2) ejerce sobre (1)
una fuerza por unidad de
superficie \vec{T} , de componentes

$$T_i = \sum_j t_{ij} n_j, \quad (41)$$

mientras que la densidad de fuerza está dada por:

$$F_i = \sum_j \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}. \quad (42)$$

En electromagnetismo el tensor de tensiones es el tensor
de Maxwell y es la parte espacial-espacial del
cuadri tensor energía-impulso.

En el caso que nos interesa, de (38) la componente
 i -ésima de la densidad de fuerza es: (en coord.
nada \Rightarrow
cartesianas)

$$(\vec{J} \wedge \vec{B})_i = \frac{1}{\mu} \sum_j B_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial B^2}{\partial x_i};$$

teniendo en cuenta que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \sum_i \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = 0$$

resulta

$$(\vec{J} \wedge \vec{B})_i = \frac{1}{\mu} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (B_i B_j) - \frac{1}{2\mu} \sum_j \frac{\partial B^2}{\partial x_j} \delta_{ij}$$

$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\mu} B_i B_j - \frac{1}{2\mu} B^2 \delta_{ij} \right].$$

El tensor de tensiones es entonces

$$t_{ij} = \frac{B_i B_j}{\mu} - \frac{B^2}{2\mu} \delta_{ij}. \quad (43)$$

hasta
6/9/13

(en cartesianas)

Poniendo la fuerza por unidad de superficie a través de una superficie de normal \vec{n} como

$$\vec{T} = \vec{T}^{(1)} + \vec{T}^{(2)}, \quad (44)$$

usando (41), el segundo término de (43) da:

$$T_i^{(2)} = - \sum_j \frac{B^2}{2\mu} \delta_{ij} n_j = - \frac{B^2}{2\mu} n_i; \quad (45)$$

$\vec{T}^{(2)}$ es una fuerza de ^{presión} compresión igual en toda dirección y de magnitud $\frac{B^2}{2\mu} = p_m$.

Por otro lado, del primer término de (43) tenemos

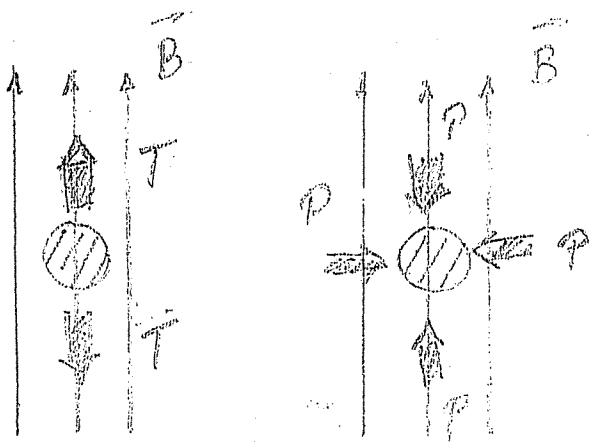
$$T_i^{(1)} = \frac{1}{\mu} \sum_j B_i B_j n_j = \frac{1}{\mu} (\vec{B} \cdot \vec{n}) \vec{B} \Big|_i \quad (46)$$

que es una tensión ^{de tracción} en la dirección de \vec{B} de magnitud

$$T_m = \frac{B^2}{\mu} \quad \vec{n} \parallel \vec{B} \quad (47)$$

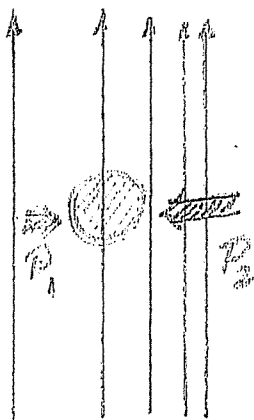
$$T_m = 0 \quad \vec{n} \perp \vec{B}$$

Por ejemplo, si se tiene un campo \vec{B} uniforme, sobre un elemento de plasma actuarán tensiones ^{de tracción} iguales a lo largo de la línea de \vec{B} y presiones iguales en todos los sentidos:



En este caso la fuerza volumétrica debida tanto al término de tensión como al de compresión es nula; esto está de acuerdo con el hecho de que $\vec{J} = 0$ y por lo tanto $\vec{J} \wedge \vec{B} = 0$.

Para un campo \vec{B} que no varía en dirección pero sí en magnitud



En la dirección de \vec{B} ni la presión ni la tensión ^{de tracción} dan resultado neto, pero sí la presión en la dirección normal a las líneas, siendo $P_2 > P_1$; en este caso hay \vec{J} , perpendicular al papel y por lo tanto $\vec{J} \wedge \vec{B} \neq 0$.

Para analizar con más detalle la fuerza ^{volumétrica} neta debida a la tensión

$$\vec{F}(v) = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}{\mu}$$

ponemos

$$\vec{B} = B \check{s}$$

donde \check{s} es un versor en la dirección de \vec{B}

$$\vec{F}^{(1)} = \frac{1}{\mu} B \frac{\partial}{\partial s} (B \check{s}) = \frac{1}{\mu} B \frac{\partial B}{\partial s} \check{s} + \frac{B^2}{\mu} \frac{\partial \check{s}}{\partial s}$$

Como

$$\frac{\partial \check{s}}{\partial s} = \frac{1}{R_c} \check{n}$$

donde \check{n} es la normal principal de la línea de campo y R_c es el radio de curvatura, podemos poner

$$\vec{F}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) \check{s} + \frac{B^2}{\mu} \frac{\check{n}}{R_c}$$

Vemos que en la dirección normal a las líneas de \vec{B} , \check{n} , hay una resultante neta de la tensión si las líneas tienen curvatura, que en general no se compensa con la fuerza debida a la presión.

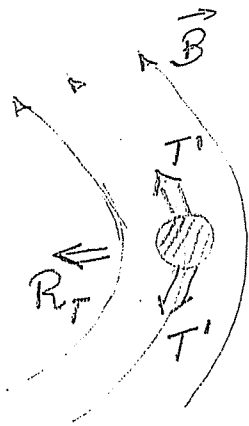
En cambio, en la dirección de \vec{B} la fuerza neta debida a la tensión es igual y de sentido contrario a la debida a la presión; esto debe ser así ya que la fuerza de Lorentz es perpendicular a \vec{B} .

Si analizamos el problema con las fuerzas superficiales tenemos una presión $P = \frac{B^2}{2\mu}$ en todas direcciones

nes y una tensión $T = B^2/\mu$ en dirección de \vec{B} ; podemos decir también que hay una compresión $P' = B^2/2\mu$ en cualquier dirección normal a las líneas y una tensión $T' = \frac{B^2}{\mu} - \frac{B^2}{2\mu} = \frac{B^2}{2\mu}$ en la dirección de las líneas; la primera da resultante neta si $|\vec{B}|$ varía en dirección perpendicular a \vec{B} y la segunda si las líneas de \vec{B} tienen curvatura

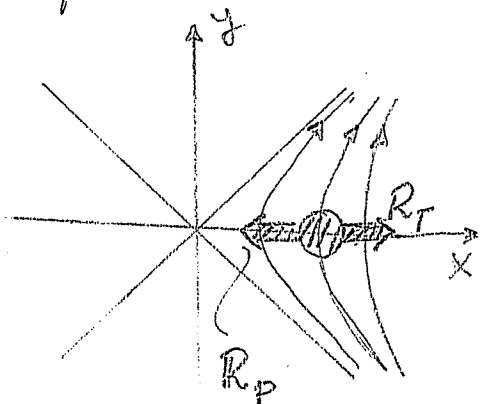
Ejemplos

- Líneas de \vec{B} curvas y equidistantes y elemento de plasma en la zona de mayor curvatura



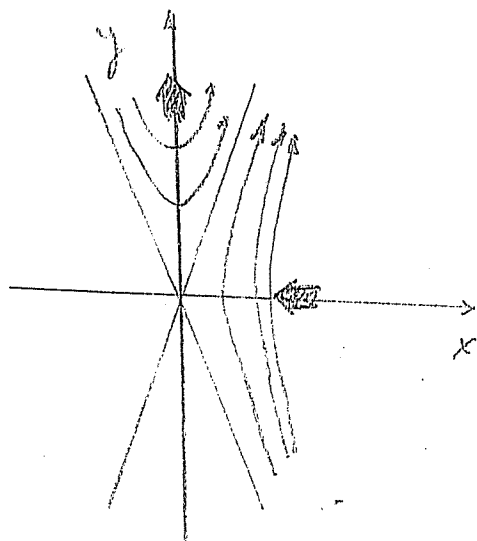
La resultante de P' es cero, ya que $|\vec{B}|$ no varía.

- En la distribución de campo $\vec{B} = y \vec{x} + x \vec{y}$ la densidad de corriente $\vec{J} = 0$; las líneas de campo son hipérbolas; el origen es lo que se llama un "punto X"



\vec{R}_P y \vec{R}_T se anulan mutuamente

Si en cambio las asíntotas de las curvas se acercan más al eje y , $\vec{J} \neq 0$.



En el eje x $R_D > R_T$

En el eje y $R_D < R_T$

Esto hace que estas configuraciones de campo (punto X) sean inestables.

Parámetros adimensionales

Estos parámetros dan la importancia relativa de fenómenos que compiten. Algunos son propios de la hidrodinámica y algunos específicos de la MHD. Mencionaremos algunos.

Números de Reynolds

$$Re = \frac{L v_0}{\nu}$$

donde $\nu = \eta_0 / \rho$ es la viscosidad cinemática; da la importancia relativa entre el término $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ y las fuerzas viscosas en la ecuación de movimiento. Si $Re \gg 1$ se puede despreciar el término viscoso fuera de las inmediaciones de un objeto rígido (capa límite). (Si $Re \ll 1 \Rightarrow$ desprecia $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ y en un prob. $\rho \nabla \cdot \vec{v} = -\nabla^2 \psi$??)

Número de Reynolds magnético

$$R_M = \mu \sigma v_0 L$$

da la importancia relativa entre los términos convectivo y difusivo en la ecuación de inducción, y es una medida del acoplamiento entre el campo \vec{B} y el plasma. Si $R_M \gg 1$ se puede considerar que las líneas de \vec{B} están "congeladas" en el plasma. Si $R_M \ll 1$ el acoplamiento es muy débil y domina la difusión.

Parámetro β del plasma

$$\beta = 2\mu p_0 / B_0^2$$

Es el cociente entre la presión del plasma y la presión magnética; si $\beta \ll 1$ la fuerza de Lorentz influye más que el gradiente de presión en el movimiento del plasma, salvo para configuraciones especiales de campo ($\vec{J} \parallel \vec{B}$).

Número de Mach

Es el cociente entre la velocidad del plasma y la velocidad del sonido $c_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$.

$$M = v_0 / c_s$$

Es una medida de la influencia que ejerce la compresibilidad del fluido en su movimiento, siendo baja si $M \ll 1$.

Número de Mach-Alfvén

En plasmas magnetizados en la aproximación

MHD se pueden propagar ondas magnéticas con una velocidad de propagación

$$v_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho}$$

En forma similar al número de Mach se define el número de Mach-Alfvén

$$M_A = \frac{v_0}{v_A}$$

De la importancia relativa entre el término $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ y la fuerza de Lorentz en la ecuación de movimiento.

Referencias

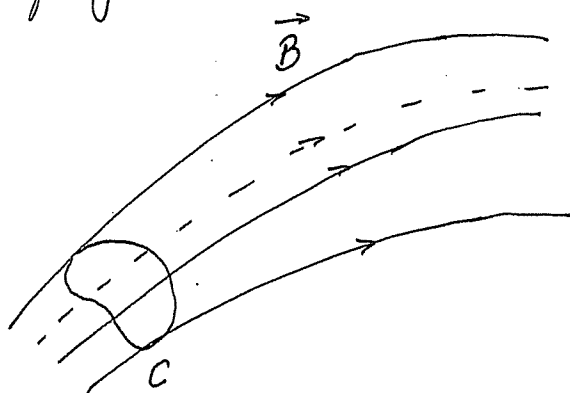
Jackson, J. D. - "Classical Electrodynamics" Cap. 10
Secciones 10.1, 10.2 y 10.3

Priest, E. R. "Solar Magnetohydrodynamics" - Cap 2.

Tubos de flujo y hojas de corriente

Hay dos estructuras que esquemmatizan situaciones que se suelen presentar en los plasmas magnetizados, y que es conveniente conocer su definición pues suelen aparecer nombrados en la literatura: tubos de flujo magnético y hojas de corriente.

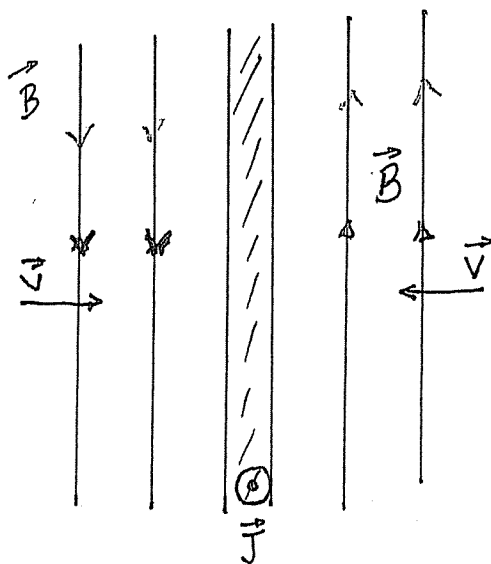
Tubos de flujo magnético: cuando el campo de inducción \vec{B} en una región varía lentamente en dirección perpendicular a sí misma, podemos considerar una curva cerrada y las líneas de \vec{B} que pasan por ella; el volumen encerrado por dichas líneas constituye el tubo de flujo.



La intensidad del tubo es el flujo de \vec{B} a través de cualquier sección del mismo, y que es igual en todo su largo (ya que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$). Si el campo está congelado, la intensidad del tubo permanecerá invariante al moverse el tubo con el plasma, aunque vaya cambiando su forma.

Hojas de corriente:

Si \vec{B} varía rápidamente en dirección perpendicular a sí mismo, el rotor de \vec{B} , y con el \vec{J} , pueden hacerse muy grandes. En particular, si se ponen en contacto dos regiones de campo de inducción diferente, en la superficie entre las dos habrá una discontinuidad tangencial de \vec{B} y por lo tanto entre ellas habrá una zona de densidad de corriente muy grande. Cuando no hay flujo de plasma a través de una discontinuidad tangencial se dice que se tiene una hoja de corriente, el ancho de la misma no es infinitesimal pero es pequeño y por lo tanto \vec{J} es grande y la difusión es muy alta. Una situación simplificada de alta simetría sería esquemáticamente



Cuando se trate el tema de reconexión se verán nuevamente.

También hay ranuras de corriente y folios.

hasta
10/9/13

IV

(1)

Representación de un campo de divergencia nula usando funciones escalares. Superficies magnéticas.

Lo que vamos a desarrollar es válido en general para todo campo de divergencia nula, pero aquí supondremos que tal campo es la inducción magnética \vec{B} .

Supongamos una superficie Σ tal que, en una cierta región, las líneas de \vec{B} no sean tangentes a la misma; en esa superficie definimos dos funciones φ y ψ de modo tal que las curvas $\varphi = \text{cte}$ y $\psi = \text{cte}$ constituyen un sistema de coordenadas que permiten determinar unívocamente cualquier punto en la región de Σ considerada.

Por cada punto de Σ cruza una línea de \vec{B} ya que hemos supuesto que \vec{B} no es tangente a Σ ; φ y ψ estaban originalmente definidas solo sobre Σ pero podemos darles valores en todo punto cercano a Σ especificando que sean constantes a lo largo de una línea de \vec{B} ; p sea asignarle a cada función el valor que tiene sobre Σ en el punto en que la correspondiente línea de \vec{B} la cruza. Por lo tanto, tanto $\vec{\nabla}\varphi$ como $\vec{\nabla}\psi$ deberán ser perpendiculares a \vec{B} ; o sea

$$\vec{B} = \alpha \vec{\nabla}\varphi \wedge \vec{\nabla}\psi$$

α escalar pero
no etc.

(2)

Imponemos la condición $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \alpha \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla}\varphi \wedge \vec{\nabla}\psi] + \vec{\nabla}\alpha \cdot [\vec{\nabla}\varphi \wedge \vec{\nabla}\psi] \\ &= \alpha \left[\vec{\nabla}\psi \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\varphi}_{=0}) - \vec{\nabla}\varphi \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\psi}_{=0}) \right] + \\ &+ \vec{\nabla}\alpha \cdot [\vec{\nabla}\varphi \wedge \vec{\nabla}\psi] = 0\end{aligned}$$

Que el producto mixto de tres vectores sea nulo significa que son coplanarios; como $\vec{\nabla}\varphi \nparallel \vec{\nabla}\psi$ podemos poner

$$\vec{\nabla}\alpha = C_1 \vec{\nabla}\varphi + C_2 \vec{\nabla}\psi$$

o sea

$$\alpha = \alpha(\varphi, \psi)$$

Resulta entonces

$$\vec{B} = \alpha(\varphi, \psi) \vec{\nabla}\varphi \wedge \vec{\nabla}\psi$$

O sea α es etc a lo largo de una línea de \vec{B} . La arbitrariedad en la elección de las funciones φ y ψ permite hacer una elección en la que $\alpha = 1$. Supongamos que tenemos φ y ψ con un cierto $\alpha(\varphi, \psi)$ y busquemos una función $\chi(\varphi, \psi)$ tal que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \chi \wedge \vec{\nabla} \psi$$

Como

$$\vec{\nabla} \chi(\varphi, \psi) = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \vec{\nabla} \varphi + \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \vec{\nabla} \psi$$

resulta

$$\alpha(\varphi, \psi) \vec{\nabla} \varphi \wedge \vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \vec{\nabla} \varphi \wedge \vec{\nabla} \psi$$

o sea

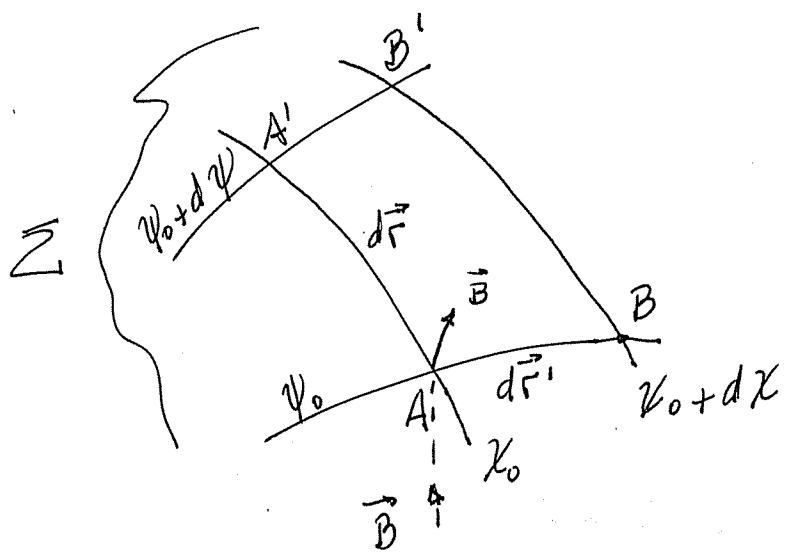
$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \alpha(\varphi, \psi)$$

mientras que no hay condiciones sobre $\frac{\partial \chi}{\partial \psi}$.

En conclusión, sin ninguna restricción podemos poner localmente

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \chi \wedge \vec{\nabla} \psi$$

El flujo infinitesimal de \vec{B} también se puede expresar en función de χ y ψ ; si consideramos sobre Σ líneas $\chi = \chi_0$,



$\chi = \chi_0 + d\chi, \psi = \psi_0,$
 $\psi = \psi_0 + d\psi$ nos queda un elemento de superficie $AA'B'B$; llamando $d\vec{r}$ al vector que va de A a A' y $d\vec{r}'$ al que va

de A a B tenemos que

$$d\psi = \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{r}$$

$$d\chi = \vec{\nabla}\chi \cdot d\vec{r}'$$

$$d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\chi = 0$$

$$d\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$$

El flujo infinitesimal lo podemos poner

$$\begin{aligned}
d\phi &= \vec{B} \cdot (d\vec{r}' \wedge d\vec{r}) = (\vec{\nabla}\chi \wedge \vec{\nabla}\psi) \cdot (d\vec{r}' \wedge d\vec{r}) = \\
&= d\vec{r}' \cdot [d\vec{r} \wedge (\vec{\nabla}\chi \wedge \vec{\nabla}\psi)] \\
&= d\vec{r}' \cdot [\vec{\nabla}\chi (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\psi) - \vec{\nabla}\psi (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\chi)] \\
&= (d\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}\chi) (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\psi) = d\chi d\psi
\end{aligned}$$

Resumiendo, en función de χ y ψ podemos poner

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\chi \wedge \vec{\nabla}\psi$$

$$d\phi = d\chi d\psi$$

Las líneas de inducción estarán tanto en las superficies $\chi = cte$ como en las superficies $\psi = cte$ y por lo tanto estarán en la intersección de ambas. Una superficie magnética en general es cualquier superficie que contiene las líneas de \vec{B} ;

a veces se reserva el nombre de superficie magnética a las que tienen alguna característica adicional; por ejemplo si se eligen funciones ψ regulares y uniformes pueden resultar funciones χ multiformes; en este caso se llama superficies magnéticas a las superficies $\psi = cte$.

Ejemplo

Usando coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , tomamos

$$\psi = \frac{r^2}{3}$$

$$\chi = \alpha \sin \theta \sin \phi, \quad \alpha = cte$$

O sea

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{2}{3} r \hat{r}, \quad \vec{\nabla} \chi = \frac{\alpha}{r} \sin \phi \cos \theta \hat{\theta} + \frac{\alpha \cos \phi}{r} \hat{\phi}$$

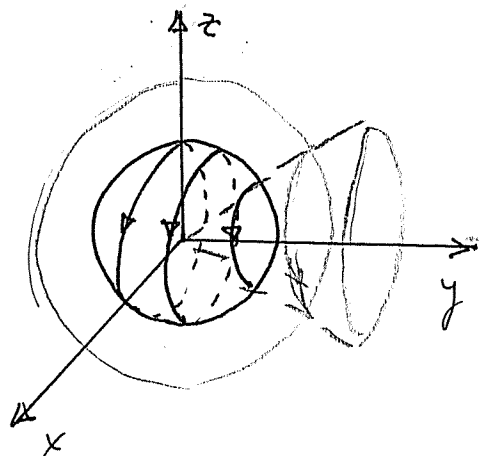
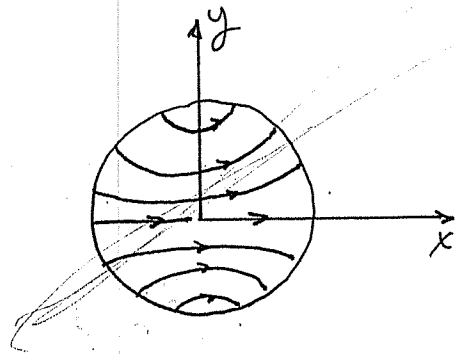
con lo que la inducción magnética es

$$B_r = 0$$

$$B_\theta = + 2\alpha \cos \phi \hat{\theta}$$

$$B_\phi = - 2\alpha \sin \phi \cos \theta \hat{\phi}$$

$$B_y = 0 \quad B_x = \alpha z \quad B_z = -\alpha x$$



Las superficies magnéticas

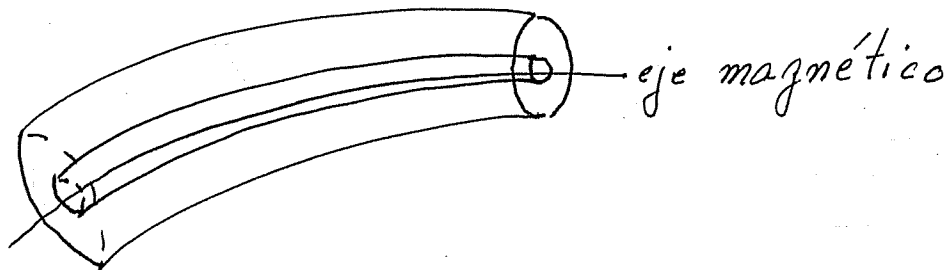
$\psi = cte$ son esferas; son

superficies cerradas y

están anidadas una dentro

de otra. Las superficies $\chi = cte$ son conos de eje y .

Cuando las superficies magnéticas son tubos - no necesariamente cilíndricos - anidados unos dentro de los otros, hacia el centro la superficie degenera en una curva, llamada eje magnético.



(Ref: C. Mercier).

Límite de conductividad infinita en los casos de equilibrios estáticos y flujos estacionarios

Tanto en el caso de equilibrios estáticos como de flujos estacionarios todas las magnitudes, para un punto fijo en el espacio, son independientes del tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Para que esto sea posible debe haber un equilibrio de fuerzas en el caso estático, o una igualdad con el término convectivo, en el caso de flujos estacionarios

$$0 = -\vec{\nabla} p + \vec{J} \wedge \vec{B} + \vec{F}$$

$$o' \quad \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{J} \wedge \vec{B} + \vec{F}$$

Para también tenemos que analizar la variación en el tiempo de la inducción magnética, para ver si la podemos considerar constante. De la ecuación de inducción

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{B},$$

donde η depende de la conductividad eléctrica

$$\eta = \frac{1}{\mu \sigma}$$

Se vio que, si el número de Reynolds magnéticos, $R_m = \sigma \mu v_0 l_0$, es mucho mayor que 1, el término difusivo se podía despreciar en general frente al término convectivo; esto sale de comparar los órdenes de magnitud de los distintos términos en la ley de Ohm

$$\frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Si l_0, v_0, B_0 son longitud de variación, velocidad e inducción magnética características, para los órdenes de magnitud podemos poner aproximadamente

$$\left| \frac{\vec{J}}{\sigma} \right| = \left| \frac{1}{\sigma \mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \right| \sim \frac{1}{\sigma \mu} \frac{B_0}{l_0},$$

$$\left| \vec{v} \wedge \vec{B} \right| \sim v_0 B_0,$$

con lo que

$$\frac{|\vec{J}/\sigma|}{|\vec{v} \wedge \vec{B}|} \sim \frac{1}{\sigma \mu v_0 l_0} = \frac{1}{R_M} ;$$

luego, salvo situaciones particulares (si $\vec{v} \parallel \vec{B}$, por ejemplo), si $R_M \gg 1$ el término \vec{J}/σ es mucho menor que el término $\vec{v} \wedge \vec{B}$ y la ley de Ohm se reduce a

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0$$

El número de Reynolds se puede hacer muy grande por dos razones: porque σ es muy grande o porque las longitudes características son muy grandes; en los problemas de astrofísica en general es esto último lo que sucede, siendo la escala de longitudes mucho mayor que en los problemas de laboratorio; pero hay situaciones, como por ejemplo en las hojas de corriente y la reconexión magnética, en las que el campo puede variar mucho en una pequeña distancia, y en esos casos hay que analizar con cuidado si se puede despreciar el término \vec{J}/σ en la ley de Ohm, o el término difusivo en la ec. de inducción. Como esta última ecuación resulta de tomar $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$, con \vec{E}

despejado de la ley de Ohm, si \vec{J}/σ es mucho menor que $\vec{v} \times \vec{B}$, tendremos por lo general una relación similar entre sus rotors, y el término difusivo se podrá despreciar; pero esto no siempre es así pues al tomar rotor la relación puede cambiar.

Una situación en la que hay que tener especial cuidado es en el caso estacionario, pues allí debería cumplirse

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 ;$$

en este caso no podemos suponer que el término difusivo es mucho menor que el convectivo pues la suma de los dos se debería anular; pero además hemos visto que el efecto que produce cada término es muy diferente y en general no podremos suponer tampoco que se cancelan entre sí. Luego, aunque anulamos $\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$, ya sea porque $\vec{v} = 0$ (caso estático) o porque relacionamos las variaciones espaciales de \vec{v} y \vec{B} de modo que el rotor se anule, nos quedará el término difusivo. Ahora bien, el tiempo de difusión

$$\tau = \sigma \mu l_0^2$$

es muy grande si σ es grande y las escalas l_0 son grandes; en una mancha solar por ejemplo

es del orden de 10^{14} seg. y para el núcleo de la tierra, del orden de 10^{12} seg; esto no significa que la verdadera duración sea esa, pues en ambos casos no es la difusión lo único que entra en juego. Para tiempos mucho menores que el tiempo de difusión podemos considerar el problema como estacionario si se cumplen las demás condiciones y tomar $\partial \vec{B} / \partial t \sim 0$.

Hacer $(1/\sigma) = 0$ en las ecuaciones es lo que se llama a veces MHD ideal.

Ver hoja 10'
Ecuaciones de la magnetohidrostática

~~Consideremos un medio de conductividad muy alta y tiempos mucho menores que el tiempo de difusión; imponiendo que las magnitudes sean independientes del tiempo y que la velocidad del plasma sea nula, las ecuaciones que gobiernan el equilibrio estático son~~

~~$$-\vec{\nabla} p + \vec{J} \wedge \vec{B} + \vec{F} = 0$$~~

~~$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$~~

~~$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J}$$~~

~~(donde en \vec{F} incluimos las fuerzas por unidad de volumen que no sean la de Lorentz ni la del gradiente de presión), una ecuación de estado, por ej la del gas ideal~~

~~$$p = \frac{f}{m} k_B T$$~~

La ec. de cont. de partículas volent. ρ no entra en estas ec. y su valor dep. del valor de T

Ecuaciones de la magnetohidrostática

Analizaremos bajo que condiciones es posible tener un equilibrio estático en un plasma magnetizado, o sea que las magnitudes sean independientes del tiempo y que $\vec{v} = 0$.

La ec. de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

se satisface idénticamente.

La ec. de inducción

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \vec{B}$$

implica que si $\vec{v} = 0$ el campo magnético siempre varía; ^(salvo campos, potenciales) se podría considerar \vec{B} constante si se consideran intervalos de tiempo mucho menores que el tiempo de difusión $\tau_d = \mu\sigma L^2$.

La ec. de movimiento se reduce a

$$0 = -\vec{\nabla} p + \vec{J} \wedge \vec{B} + \vec{F}'$$

(*) salvo que aparezca explícitamente en \vec{F}' (por ej $\vec{F}' = +\rho\vec{g}$)

donde
$$\vec{J} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

y
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

En estas ecuaciones no interviene el valor de la densidad; ésta quedará relacionada con la presión p a través de la ec. de estado

$$p = \frac{\rho}{m} k_B T.$$

La ecuación de calor $(\frac{\partial}{\partial t} (\frac{p}{\rho\sigma}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\frac{p}{\rho\sigma})) = -\mathcal{Q}$ implica que en el caso de equilibrio estático $\mathcal{Q} = 0$, lo que implicará ~~notaciones~~ condiciones a la temperatura. \Rightarrow

se puede reemplazar la ecuación de energía por una ley de variación de la Temperatura (observacional), y tanto la ec. de energía como la de estado por una ley politrópica $p = p(\rho)$

~~donde m es la masa de las partículas, y una ecuación de energía, o en su defecto conocer la ley de variación espacial de la temperatura (o dar por ej. una ley de politropía $p=f(\rho)$)
 La ecuación de conservación de masa se satisface idénticamente en el caso estático.~~

Vamos a analizar distintos casos, según que fuerzas sean predominantes y cuales se puedan despreciar:

- Campos potenciales ($\vec{J}=0$). En este caso se anula la fuerza de Lorentz por ser nula la densidad de corriente; la presión del plasma será uniforme o el $\vec{\nabla}p$ se compensará con otras fuerzas.
- Campos force-free - En este caso la fuerza de Lorentz se anula aunque la densidad de corriente y la inducción magnética sean no nulos porque se cumple $\vec{J} \parallel \vec{B}$; nuevamente, o la presión es constante o se compensa el $\vec{\nabla}p$ con otras fuerzas.
- Se tienen en cuenta solo el $\vec{\nabla}p$ y la fuerza de Lorentz; este caso tiene interés para analizar el confinamiento de un plasma por campos magnéticos.
- Se consideran el $\vec{\nabla}p$, la fuerza de Lorentz y una fuerza gravitatoria uniforme. Solo analizaremos una de las ecuaciones y, suponiendo \vec{B} dado, buscaremos la dependencia de la presión con la altura a lo largo de una línea de inducción.

Variación de la presión con la altura cuando actúan la gravedad y el campo magnético.

Supongamos que la fuerza de gravedad ^{por unidad de masa} es uniforme y actúa en la dirección z:

$$\frac{\vec{F}_g}{\rho} = -g \vec{z} \tag{1}$$

Si no hubiese campo magnético y las únicas fuerzas a considerar son las del gradiente de presión y la gravitación, en el equilibrio debe cumplirse

$$\vec{\nabla} p = -\rho g \vec{z} \tag{2}$$

por lo que p solo puede variar en la dirección z

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p m g}{k_B T} \tag{3}$$

Integrando

$$p(z) = p_0 \exp\left\{-\int_{z_0}^z \frac{m g}{k_B T(z)} dz\right\} \tag{4}$$

donde $p_0 = p(z_0)$ para todo x, y. Si la temperatura es uniforme

$$p(z) = p_0 e^{-(z-z_0)/\Lambda} \tag{5}$$

donde

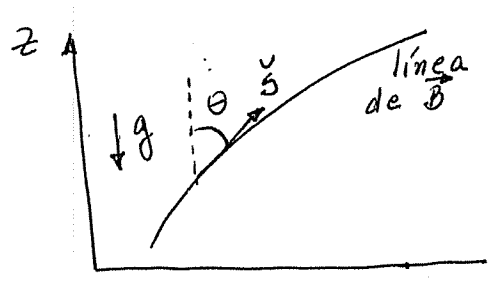
$$\Lambda = \left(\frac{m g}{k_B T}\right)^{-1} \tag{6}$$

es la escala de altura.

En presencia de una inducción magnética \vec{B} la ecuación de movimiento para el equilibrio queda

$$\vec{\nabla} p = -\rho g \vec{z} + \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (7)$$

Como en general $\vec{J} \wedge \vec{B}$ no está en la dirección z , p no dependerá solo de z . Pero podemos analizar como, en el caso de estar en equilibrio, la presión varía con la altura a lo largo de una dada línea de inducción. Si identificamos una línea con los valores de x e y a una cierta altura z_0 , a lo largo de una línea



$$p = p(x_0, y_0, s) = p(x_0, y_0, s(z)) \quad (8)$$

donde s es la longitud de arco; multiplicando (7) escalarmente por \vec{s} , vector tangente a la curva, tendremos

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho g \cos \theta + \underbrace{(\vec{J} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{s}}_{=0} \quad (9)$$

Como a lo largo de una línea

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial z} \cos \theta \quad (10)$$

resulta

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{\rho m g}{k_B T} \quad (11)$$

o sea

$$p[x_0, y_0, s(z)] = p_0(x_0, y_0) \exp \left[- \int_{z_0}^z \frac{mg}{k_B T(z)} dz \right] \quad (12)$$

La dependencia de la presión con la altura resulta similar al caso en que no hay campo magnético, pero el valor p_0 ya no es independiente de (x, y) sino que en general es distinto para cada línea: $p_0 = p_0(x_0, y_0)$; además, para obtener la dependencia de la temperatura con z hay que tener en cuenta la ecuación de energía, y en esta entra la estructura del campo magnético, por ejemplo en el término conductivo ya que la conductividad térmica es diferente en las direcciones paralela y transversal al campo magnético.

En el caso particular de que la temperatura sea uniforme a lo largo de una línea de campo,

$$p(x_0, y_0, s(z)) = p_0(x_0, y_0) e^{-\frac{(z-z_0)}{\Lambda}} \quad (13)$$

Si los fenómenos que se estudian ocurren en regiones con variaciones de altura mucho menores que Λ podemos considerar a la presión como cte a lo largo de cada línea de \vec{B} (o sea despreciar la gravedad en ese problema)

Campos potenciales

En este caso las ecuaciones de movimiento ^(con $\vec{J}=0$) y las ecuaciones para el campo \vec{B} aparecen desacopladas. Analizaremos solo estas últimas.

Como $\vec{J}=0$, las ecuaciones para \vec{B} resultan

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0 \tag{13}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{14}$$

de donde

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = 0$$

o sea

$$\nabla^2 \vec{B} = 0 \tag{15}$$

Como la densidad de corriente eléctrica es nula, al ser $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0$ podemos derivar \vec{B} de un escalar

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \psi \tag{16}$$

y de (14) resulta que el potencial escalar magnético satisface una ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{17}$$

Si se conocen ψ ó $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ ($\equiv B_n$) en una superficie cerrada, queda determinado ψ en el volumen encerrado por esa superficie.

La ecuación de Laplace es separable en

distintos sistemas de coordenadas; por ejemplo la solución general en coordenadas esféricas es

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-(l+1)}) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (18)$$

mientras que en coordenadas cilíndricas aparecen las funciones de Bessel.

Campos force-free

Se llaman así los campos en los que se anula la fuerza de Lorentz, aunque no se anule la densidad de corriente; luego debe cumplirse

$$\vec{J} \wedge \vec{B} = 0, \quad (19)$$

o lo que es lo mismo, \vec{J} y \vec{B} deben ser paralelos; de la ecuación

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J}$$

resulta que los campos force free satisfacen

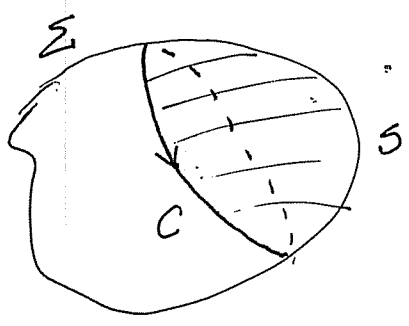
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \alpha(\vec{r}) \vec{B}; \quad (20)$$

la única condición sobre α es que debe ser constante a lo largo de cada línea de \vec{B} , ya que, tomando divergencia de la ecuación (20) tenemos

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{B}) = \alpha \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_{=0} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha$$

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha = 0 \quad (21)$$

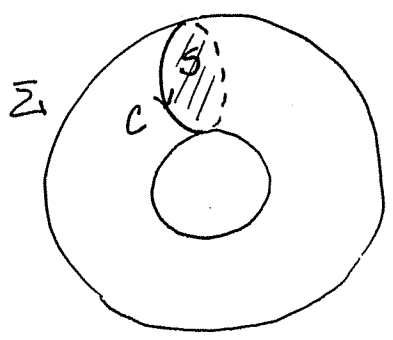
Esto también lo podemos interpretar como que las líneas de \vec{B} (y por lo tanto de \vec{J}) están sobre superficies de $\alpha = cte$; a la inversa, si α no es ^{identicamente} una constante, las superficies de $\alpha = cte$ son superficies magnéticas. Para un campo force-free si una superficie magnética y de α constante Σ fuera cerrada no podría ser simplemente conexa; para verlo tomemos sobre Σ una línea de \vec{B} , que será una



curva cerrada C , que concatena una superficie abierta S que es parte de Σ ; si calculamos el flujo de \vec{B} a través de S será cero:

$$0 = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

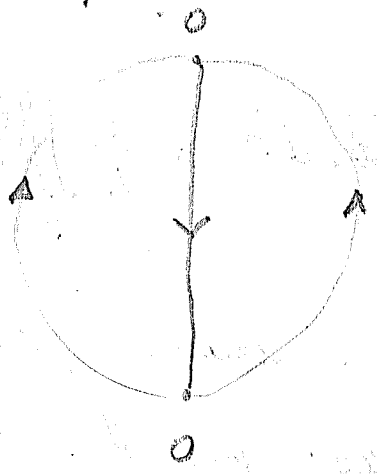
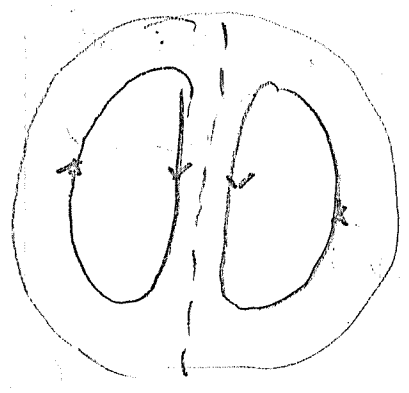
donde hemos usado que α es cte en S y el teorema de Stokes; por otro lado la integral curvilínea de \vec{B} sobre una línea de \vec{B} es en general no nula, con lo que se llega a una contradicción. (de lo contrario, \vec{B} debe anularse en algún punto y cambio de signo). En cambio si Σ fuera múltiplemente conexa, si la línea de \vec{B} fuese una curva cerrada simple, la superficie S que rodea no forma parte de Σ y el flujo de \vec{B} a través de S puede ser distinto de cero. Además



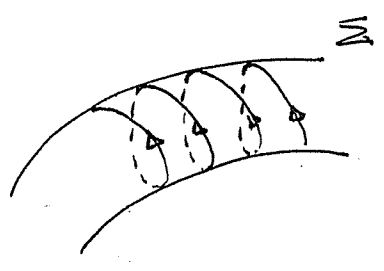
de ser distinto de cero. Además

Esto no es general. Hay situaciones límite en que si hay una superf. magnet simplemente conexa. Supongo una simetría de revolución

Las superf. magnet internas son múltipl. conexas pero el límite es la esfera: los polos son puntos de campo nulo



puede suceder que las líneas de \vec{B} no sean curvas cerradas simples, sino una forma parecida a una hélice



Si se tiene equilibrio en una región con bajo β (donde $\beta = 2\mu p_0/B_0^2$), por ejemplo en un gas ionizado muy tenue en el que hay un campo magnético fuerte de modo que el gradiente de presión del plasma sea mucho menor que el gradiente de presión magnética, y en la que se puedan despreciar otras fuerzas, es de esperar un campo aproximadamente force-free, pues de no ser \vec{J} aproximadamente paralelo a \vec{B} , la fuerza de Lorentz sería mayor que $\vec{\nabla} p$. Cuando veamos los teoremas de energía magnética mínima veremos que los campos force free tienen una importancia especial.

Los campos force-free matemáticamente son similares a los flujos de Beltrami de hidrodinámica, que cumplen $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

Cuando α es independiente de \vec{r} y es por lo tanto la misma para todas las líneas de \vec{B} , se tienen

los llamados campos force-free lineales, o de α constante. Tomando rotor de la ecuación (20) se tiene que un campo force-free lineal satisface

$$(\nabla^2 + \alpha^2) \vec{B} = 0 \quad (22)$$

Para algunos ejemplos simples de campos force-free lineales.

Supongamos primero que \vec{B} solo tiene componentes y y z , y que depende solo de x .

$$\vec{B} = (0, B_y(x), B_z(x)) \quad (23)$$

con lo que se satisface $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$; de la condición force free podemos poner

$$0 = (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} (B^2/2),$$

o sea

$$\vec{\nabla} (B^2) = \frac{d}{dx} (B_y^2 + B_z^2) \hat{x} = 0$$

Integrando

$$B_y^2 + B_z^2 = \text{cte} = B_0^2 \quad (24)$$

Por otro lado, como

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})_z = \alpha B_z$$

$$\frac{dB_y}{dx} = \alpha B_z = \alpha \sqrt{B_0^2 - B_y^2}$$

$$\int \alpha dx = \int \frac{dB_y}{\sqrt{B_0^2 - B_y^2}} = \arcsin \frac{B_y}{B_0} + cte$$

Tomando $B_y(0) = 0$, se tiene la solución

$$\begin{cases} B_y = B_0 \sin \alpha x \\ B_z = B_0 \cos \alpha x \end{cases} \quad (25)$$

Las líneas de inducción son rectas contenidas en planos $x = cte$, paralelas al eje z si $\alpha x = n\pi$ y paralelas al eje y si $\alpha x = (n + \frac{1}{2})\pi$, con inclinación que va variando entre ambos.

Otro ejemplo simple, pero con simetría cilíndrica se puede obtener si suponemos que $B_r = 0$ y que solo hay dependencia en r (con lo que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$); la ecuación $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \alpha \vec{B}$ se puede escribir

$$\alpha B_\phi = -\frac{dB_z}{dr}$$

$$\alpha B_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\phi)$$

Reemplazando la ^{1a} en la ^{2a} nos queda una ecuación para $B_z(r)$

$$\frac{d^2 B_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} + \alpha^2 B_z = 0 \quad (26)$$

que es una ecuación de Bessel de orden cero; luego,

para $\alpha > 0$

$$\begin{cases} B_z = A J_0(\alpha r) \\ B_\phi = A J_1(\alpha r) \end{cases} \quad (27)$$

Las líneas de inducción están sobre cilindros que son entonces superficies magnéticas; la ecuación de las líneas es

$$\frac{r d\phi}{B_\phi} = \frac{dz}{B_z}$$

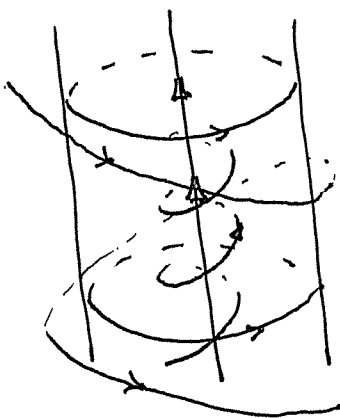
o

$$z - r \frac{B_z}{B_\phi} \phi = \text{cte} \quad (28)$$

que son hélices; el paso de la hélice

$$r \frac{B_z(r)}{B_\phi(r)} 2\pi = 2\pi r \frac{J_0(\alpha r)}{J_1(\alpha r)}$$

depende del radio y de α . Para $r=0$ es $B_\phi=0$ y la línea de inducción coincide con el eje de los cilindros: el eje magnético es el eje z ; para el radio tal que $\alpha r = \text{primer cero de } J_0$, solo habrá componente ϕ y las líneas de inducción son círculos; para radios mayores el signo de B_z cambia



Soluciones más generales en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas se pueden encontrar en Priest; soluciones con simetría helicoidal en Agim y Tataronis (1985) o L.J. Palumbo (1993). Por ejemplo en coordenadas cilíndricas suponiendo invariancia en z resulta ($\alpha > 0$)

$$B_r = - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{m}{\alpha r} J_m(\alpha r) \sin m\varphi \tag{29}$$

$$B_\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{m}{\alpha r} J_m(\alpha r) - J_{m-1}(\alpha r) \right) \cos m\varphi$$

$$B_z = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(\alpha r) \cos m\varphi$$

A semejanza de lo que sucede en el caso de los campos potenciales, en los estados force-free las ecuaciones para los campos quedan desacopladas de las ecuaciones de movimientos y de estado.

Equilibrios magnetostáticos cuando actúan el ^{hidro} gradiente de presión y la fuerza de Lorentz

En el caso de que las fuerzas a considerar sean únicamente el $\vec{\nabla} p$ y la fuerza de Lorentz, la ecuación de equilibrio estático es

$$\vec{\nabla} p = \vec{J} \wedge \vec{B} \tag{30}$$

junto con

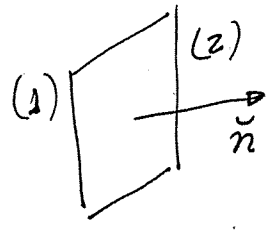
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J}$$

Estas ecuaciones quedan desacopladas de las ecuaciones de estado y de energía, que servirán posteriormente para determinar ρ y T si se requieren. En cambio están acopladas la ecuación de movimiento con la de los campos pues no para todo campo de inducción el producto $\vec{J} \wedge \vec{B}$ se puede expresar como un gradiente.

La reducción de este problema permite evaluar cuando es posible ^{obtener} el confinamiento de un plasma únicamente por fuerzas magnéticas. El ejemplo más simple de confinamiento magnético de un plasma es un "pinch cilíndrico", que veremos con más detalle más adelante; sin embargo un pinch cilíndrico no es un sistema cerrado pues en los extremos del cilindro no hay confinamiento magnético.

Para el análisis del equilibrio de fuerzas entre dos regiones separadas por una superficie, recordemos que la fuerza de Lorentz por unidad de superficie que ejerce (2) sobre (1) es



$$T_i = \frac{1}{\mu} (\vec{B} \cdot \vec{n}) B_i - \frac{B^2}{2\mu} n_i$$

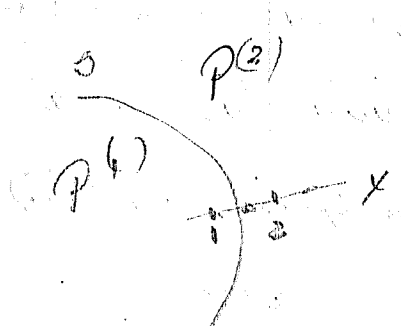
donde el 1^{er} término es una tensión a lo largo de \vec{B} y el segundo es la presión magnética. Si la superficie de separación es una superficie magnética, $(\vec{B} \cdot \vec{n}) = 0$ y solo contribuye la presión magnética a la fuerza por unidad de superficie ejercida entre dos elementos adyacentes.

Una propiedad importante de estos equilibrios se puede obtener de la ecuación (30), multiplicándola escalarmente por \vec{B} o por \vec{J} resulta

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} p \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} p \cdot \vec{J} &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Por lo tanto las superficies de $p = \text{cte}$ son superficies magnéticas, aunque no toda superficie magnética es necesariamente una superficie de $p = \text{cte}$; asimismo la densidad de corriente estará en las superficies de $p = \text{cte}$. Si el plasma está confinado las líneas de inducción no podrán cruzar la superficie límite S . Si el plasma confinado está inmerso en vacío, $p = 0$ sobre S ; a veces se considera que es $p = \text{cte} \neq 0$ y que externamente la presión magnética es mayor de modo que $p + p_{\text{Mag}}^{(\text{int})} = p_{\text{Mag}}^{(\text{ext})}$ sobre S ; en este caso se generará una corriente superficial pues B_{tang} no será constante; pero en una situación de equilibrio no es aconsejable, a mi criterio, suponer que se tienen corrientes superficiales pues

Se tiene un campo magnético \vec{B} en un espacio tridimensional. Se desea encontrar una función escalar P tal que $\vec{B} = \nabla P$. Para ello, se debe verificar que el campo sea irrotacional, es decir, $\nabla \times \vec{B} = 0$. Si esto se cumple, entonces existe una función P que satisfaga la condición.



$$P = p + p_{mag}$$

Integro la ec. de equilibrio entre 1 y 2 (muy cercano a S)

$$\int_1^2 \vec{\nabla} P \cdot d\vec{r} - \int_1^2 (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) B \cdot d\vec{r} = 0$$

$d\vec{r} = dx \vec{i}$; si S es superficie magnética, \vec{B} no tendrá componente x en el camino de integ.

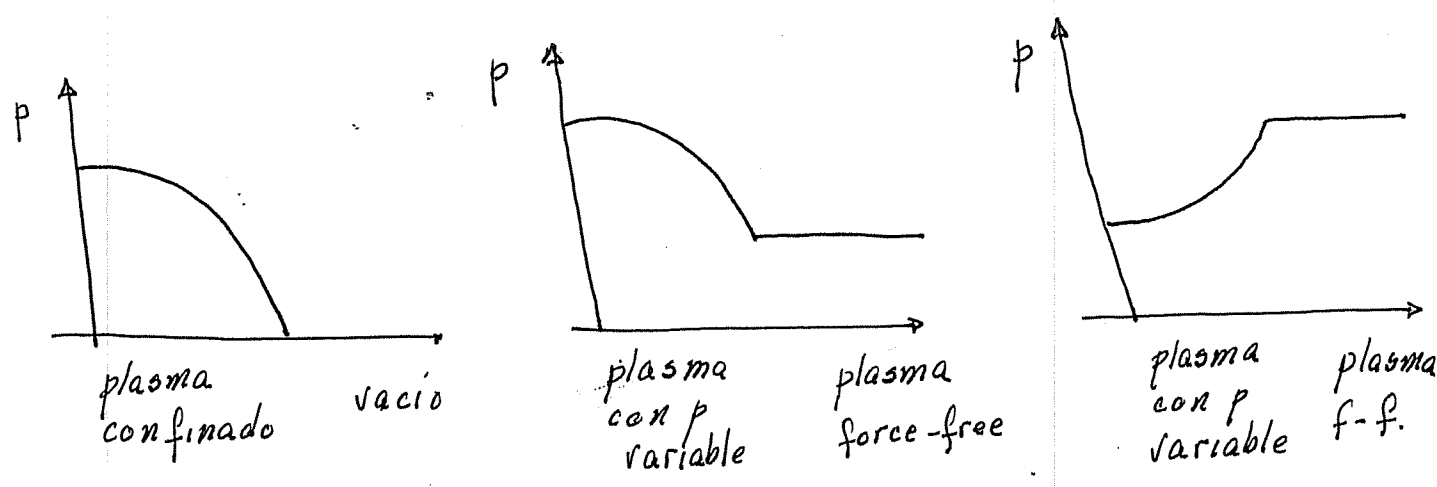
$$\int_1^2 \frac{\partial P}{\partial x} dx - \int_1^2 (B_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z}) dx = 0$$

$$P(2) - P(1) = \left(B_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) (y_2 - y_1) \rightarrow 0 \text{ para } x_2 \rightarrow x_1$$

$\rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial B_z}{\partial z} \text{ toman valores finitos}$

en cambio $\frac{\partial P}{\partial z}$ no deliforma sobre en $P(2) \rightarrow P(1)$

eso representa un τ pequeño y disipación. Otras situaciones de interés ocurren cuando un plasma de presión variable está rodeado por un plasma force free; en estos casos el confinamiento es en parte magnético y en parte por el plasma exterior; incluso puede pensarse que el plasma exterior tenga mayor presión que el interior y que el campo magnético impida que este colapse. Esquemáticamente



Una consideración importante es que, de acuerdo a un corolario del teorema del virial (Shafarov 1966), un plasma no puede ser confinado magnéticamente si no hay o un campo magnético originado por corrientes externas al plasma, o una corriente total no nula dentro del plasma (en el caso de una columna confinada). No haremos la deducción del teorema del virial, pero este resultado se obtiene escribiendo la ecuación de equilibrio en la forma de divergencia de un tensor

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} = 0,$$

calculando

$$\frac{\partial (x_k T_{ik})}{\partial x_i}$$

e integrando sobre un volumen V rodeado por una superficie S ; resulta

$$\int_V \left(3p + \frac{B^2}{2\mu} \right) dV = \oint_S \left\{ \left(p + \frac{B^2}{2\mu} \right) \vec{r} \cdot d\vec{S} - \frac{(\vec{B} \cdot \vec{r})(\vec{B} \cdot d\vec{S})}{\mu} \right\} \quad (32)$$

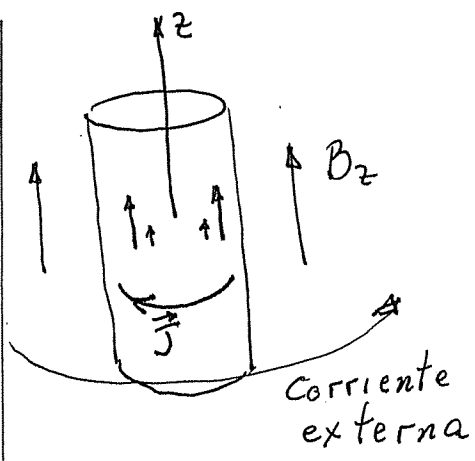
Si el plasma está contenido en un volumen V' finito y todo el campo de inducción \vec{B} está originado en corrientes dentro del plasma, \vec{B} decaerá como $1/r^3$; si la superficie S la hacemos ir a infinita, la integral superficial se anula, ya que $B \rightarrow 0$ ^{como $1/r^3$} y $p=0$, pero la integral de volumen no, y la relación (32), que prove-

nía de suponer equilibrio en el plasma, no se cumple. En el caso de que el plasma esté confinado en una columna, se puede evitar que la integral superficial se anule haciendo que por el plasma fluya una corriente total no nula (con lo que B decae como $1/r$).

Pinch cilíndrico

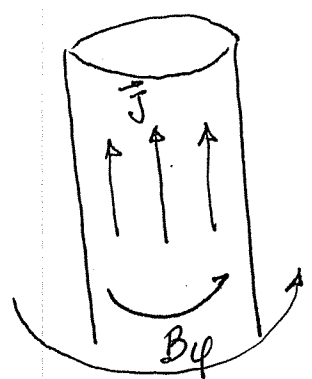
La configuración de equilibrio más simple en la que la presión de un plasma es contrarrestada únicamente por fuerzas magnéticas es en un pinch cilíndrico. Esencialmente hay dos formas de obtener confinamiento con esta simetría, una con un campo magnético de origen externo, y la otra generando

una corriente axial dentro del plasma. En el 1º caso se tenemos una inducción magnética B_z que al penetrar en el plasma va disminuyendo su intensidad, deberá haber en el plasma una densidad de corriente en dirección $(-\hat{\phi})$.



La fuerza $\vec{J} \wedge \vec{B}$ es hacia adentro en la dirección $(-\hat{r})$.

En el 2º caso, una densidad de corriente J_z producirá una inducción B_ϕ y nuevamente $\vec{J} \wedge \vec{B}$ dará una fuerza hacia adentro.



En el primer momento habrá en general una contracción abrupta del plasma hasta que el $\vec{\nabla} p$ compense la fuerza de Lorentz. Analizaremos la situación de equilibrio estático en el 2º caso.

Consideremos un cilindro infinito de plasma con una densidad de corriente axial que dependa únicamente de r

$$\vec{J} = J(r) \hat{z}$$

La inducción magnética resultante

$$\vec{B} = B(r) \hat{\phi}$$

está relacionada con J a través de

$$B(r) = \frac{\mu}{2\pi r} I(r) = \frac{\mu}{r} \int_0^r r' J(r') dr' \quad (33)$$

La ecuación de movimiento para el equilibrio estático es

$$0 = -\vec{\nabla} p + \vec{J} \wedge \vec{B} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{\mu} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right)$$

$$= -\vec{\nabla} p + \frac{1}{\mu} B \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} [B(r) \check{\varphi}] - \frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) \check{r}$$

Teniendo en cuenta que $\partial \check{\varphi} / \partial \varphi = -\check{r}$, el gradiente de la presión tendrá solo componente r

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{B^2}{\mu r} - \frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) = -\frac{1}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B^2) \quad (34)$$

Integrando

$$p(r) = p(0) - \frac{1}{2\mu} \int_0^r \frac{1}{r'^2} \frac{d}{dr'} (r'^2 B^2) dr'$$

Si suponemos que el plasma está en casi su totalidad confinado en $r < R$, entonces para $r \rightarrow R$, $p \rightarrow 0$; luego

$$p(0) = \frac{1}{2\mu} \int_0^R \frac{1}{r'^2} \frac{d}{dr'} (r'^2 B^2) dr'$$

con lo que

$$p(r) = \frac{1}{2\mu} \int_r^R \frac{1}{r'^2} \frac{d}{dr'} (r'^2 B^2) dr' \quad (35)$$

Podemos encontrar una relación entre el valor medio de p , el radio de confinamiento R y la corriente eléctrica total I , que es independiente de la forma que toma $B(r)$.

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r p(r) dr ;$$

integrando por partes:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{R^2} \left[\int_0^R r^2 p(r) dr - \int_0^R r^2 \frac{dp}{dr} dr \right].$$

Reemplazando (34) se obtiene

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2\mu R^2} \int_0^R \frac{d}{dr} (r^2 B^2) dr = \frac{B^2(R)}{2\mu} \tag{36}$$

Sea que el valor medio de la presión es igual a la presión magnética en el borde. Por otro lado, de (33)

$$B(R) = \frac{\mu I}{2\pi R}$$

resultando

$$\langle p \rangle = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^2} \tag{37}$$

Veamos dos ejemplos

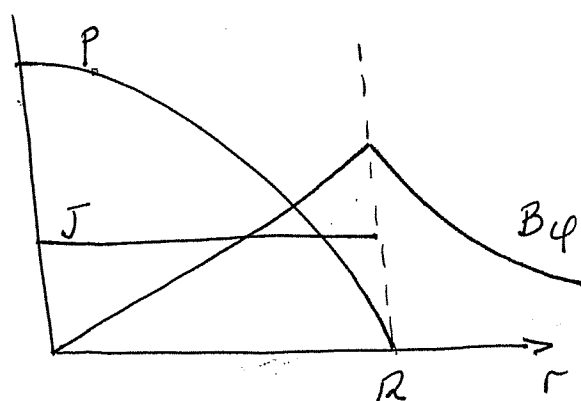
$$10) \quad J(r) = \begin{cases} J_0 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Esto da

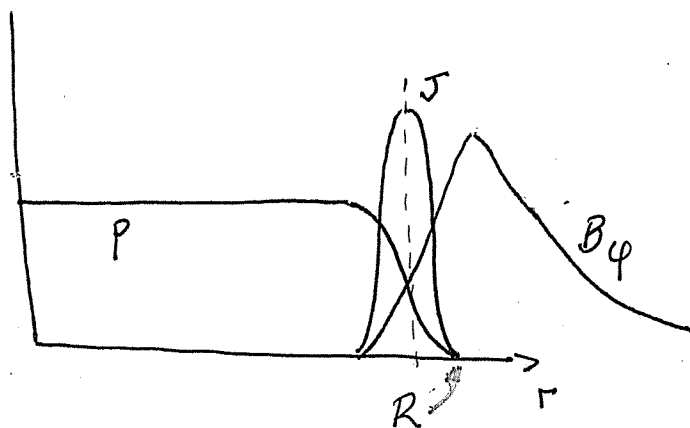
$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu I r}{2\pi R^2} & r < R \\ \frac{\mu I}{2\pi R} & r > R \end{cases}$$

y, de (35),

$$p(r) = \frac{1}{2\mu} \int_r^R \frac{1}{r'^2} \frac{d}{dr'} \left[\left(\frac{\mu I}{2\pi R^2} \right)^2 r'^4 \right] dr' = \frac{\mu I^2}{4\pi^2 R^4} (R^2 - r^2)$$



2º) En el segundo ejemplo supondremos que la corriente está confinada a una capa fina en la superficie del plasma; la inducción magnética se anula en el interior y allí la presión será constante.



Estos pinch cilíndricos están sujetos a inestabilidades que veremos más adelante.

Flujos estacionarios

Para un plasma de conductividad muy alta, considerando periodos de tiempo mucho menores que el tiempo de difusión, los flujos estacionarios obedecen a:

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{J} \wedge \vec{B} + \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

más una ecuación de estado y una ecuación de conservación de energía. En este caso, aun suponiendo que $\vec{F} = 0$, todas las ecuaciones están acopladas, no solo la de movimientos con la de los campos, sino que también hay que tratar conjuntamente la de conservación de la masa, la de estado y la de conservación de energía.

Hay situaciones en que se pueden hacer aproximaciones; por ejemplo si $\rho \gg 1$ de modo que la fuerza de Lorentz influya poco en el movimiento, se determina \vec{v} y después para ese campo de velocidades se obtiene \vec{B} .

Conviene observar que el hecho de que el flujo sea estacionario no quiere decir que sobre cada elemento de plasma las fuerzas estén en equilibrio; si hay variación de la velocidad en la dirección del flujo el elemento de plasma estará acelerado.

Teorema de Taylor - Proudman

Movimientos estacionarios lentos de un plasma perfectamente conductor que posee un campo mag. uniforme \vec{B}_0 , no tendrán variación en la dirección de \vec{B}_0 (~~sección $\vec{v} \cdot \vec{B}_0 = \text{constante}$~~ .)

Lo demostraremos reemplazando la cond. de "lento" por "incompresible"; por ser perfect. conductos

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

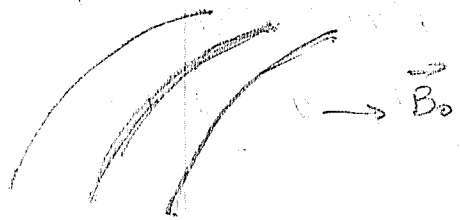
$$\circ \text{ sea } (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0$$

Pero $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = 0$ por ser \vec{B} unif.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \text{ por incomp.}$$

$$\Rightarrow (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 0, \quad \vec{v} \text{ no varía en la dir. de } \vec{B}$$



Que el movimiento sea lento, y por lo tanto sus variaciones son pequeñas ($\omega \ll \omega_c$) hace que se pueda usar la cond. de incompresibilidad, que es lo que en realidad se usa para la demostración para fluidos lentos.

Teorema de Taylor - Proudman

"Movimientos estacionarios lentos de un plasma perfectamente conductor que posee un campo magnético uniforme \vec{B}_0 , no tendrán variación en la dirección de \vec{B}_0 "

Lo demostraremos reemplazando la condición de "lentos" por incompresibles. Por ser el plasma perfectamente conductor $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ^{el flujo} estacionario

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

o sea $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0$ (*)

Pero $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$,
 $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = 0$ por ser \vec{B} uniforme
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ por incompresibilidad

Luego (*) se reduce a

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 0$$

lo que implica que \vec{v} no varía en la dirección de \vec{B} .

Nota: si el movimiento es lento de modo que $v \ll C_s$, se puede hacer la aproximación de incompresibilidad.

Una propiedad interesante de gran interés astrofísico está dada por el teorema de isorotación de Ferraro.

"Para un plasma perfectamente conductor con un flujo estacionario puramente rotacional y axisimétrico y con un campo \vec{B} estacionario axisimétrico, la velocidad angular es constante a lo largo de las líneas del campo \vec{B} "

Si utilizamos coordenadas cilíndricas (r, φ, z) tenemos

$$\vec{v} = v_{\varphi}(r, z) \check{\varphi}$$

$$\vec{B} = B_r(r, z) \check{r} + B_z(r, z) \check{z} + B_{\varphi}(r, z) \check{\varphi}$$

Si el plasma es estacionario y perfectamente conductor, de la ecuación de inducción

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

De la relación vectorial:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

teniendo en cuenta que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \check{r}}{\partial \varphi} = \check{\varphi}, \quad \frac{\partial \check{\varphi}}{\partial \varphi} = -\check{r}$$

y que en este caso

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} &= \left(\frac{v_{\varphi}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (B_r \check{r} + B_z \check{z} + B_{\varphi} \check{\varphi}) = \\ &= \frac{v_{\varphi}}{r} (B_r \check{\varphi} - B_{\varphi} \check{r}) \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma \quad (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= (B_r \frac{\partial}{\partial r} + B_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}) (v_\phi \hat{\phi}) \\ &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla} v_\phi) \hat{\phi} - B_\phi \frac{v_\phi}{r} \hat{r} \end{aligned}$$

resulta

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} v_\phi) \hat{\phi} - B_\phi \frac{v_\phi}{r} \hat{r} - \frac{v_\phi}{r} (B_r \hat{\phi} - B_\phi \hat{r}) = 0$$

Finalmente

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) = 0.$$

Luego la velocidad angular (v_ϕ/r) no varía a lo largo de \vec{B} .

~~Este resultado también es válido para flujos más generales ($v_r \neq 0, v_z \neq 0$, con algunas condiciones), pero con la restricción de que $B_\phi = 0$ (? si $B_\phi = 0$ y hay asimetría $\Rightarrow v_\phi = 0$ y no hay rotación)~~

En los casos bi-dimensionales en las que las magnitudes físicas dependan solo de dos coordenadas (no necesariamente cartesianas), los problemas estacionarios en MHD ideal se pueden tratar empleando la metodología de funciones corrientes como veremos en la sección siguiente.

Referencias

- C. Mercier - Lectures in plasma physics - The MHD approach to the problem of plasma confinement in closed magnetic configurations - Commission of the European Communities (EUR 5127e)
- L. J. Palumbo - Tesis doctoral (FCAG-UNLP)
- E. R. Priest - Solar Magnetohydrodynamics - Cap. 3.
- V. D. Shafranov - Plasma Equilibrium in a magnetic field - Reviews of Plasma Physics $\underline{2}$ pp. 103-151 - (1966)
- Agim, Y. Z. and Tataronis, J. A. (1985), J. Plasma Physics 34, 337.
- Jackson, J. D. "Classical Electrodynamics" - Sec. 10.5

Equilibrios estáticos y flujos estacionarios con una simetría

Supongamos que en un sistema MHD exista una simetría, de modo que es posible definir un sistema de coordenadas tal que todas las magnitudes sean independientes de una de las coordenadas, que llamaremos coordenada ignorable. En ese caso el sistema de ecuaciones de la MHD ideal, tanto para el equilibrio estático como para los flujos estacionarios - cuando $\vec{F} = 0$ o toma formas particulares - puede reducirse a una única ecuación diferencial. En el caso de flujos estacionarios es necesario hacer una suposición sobre si el flujo es adiabático, incompresible, politrópico, con densidad constante, etc., que en realidad es una suposición indirecta sobre el balance de energía; la ecuación diferencial mencionada queda, para los flujos, acoplada, en general, a una ecuación para la densidad o para la presión. En el caso de equilibrio estático la situación es más simple pues ^(*) las ecuaciones para los campos y la de movimiento están desacopladas de la ecuación de estado y de energía, pues desaparece ρ de la de movimiento.

Para describir adecuadamente la simetría

(*) la ec. de conservación de la masa se satisface automáticamente

de un sistema a veces es necesario usar coordenadas no ortogonales; por ejemplo para simetría helicoidal, las coordenadas helicoidales son no ortogonales.

Veamos algunas definiciones que necesitaremos. Dado un sistema de coordenadas (x^1, x^2, x^3) en un espacio Riemanniano, la distancia infinitesimal está dada por

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1)$$

donde las g_{ij} son las componentes covariantes del tensor métrico. La relación con las componentes contravariantes está dada por

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (2)$$

Designaremos por g al determinante de las g_{ij}

$$g = \|g_{ij}\| \quad (3)$$

Un vector \vec{V} puede estar dado por sus componentes covariantes V_i o contravariantes V^i

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}^1 + V_2 \vec{e}^2 + V_3 \vec{e}^3 \quad (4)$$

$$\vec{V} = V^1 \vec{e}_1 + V^2 \vec{e}_2 + V^3 \vec{e}_3$$

donde los vectores - no necesariamente unitarios - de

las bases contravariante y covariante están dadas respectivamente por

$$\vec{e}^i = \vec{\nabla} x^i \quad \text{base contra-}v. \quad (5)$$

$$\vec{e}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j} \quad \text{base co-var.}$$

Los vectores \vec{e}^i son normales a las superficies coordenadas ($x^i = ct$), y los vectores \vec{e}_j son tangentes a las líneas coordenadas ($x^i = ct$, $i \neq j$). Si las coordenadas no son ortogonales estos vectores no coinciden, por lo menos para algún j . Se cumplen las siguientes relaciones

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j \quad (6)$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij}$$

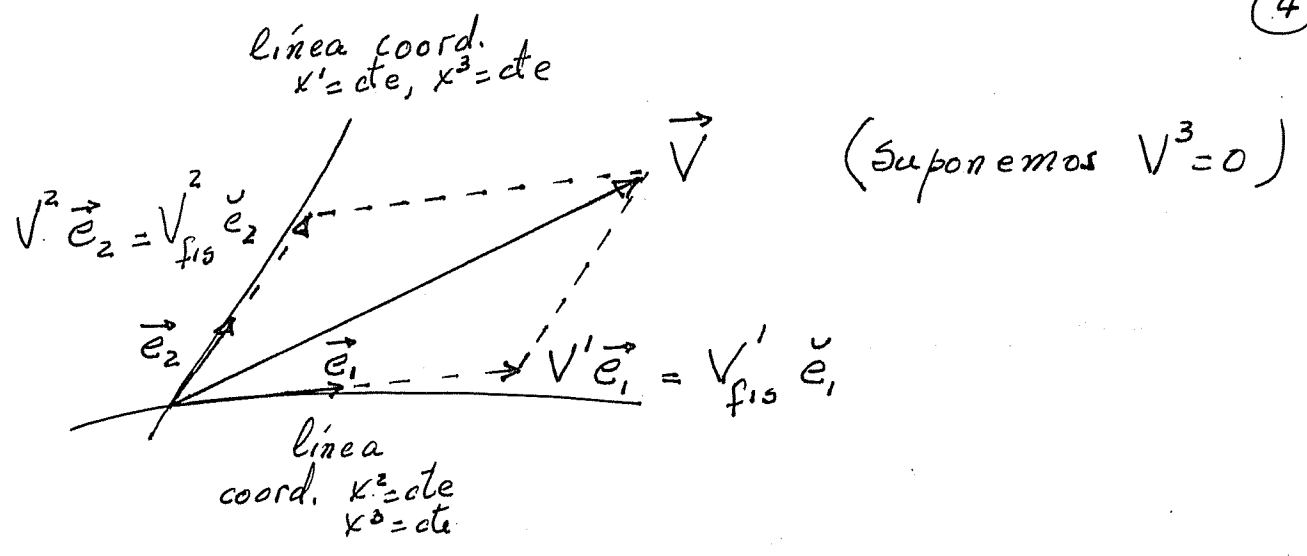
$$\vec{e}_i = \sqrt{g} [\vec{e}^j \wedge \vec{e}^k] \quad (i, j, k) \text{ permut. cíclica de } (1, 2, 3)$$

La relación entre componentes covariantes y contravariantes de un vector se da a través del tensor métrico

$$V_i = g_{ij} V^j \quad (7)$$

y la relación con las componentes físicas es

$$V_{\text{fis}}^i = \sqrt{g_{ii}} V^i \quad (\text{sin suma}) \quad (8)$$



Se usarán las componentes covariantes y contra-variantes y no las físicas, pues ante cambios de coordenadas estas últimas no se transforman como un vector (tensor de rango 1)

Algunas operaciones vectoriales en función de las componentes covariantes y contravariantes son

$$\begin{aligned}
 (\vec{A} \wedge \vec{B})_i &= \sqrt{g} [A^j B^k - A^k B^j] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g}} [i \quad k - k \quad j] \\
 (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} A^j)
 \end{aligned}
 \quad \begin{array}{l}
 (i, j, k) \\
 \text{var. cíclica } (g) \\
 \text{de } (1, 2, 3)
 \end{array}
 \quad (10)$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \right) \quad (11)$$

$$(\vec{\nabla} \phi)_j = \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \quad (12)$$

(Santaló, Lichnerowicz)

Función corriente o función de Stokes

Supongamos que tenemos coordenadas $(x^1, x^2, x^3) = (\alpha, \beta, \gamma)$, donde γ es una coordenada ignorable; por ejemplo γ podría ser ϕ en un sistema de coordenadas cilíndricas si hubiese simetría axial, o z si hubiese simetría de traslación. Supondremos que el tensor métrico no depende tampoco de γ . Consideremos una magnitud vectorial \vec{V} de divergencia nula; de (10):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\sqrt{g} V^\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\sqrt{g} V^\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (\sqrt{g} V^\gamma) \right] = 0$$

= 0

por lo tanto el diferencial

$$d\psi = -\sqrt{g} V^\beta d\alpha + \sqrt{g} V^\alpha d\beta$$

es exacto; podemos definir entonces una función $\psi(\alpha, \beta)$ tal que

$$V^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \tag{13}$$

$$V^\beta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}$$

La función ψ se llama función corriente o función de Stokes; en el caso plano, con $\gamma = z$,

si $v_z = 0$ las curvas $\psi = cte$, $z = cte$ son las líneas de \vec{V} (de allí el nombre de función corriente si \vec{V} es la velocidad) ya que

$$d\psi = 0 \Rightarrow \frac{dx}{v^x} = \frac{dy}{v^y}$$

En el caso más general donde α, β y γ son coordenadas curvilíneas cualquiera, las líneas de \vec{V} están en las superficies $\psi = cte$, pues \vec{V} es perpendicular al gradiente de ψ :

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \psi &= v^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + v^\beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + v^\gamma \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

El vector \vec{V} lo podemos poner entonces como:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \psi \wedge \vec{e}^\gamma + v^\gamma \vec{e}_\gamma \quad (15)$$

Una notación que nos resultará muy útil es la del Jacobiano de dos funciones $F(\alpha, \beta)$ y $G(\alpha, \beta)$

$$[F, G] = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial G}{\partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \quad (16)$$

Resulta

$$\vec{\nabla} F \wedge \vec{\nabla} G = \frac{1}{\sqrt{g}} [F, G] \vec{e}_\gamma \quad (17)$$

Si el Jacobiano de dos funciones es nulo, podemos poner la 1ª en función de la 2ª, salvo que ésta sea constante

$$[F, G] = 0 \Rightarrow \begin{cases} G = \text{cte} \\ F = F(G) \end{cases} \quad (18)$$

Otras relaciones que nos serán de utilidad más adelante son las siguientes:

Sean $F(\alpha, \beta)$, $G(\alpha, \beta)$ y $H(\alpha, \beta)$; si $G = G(H)$ entonces:

$$[F, G(H)] = [F G', H] \quad (19)$$

donde $G' = dG/dH$.

Si $\vec{\nabla}$ y \vec{W} son dos vectores de divergencia nula y F y G sus funciones corrientes se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} H = \frac{1}{\sqrt{g}} [F, H] \quad (20)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{W} = \frac{1}{\sqrt{g}} [F, G] \vec{e}^\gamma - W^\gamma \vec{\nabla} F + V^\gamma \vec{\nabla} G \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (H \vec{\nabla} \wedge \vec{W}) &= \vec{\nabla} \left\{ \frac{H}{\sqrt{g}} [F, G] \right\} \wedge \vec{e}^\gamma - \\ &- \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ [G, H V^\gamma] + [H W^\gamma, F] \right\} \vec{e}_\gamma \end{aligned} \quad (22)$$

Equilibrios estáticos con una simetría

En el caso de equilibrio estático cuando las únicas fuerzas son el $\vec{\nabla}p$ y la fuerza de Lorentz, las ecuaciones son

$$\vec{\nabla}p = \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (23)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (24)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (25)$$

Al ser $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, cuando se tiene una coordenada ignorable se puede definir una función de Stokes para \vec{B} , la que recibe el nombre de flujo magnético

$$B^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \quad (26)$$

$$B^\beta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$$

Como \vec{B} es tangente a las superficies $\psi = cte$, éstas son superficies magnéticas.

Teniendo en cuenta que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, también \vec{J} tendría su función escalar; como $\vec{J} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$, de (11)

$$J^\alpha = \frac{1}{\mu \sqrt{g}} \left(\frac{\partial B_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{\mu \sqrt{g}} \frac{\partial B_\beta}{\partial \alpha} \quad (27)$$

$$J^\beta = -\frac{1}{\mu \sqrt{g}} \frac{\partial B_\alpha}{\partial \beta}$$

resulta que la función corriente de \vec{J} es $(\frac{1}{\mu} B_\gamma)$.

Si calculamos la componente covariante γ de (23), usando (9) tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial \gamma} = (\vec{J} \wedge \vec{B})_\gamma = \sqrt{g} (J^\alpha B^\beta - J^\beta B^\alpha)$$

Como γ es coordenada ignorable $\frac{\partial p}{\partial \gamma} = 0$; reemplazando las componentes de \vec{J} y de \vec{B} por derivadas de sus funciones corriente ((26) y (27))

$$0 = -\frac{1}{\mu \sqrt{g}} \left(\frac{\partial B_\gamma}{\partial \beta} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial B_\gamma}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) = \frac{1}{\mu \sqrt{g}} [B_\gamma, \psi]$$

Luego, en el caso estático con simetría se cumple

$$[B_\gamma, \psi] = 0 \begin{cases} \rightarrow \psi = cte \\ \rightarrow B_\gamma = B_\gamma(\psi) \end{cases} \quad (28)$$

El caso $\psi = cte$ hay que darle un tratamiento separado e implica que no hay componentes contra-variantes α y β de la inducción magnética. Supondremos que ψ no es constante en todo el espacio en cuyo caso

$$\boxed{B_\gamma = B_\gamma(\psi)} ; \quad (29)$$

por lo tanto las superficies $B_\gamma = cte$ coinciden con las superficies $\psi = cte$; como B_γ es la función de Stokes

de \vec{J} , resulta que \vec{J} es tangente a las superficies $\psi = \text{cte}$. luego

$$(\vec{J} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{\nabla} \psi = 0$$

Multiplicando la ecuación (23) vectorialmente por $\vec{\nabla} \psi$:

$$\vec{\nabla} p \wedge \vec{\nabla} \psi = (\vec{J} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{\nabla} \psi = 0$$

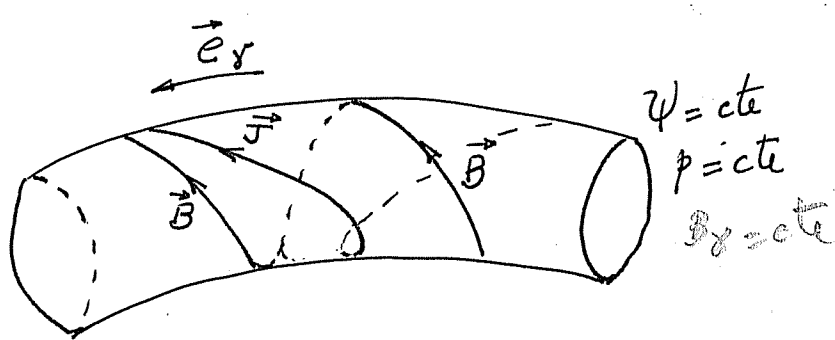
con lo que, de (17), el Jacobiano

$$[p, \psi] = 0 \tag{30}$$

Como hemos supuesto $\psi \neq \text{cte}$, resulta

$$p = p(\psi) \tag{31}$$

y la presión es constante en las superficies $\psi = \text{cte}$, a la inversa, la superficie $p = \text{cte}$ es una superficie magnética, lo que vimos debía cumplirse siempre en el equilibrio estático, aún sin simetría.



Usamos ahora que $p = p(\psi)$ para calcular la componente α de la ecuación (23); de (9), (26), (27) y (29) resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = (\vec{J} \wedge \vec{B})_{\alpha} = \sqrt{g} (J^{\beta} B^{\gamma} - J^{\gamma} B^{\beta}) =$$

$$= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial x} B^{\gamma} + J^{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(J^{\gamma} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \psi} B^{\gamma} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Por lo tanto

$$\frac{dp}{d\psi} = J^{\gamma} - \frac{1}{\mu} \frac{dB_{\gamma}}{d\psi} B^{\gamma} \tag{32}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que

$$J^{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}\mu} \left(\frac{\partial B_{\rho}}{\partial x} - \frac{\partial B_{\alpha}}{\partial \rho} \right) \tag{33}$$

que usando (7) B_{α} y B_{ρ} se pueden poner en función de B^{α} , B^{ρ} y B_{γ} , que B^{α} y B^{ρ} se obtienen a partir de derivadas primeras de ψ y que B_{γ} es función de ψ , J^{γ} resulta un operador diferencial de 2° orden sobre ψ y la ecuación (32) es entonces una ecuación diferencial para el flujo magnético. Después de hacer los cuentas, usando (7), (26) y (33), que en el caso no ortogonal son algo tediosas se obtiene a partir de (32) la siguiente ecuación diferencial:

$$D^2 \psi - \Gamma B_{\gamma}(\psi) + \frac{d}{d\psi} \left(\frac{B_{\gamma}^2}{2} \right) + g_{\gamma\gamma} \mu \frac{dp}{d\psi} = 0 \tag{34}$$

donde D^2 es un operador elíptico y Γ depende de la métrica y es una característica de sistemas no

ortogonales

$$D^2 \psi = \frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^2 \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{g^{ij} \sqrt{g}}{g_{\alpha\alpha}} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right) \right] \quad (35)$$

$$\Gamma = \frac{g_{\alpha\alpha}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g_{\beta\alpha}}{g_{\alpha\alpha}} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{\alpha\alpha}} \right) \right] \quad (36)$$

Las funciones $p(\psi)$ y $B_\alpha(\psi)$ son arbitrarias; para diferentes modelos de dependencia de p con ψ y de B_α con ψ se tendrá una situación física distinta y una ecuación diferencial distinta para el flujo magnético.

Por ejemplo poniendo

$$\begin{aligned} p &= \text{cte} \\ B_\alpha &= \text{cte} \end{aligned} \quad (37)$$

se obtienen campos potenciales ($\vec{J} = 0$)

Para $p = \text{cte}$ con $B_\alpha(\psi) \neq \text{cte}$ se tendrán campos force-free; en el caso

$$B_\alpha = k \psi \quad (38)$$

se obtienen campos force-free lineales, ya que, de (26) y (27):

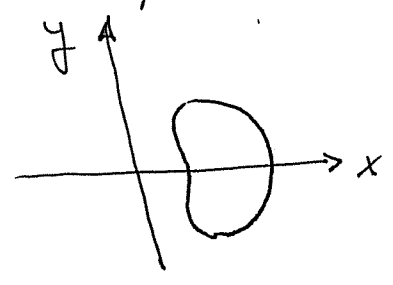
$$\begin{aligned} J^\alpha &= \frac{1}{\mu \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \beta} (k \psi) = \frac{k}{\mu} B^\alpha \\ J^\beta &= -\frac{1}{\mu \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \alpha} (k \psi) = \frac{k}{\mu} B^\beta \end{aligned}$$

y de (32), como $p = \text{cte}$:

$$J^{\gamma} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \psi} B^{\gamma} = \frac{k}{\mu} B^{\gamma},$$

o sea
$$\vec{J} = \frac{k}{\mu} \vec{B} = \alpha \vec{B}$$

Los modelos con $p \neq \text{cte}$ permiten pensar en construir con las soluciones regiones de plasma magnéticamente confinadas, pues en principio podría haber una superficie S con $p=0$ en cuyo interior fuera $p > 0$. Si se proponen dependencias lineales con ψ tanto de p como de B_{γ} se obtiene una ecuación diferencial lineal para ψ . Esta es resoluble con distintas simetrías y coordenadas; por ejemplo con simetría de traslación en coordenadas cartesianas o en cilíndricas, de rotación respecto a un eje en coordenadas cilíndricas, con simetría helicoidal (invariancia a lo largo de hélices) en coordenadas helicoidales; tanto con simetría de ~~traslación~~^{rotación} como en la helicoidal se pueden construir con las soluciones columnas de plasma magnéticamente confinadas; en el caso helicoidal por ejemplo, una sección de la columna puede tener una forma del tipo



Y para imaginar la forma de la columna tengamos en cuenta que el eje magnético es una hélice de eje z (L.J. Palumbo; L.F. Palumbo y A.M. Platzek (1993))

Flujos estacionarios con una simetría

Los flujos estacionarios en la MHD ideal cuando se tienen en cuenta solo el $\vec{\nabla} p$ y la fuerza de Lorentz obedecen a las ecuaciones

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \rho \vec{v} \wedge \vec{\omega} = -\vec{\nabla} p + \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (39)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (40)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (41)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0 \quad (42)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (43)$$

donde la vorticidad $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$.

Aquí existen cuatro campos vectoriales de divergencia nula: \vec{B} , $\rho \vec{v}$, \vec{J} y $\vec{\omega}$, que se pueden expresar en términos de las funciones corriente ψ , χ , (B_θ/μ) y v_θ :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \psi \wedge \vec{e}^\theta + B^\theta \vec{e}_\theta \quad (44)$$

$$\rho \vec{v} = \vec{\nabla} \chi \wedge \vec{e}^\theta + \rho v^\theta \vec{e}_\theta \quad (45)$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} B_\theta \wedge \vec{e}^\theta + J^\theta \vec{e}_\theta \quad (46)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} v_\theta \wedge \vec{e}^\theta + \omega^\theta \vec{e}_\theta \quad (47)$$

Al poner \vec{B} , $\rho\vec{v}$ y \vec{J} de esta forma se satisfacen las ecuaciones (40), (41) ^(componentes α, γ, β) y (43). Trabajaremos ahora con las ecuaciones (39) y (42).

Una relación muy importante entre la función corriente para $\rho\vec{v}$ y el flujo magnético ψ se obtiene de analizar la ecuación (42) que podemos poner también

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \phi = -\vec{E}$$

que es la ley de Ohm (para σ grande) cuando no hay dependencia temporal. Como γ es coordenada ignorable, consideramos $E_\gamma = -\partial\phi/\partial\gamma = 0$. Luego

$$(\vec{v} \wedge \vec{B})_\gamma = 0$$

Si $\gamma = \psi$ se ve que $E_\psi = 0$ de las cond. de estacionariedad y de simetría; pues $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$, integro sobre círculo $\oint \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot \vec{\sigma} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \oint E_\psi d\psi$. E_ψ no depende de $\psi \Rightarrow E_\psi = 0$

Esta componente del producto vectorial queda en función de $v^\alpha, v^\beta, B^\alpha$ y B^β (ver eq. (9)); reemplazándolos en función de χ y ψ en forma análoga a lo hecho con $(\vec{J} \wedge \vec{B})_\gamma$ o usando (21) resulta

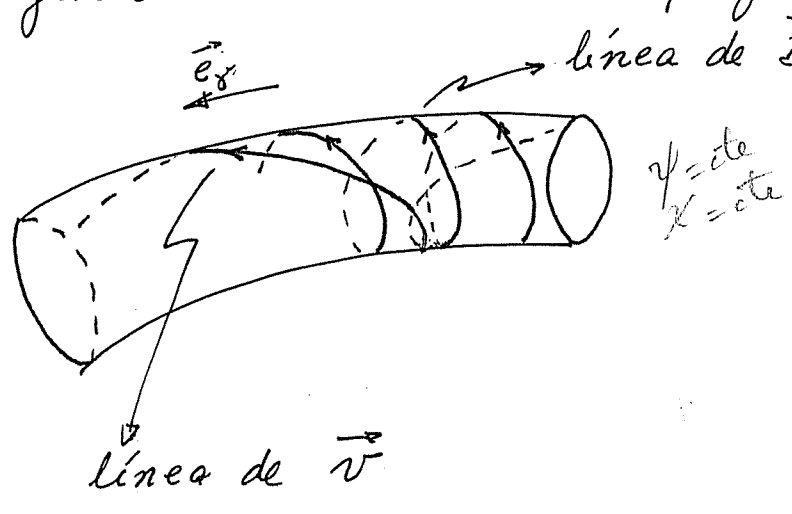
$$\frac{1}{\rho\sqrt{g}} [\chi, \psi] = 0$$

Suponiendo que ψ no es idénticamente constante tenemos que

$$\chi = \chi(\psi) ; \tag{48}$$

las superficies $\chi = cte$ coinciden con las superficies $\psi = cte$, salvo que $\chi \equiv cte$, y las líneas de \vec{B} y $\rho\vec{v}$

son tangentes a la misma superficie



Otra relación que podemos obtener de la ecuación (42) resulta de usar (22)

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \left[\frac{1}{\rho} \rho \vec{v} \wedge \vec{B} \right] = \vec{\nabla} \left\{ \frac{1}{\rho \sqrt{g}} [\chi, \psi] \right\} \wedge \vec{e}^x - \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ [\psi, v^x] + \left[\frac{B^x}{\rho}, \chi \right] \right\} \vec{e}_x = 0$$

El primer término es nulo; luego debe cumplirse la siguiente relación entre Jacobianos

$$\boxed{[\psi, v^x] + \left[\frac{B^x}{\rho}, \chi \right] = 0} \tag{49}$$

De la ecuación de movimiento (39) podemos obtener dos relaciones más entre Jacobianos; como la componente covariante x de los gradientes se anula resulta

$$\rho (\vec{v} \wedge \vec{v})_x + (\vec{J} \wedge \vec{B})_x = 0$$

y usando (21) nos queda

$$\boxed{[\chi, v_x] + \left[\frac{B_x}{\mu}, \psi \right] = 0} \tag{50}$$

Una 2ª relación entre jacobianos se puede obtener de la ecuación (39), si la dividimos por ρ y tomamos el rotor:

$$\vec{\nabla} \wedge [\vec{v} \wedge \vec{w}] + \vec{\nabla} \wedge \left[\frac{\vec{J}}{\rho} \wedge \vec{B} \right] - \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0 ;$$

usando las relaciones (18)¹⁷ y (22) se tiene

$$\boxed{[v_\gamma, v^\gamma] + \left[\frac{w^\gamma}{\rho}, \kappa \right] + \left[\psi, \frac{J^\gamma}{\rho} \right] + \left[\frac{B^\gamma}{\rho}, \frac{B_\gamma}{\mu} \right] - \left[\rho, \frac{1}{\rho} \right] = 0} \quad (51)$$

Las ecuaciones escritas en forma de jacobianos tienen la ventaja de que se puede usar la relación

$$[F, \psi] = 0 \quad \Rightarrow \quad F = F(\psi)$$

Lo que debemos tratar entonces es de llevar las ecuaciones (49), (50) y (51) a la forma de un único jacobiano de alguna magnitud con ψ ; (49) y (50) se transforman fácilmente usando que $\kappa = \kappa(\psi)$ y la relación (19); de ellas sale

$$v^\gamma - \frac{\kappa'}{\rho} B^\gamma = F_1(\psi) \quad (52)$$

$$\frac{B_\gamma}{\mu} - \kappa' v_\gamma = F_2(\psi) \quad (53)$$

Relacionando las componentes contra-variantes

con las covariantes, de (52) y (53) se pueden obtener expresiones para v_x y B_x que quedan en función de ψ y de g_{xy} ; lo haremos solo en el ejemplo simple que daremos más adelante

En lo que se refiere a la ecuación (51) el cálculo detallado es muy largo por lo que solo se harán algunas consideraciones generales; usando (48), (52) y (53) y con bastante álgebra se pueden transformar los primeros cuatro términos de (51) en un solo jacobiano de una expresión en que entran $\omega^x, J^x, p, X', \dots$, con ψ ; queda además el jacobiano $[p, \frac{1}{p}]$; en el caso estático podíamos evitar este problema pues p no aparecía en la ecuación de movimiento; para poder transformar $[p, \frac{1}{p}]$ hay que hacer alguna suposición adicional como ser $p = cte$, politrópica (con las cuales el jacobiano de p con p se anula), adiabaticidad, incompresibilidad, etc. Por ejemplo si suponemos incompresibilidad

$$\frac{Dp}{Dt} = 0 = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p)$$

que usando (20) implica

$$[X, p] = 0 \implies \begin{cases} X = cte \\ p = p(X) \end{cases}$$

Si $X = cte$ el tratamiento hay que hacerlo por

separado, si no, como $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\psi)$ resulta $p = p(\psi)$ y se tiene

$$\left[p, \frac{1}{p} \right] = - \left[\frac{p}{p^2} \frac{dp}{d\psi}, \psi \right]$$

con lo que la ecuación (51) ^{queda} como un único jacobiano con ψ igualado a cero:

$$[R, \psi] = 0 \implies R = F_3(\psi)$$

donde en R aparecen además de J^x, ω^x, p, p , las funciones arbitrarias $\mathcal{K}(\psi), F_1(\psi)$ y $F_2(\psi)$.

Ya dijimos que J^x es un operador diferencial de 2º orden sobre ψ ; en forma similar ω^x lo es sobre \mathcal{K} y como $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\psi)$ también lo es sobre ψ . Luego, cuando $[p, \frac{1}{p}]$ se puede llevar a la forma de un jacobiano con ψ , (51) resulta una ecuación diferencial de 2º orden para ψ en la que aparecen las funciones arbitrarias $\mathcal{K}(\psi), F_1(\psi), F_2(\psi), F_3(\psi)$ y alguna otra, por ejemplo $p = p(\psi)$ ó $S = S(\psi)$ si hay incompatibilidad o si hay adiabaticidad. Además en esta ecuación puede quedar una magnitud que no es función directa de ψ , por ejemplo la presión en el caso incompatible, y que se debe obtener utilizando nuevamente la ecuación de movimientos, pero sin tomarle rotor.

hanta
26/10/15

(1)

Flujos estacionarios con simetría azimutal usando coordenadas esféricas - Vientos estelares

Vimos que si tenemos flujos estacionarios con una simetría, definiendo funciones corriente Ψ y χ para \vec{B} y $f\vec{v}$ respectivamente, suponiendo $\Psi \neq \text{cte}$, de

comp. γ covar.
de la ley de Ohm $\Rightarrow [\chi, \Psi] = 0 \Rightarrow \chi = \chi(\Psi)$ (1)

comp γ contrav.
ec. de inducción $\Rightarrow [\vec{v}^\gamma, \Psi] - [\frac{B^\gamma}{f}, \chi] = 0 \Rightarrow$
$$v^\gamma - \chi' \frac{B^\gamma}{f} = F_1(\Psi)$$
 (2)

comp γ covariante
de la ec. de mov $\Rightarrow [\vec{v}_\gamma, \chi] - [\frac{B_\gamma}{\mu}, \Psi] = 0$
$$\Rightarrow \frac{B_\gamma}{\mu} - \chi' v_\gamma = F_2(\Psi)$$
 (3)

Las otras componentes de la ecuación de movimiento ~~de movimiento~~, junto con una suposición adicional como incompresibilidad, adiabaticidad, politrópica, ..., dan una ecuación diferencial de 2º orden para Ψ .

Las ecuaciones (1), (2) y (3) se dedujeron suponiendo que las fuerzas eran $\vec{\nabla}p$ y $\vec{J} \times \vec{B}$, pero siguen siendo válidas aunque haya otra fuerza siempre que su componente covariante γ sea nula. (por ejemplo si es un gradiente)

Veremos ahora como quedan estas expresiones si usamos coordenadas esféricas teniendo simetría azimutal

$$\alpha = r \quad \beta = \theta \quad \gamma = \varphi$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$g = r^4 \sin^2 \theta$$

$$B^r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$B^\theta = \frac{-1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

La relación entre componentes físicas y componentes co- y contravariantes es

$$B_r^{fis} = B^r = B_r$$

$$B_\theta^{fis} = r B^\theta = \frac{1}{r} B_\theta$$

$$B_\varphi^{fis} = r \sin \theta B^\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} B_\varphi$$

La ecuación (1) nos lleva a

$$\rho v_r^{fis} = \chi'(\psi) B_r^{fis} \quad (4)$$

$$\rho v_\theta^{fis} = \chi'(\psi) B_\theta^{fis}$$

Luego las proyecciones de \vec{v} y \vec{B} en un plano meridiano son paralelas.

Escritas en función de las componentes físicas las ecuaciones (2) y (3) resultan

$$v_\varphi^f - \frac{\chi' B_\varphi^f}{\rho} = r \sin \theta F_1(\psi)$$

$$\frac{B_\varphi^f}{\mu} - \chi' v_\varphi^f = \frac{F_2(\psi)}{r \sin \theta}$$

Reescribiéndolas.

$$v_{\varphi}^f - \chi' \frac{B_{\varphi}^f}{f} = \Omega(\psi) r \text{sen} \theta \quad (5)$$

$$v_{\varphi}^f - \frac{B_{\varphi}^f}{\mu \chi'} = \frac{L(\psi)}{r \text{sen} \theta} \quad (6)$$

donde $\Omega = F_1$ y $L = -F_2/\chi'$ son dos funciones que dependen de ψ , y por lo tanto son constantes sobre las líneas de \vec{B} y sobre las de \vec{J} . Tienen unidades de velocidad angular e impulso angular por unidad de masa respectivamente.

De (5) y (6) resulta que, salvo que $\psi = \psi(r \text{sen} \theta)$, si $B_{\varphi}^f = 0 \Rightarrow v_{\varphi}^f = 0$. La excepción corresponde al caso en que $\vec{B} = B_z \hat{z}$

* De las ~~expresiones~~ (4) y la (5) podemos escribir

$$\vec{J} = \frac{\chi'(v)}{f} \vec{B} + r \text{sen} \theta \Omega(\psi) \hat{\varphi} \quad (7)$$

(límite de Alfvén)

Finalmente, de (5) y (6), si $\chi' \neq \sqrt{\frac{f}{\mu}}$, podemos despejar v_{φ}^f y B_{φ}^f :

$$v_{\varphi}^f = r \text{sen} \theta \Omega + \frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{L - r^2 \text{sen}^2 \theta \Omega}{1 - f/\mu \chi'^2} \quad (7)$$

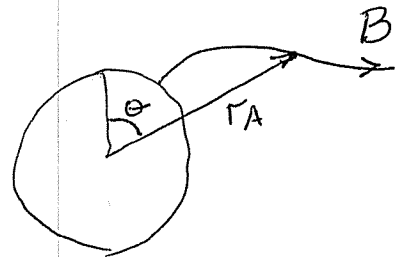
$$B_{\varphi}^f = \frac{f}{r \text{sen} \theta \chi'} \frac{L - r^2 \text{sen}^2 \theta \Omega}{1 - f/\mu \chi'^2} \quad (8)$$

El viento de una estrella magnetizada lo podemos tratar en la aproximación MHD. El lugar donde $\chi'^2 = \rho/\mu$ es el radio de Alfvén

$$\chi'^2 = \rho(r_A, \theta) / \mu$$

y será diferente para distintas líneas de campo. Si el radio de Alfvén está fuera de la superficie de la estrella, el viento deberá pasar por ese punto, en el que se anula el denominador de (7) y (8), por lo que simultáneamente deberá anularse el numerador. Sobre una línea de \vec{B}

$$L = r_A^2 \sin^2 \theta \Omega$$



donde θ depende de r_A

Supongamos que L y Ω son positivos.

Para $r < r_A$ el denominador $(1 - \rho/\mu\chi'^2)$ es negativo y el numerador $(L - r^2 \sin^2 \theta \Omega)$ es positivo. Para $r > r_A$ sucede al revés, y el cociente de ambos es siempre negativo

$$\text{Llamando } g = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{L - r^2 \sin^2 \theta \Omega}{1 - \rho/\mu\chi'^2}$$

se tiene

$$V_{\psi}^f = r \sin \theta \Omega + g$$

$$B_{\psi}^f = \frac{I}{\chi'} g$$

Calculemos la derivada de g con respecto a $(r \sin \theta)$ a lo largo de una línea $(\psi = \text{cte})$ de \vec{B}

$$\frac{\partial g}{\partial (r \sin \theta)} \Big|_{\psi} = - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{L - r^2 \sin^2 \theta \Omega}{1 - \rho/\mu\chi'^2} + \frac{L - r^2 \sin^2 \theta \Omega}{r \sin \theta (1 - \rho/\mu\chi'^2)}$$

$$\frac{\partial q}{\partial(r \sin \theta)} \Big|_{\psi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\rho}{\mu \chi'^2}\right)^2} \left[-\left(1 - \frac{\rho}{\mu \chi'^2}\right) (L + r^2 \sin^2 \theta \Omega) + \frac{r \sin \theta}{\mu \chi'^2} (L - \Omega r^2 \sin^2 \theta) \frac{\partial \rho}{\partial(r \sin \theta)} \Big|_{\psi} \right]$$

Para $r \rightarrow r_A$ el denominador tiende a cero más rápido que el numerador, por lo que la derivada diverge. Suponiendo que el 1er término pesa más que el 2º (lo que depende de los valores de χ' , L y Ω)

$$\frac{\partial q}{\partial(r \sin \theta)} \Big|_{\psi} \xrightarrow{r \rightarrow r_A^+} +\infty \quad (\text{por la izquierda}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial q}{\partial(r \sin \theta)} \Big|_{\psi} \xrightarrow{r \rightarrow r_A^+} -\infty$$

(por la derecha).

Además, como $r^2 \rho \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$,

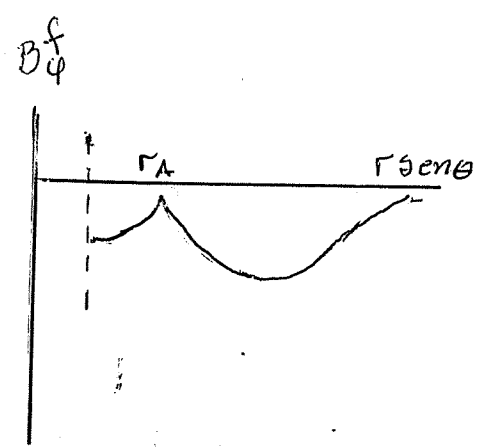
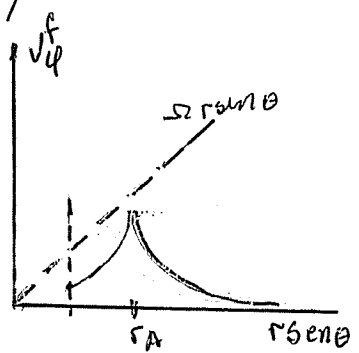
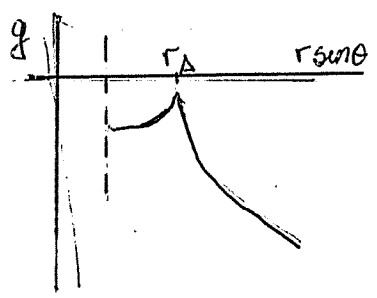
$$\frac{\partial q}{\partial(r \sin \theta)} \Big|_{\psi} \rightarrow \Omega \quad \text{para} \quad r \rightarrow \infty. \quad \text{Como} \quad v_{\psi}^f \quad \text{lo puede}$$

mas poner

$$v_{\psi}^f = \frac{L - \frac{\rho}{\mu \chi'^2} r^2 \sin^2 \theta \Omega}{r \sin \theta \left(1 - \frac{\rho}{\mu \chi'^2}\right)}$$

$$v_{\psi}^f \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad \text{También} \quad B_{\psi}^f \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Sobre una línea de \vec{B} , la dependencia de v_{ψ}^f y B_{ψ}^f sería entonces, aproximadam.



*

V - Análisis topológico de los campos en plasmas conductores perfectos

Introducción • Información topológica en las leyes del electromagnetismo • Coeficientes de encadenamiento. Integral de encadenamiento de Gauss • Helicidad magnética • Invariancia de la helicidad ante cambio de gauge • Extensión a sistemas múltiplemente conexos • Interpretación física de la Helicidad Magnética • Significado de la helicidad magnética en sistemas múltiplemente conexos • El problema de la Energía Magnética Mínima y la Helicidad total • Plasmas confinados en cavidades conductoras • Evolución temporal de superficies magnéticas. Invariancia de la helicidad • Nota sobre sistemas cerrados • Teorema de Woltjer • Deriva de las líneas de inducción magnética en plasmas congelados. Restricciones topológicas y energía magnética mínima • Transformación de elementos geométricos a través de campos de desplazamientos • Transformación de la inducción magnética ante un campo de desplazamientos bajo la condición de plasma congelado • Energía magnética mínima • Apéndice •

Introducción

Las complejas estructuras de los campos magnéticos que pueden tener lugar en un plasma conductor, admiten una descripción basada en la topología de las curvas en el espacio tridimensional. Si se admite que el plasma es un conductor perfecto, puede probarse que las líneas de inducción magnética se acoplan con los elementos de fluido (condición de congelamiento). Los detalles cualitativos de este acoplamiento se ponen de manifiesto en la evolución temporal del sistema. Si en un instante t_0 una línea de inducción define el lugar geométrico que ocupa una distribución continua de elementos de fluido, podemos identificar la “misma” línea ¹ en cualquier instante posterior ubicando el nuevo lugar geométrico que ocupan los mismos elementos de fluido en dicho instante. Esta forma de acoplamiento incorpora fuertes restricciones en los movimientos del plasma, dado que este debe respetar las propiedades físicas de las líneas de inducción. En efecto, las líneas pueden deformarse pero no pueden dejar de ser continuas, de modo que dos elementos de fluido infinitamente próximos que se hallan sobre una línea seguirán siendo infinitamente próximos en todo tiempo posterior.

Por otra parte, la naturaleza solenoidal de la inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ garantiza que sus líneas son cerradas, dando lugar a la posibilidad de encadenamientos. Además, como cada elemento de fluido está asociado con una única línea de inducción, los encadenamientos entre líneas deben conservarse en toda la evolución temporal. Si se pretende desenganchar dos líneas que se hallan enlazadas como los eslabones de una cadena, se requiere al menos que en un instante ambas líneas tengan un punto en común. Esto no es posible en un plasma congelado dado que en dicho punto debiera haber un único elemento de fluido asociado con ambas líneas.

El modo en que se vinculan un conjunto discreto de curvas cerradas en el espacio tridimensional, puede describirse mediante invariantes topológicos llamados coeficientes de encadenamiento. El análisis de estos coeficientes resulta especialmente ilustrativo para comprender las posibilidades del enfoque topológico. Sin embargo, su aplicación a los plasmas congelados no es inmediata. Utilizando nuevamente el carácter solenoidal de $B(\vec{r}, t)$, introducimos un potencial vectorial $A(\vec{r}, t)$, que resulta especialmente apropiado para definir los invariantes topológicos de interés en nuestro caso. En el límite de una distribución continua de curvas cerradas, la magnitud apropiada para describir el encadenamiento es la helicidad. Para el caso particular de las líneas de inducción magnética, esta magnitud se denomina helicidad magnética.

¹ Cuando decimos que una línea de campo es la misma a lo largo de la evolución temporal del sistema estamos asumiendo implícitamente que tal línea es identificable por sí misma. Esto no es estrictamente cierto en los campos en general; sin embargo, en este caso el plasma constituye un sustrato material que permite la identificación a través del acoplamiento, de modo que justifica el exceso terminológico en que incurrimos al decir “misma”.

Información topológica en las leyes del electromagnetismo

Con la intención de fijar ideas acerca de la información topológica que subyace en las leyes físicas, presentamos un ejemplo sencillo relacionando la ley de Biot-Savart y la ley de Ampere. Utilizamos aquí las formas simples de estas leyes desarrolladas para magnetostática con conductores unidimensionales. Sea C_1 una curva cerrada a lo largo de la cual se halla un conductor unidimensional por el que circula una corriente i , y sea C_2 una línea de inducción magnética encadenada con el circuito. Entonces,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} i d\vec{l}_1 \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (1)$$

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = \mu_0 N i, \quad (2)$$

donde N representa el número de veces que el conductor atraviesa una superficie limitada por la curva C_2 . Combinando las dos leyes anteriores se tiene que

$$\oint_{C_2} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} i d\vec{l}_1 \times \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right) \cdot d\vec{l}_2 = \mu_0 N i, \quad (3)$$

que con un simple reordenamiento se convierte en

$$N = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (d\vec{l}_1 \times d\vec{l}_2). \quad (4)$$

Nótese que en el proceso de construcción de esta última relación ha desaparecido la información de origen electromagnético, manteniéndose exclusivamente el vínculo geométrico entre las curvas C_1 y C_2 ². Por otra parte, el coeficiente entero N resulta insensible a los detalles geométricos de las curvas C_1 y C_2 , de modo que ellas pueden deformarse arbitrariamente en la medida que respeten su estado de encadenamiento. En este sentido decimos que N es una propiedad topológica, y si se mantiene mientras se deforman las curvas diremos que es un invariante topológico.

Coefficientes de encadenamiento. Integral de encadenamiento de Gauss

El encadenamiento de dos curvas cerradas es un concepto esencialmente tridimensional. En el tratamiento que sigue buscaremos el modo de determinar cuantitativamente dicho encadenamiento, a partir de la descripción matemática detallada de las curvas.

²En la sección siguiente veremos que la relación (4) puede desarrollarse en forma general a partir de argumentos exclusivamente geométricos, y toma el nombre de integral de encadenamiento de Gauss.

Consideremos dos curvas simples cerradas C_1 y C_2 , cada una de las cuales tiene asignado un sentido de circulación ³. Dichas curvas limitan respectivamente las superficies orientadas Σ_1 y Σ_2 , de modo que los vectores que dirigen la superficie se construyen mediante la regla de la mano derecha. Con el objeto de relacionar las curvas introducimos un campo vectorial $\vec{S}(\vec{r})$ dado por:

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (5)$$

donde $d\vec{l}_1$ representa un elemento orientado de la curva C_1 en la posición \vec{r}_1 . En lo sucesivo, indicaremos por $\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}_1$ y $\vec{\nabla}_2$ los operadores vectoriales habituales sobre las coordenadas \vec{r} , \vec{r}_1 y \vec{r}_2 respectivamente. Recordando que

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) = \vec{\nabla}_1 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right), \quad (6)$$

el rotor del campo $\vec{S}(\vec{r})$ puede escribirse como

$$\vec{\nabla} \times \vec{S}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right). \quad (7)$$

El rotor y la integral pueden permutarse dado que operan sobre distintas coordenadas. Utilizando la identidad (129) y la relación (6) podemos escribir

$$\vec{\nabla} \times \vec{S}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} \left[d\vec{l}_1 \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) + (d\vec{l}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla}_1 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) \right] \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{S}(\vec{r}) = \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \oint_{C_1} \vec{\nabla}_1 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) \cdot d\vec{l}_1. \quad (9)$$

El segundo término se anula por tratarse de una integral curvilínea cerrada de un gradiente. Entonces la última expresión adopta la forma definitiva

$$\vec{\nabla} \times \vec{S}(\vec{r}) = \oint_{C_1} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_1) d\vec{l}_1 \quad (10)$$

Este resultado indica que el campo $S(\vec{r})$ tiene rotor nulo en todo el espacio, exceptuando los puntos de la curva C_1 . Además es fácil probar que se trata de un campo solenoidal. Utilizando la identidad (130) se tiene que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) \quad (11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \right) \right] = 0. \quad (12)$$

³Para evitar complicaciones matemáticas en el análisis, que probablemente no aportarían detalles de interés físico, supondremos que las curvas C_1 y C_2 no se cortan a sí mismas ni mutuamente.

Aplicando el teorema de Stokes sobre el campo $S(\vec{r})$ podemos escribir

$$\int_{\Sigma_2} [\vec{\nabla}_2 \times \vec{S}(\vec{r}_2)] \cdot d\vec{\sigma}_2 = \oint_{C_2} \vec{S}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{l}_2 \quad (13)$$

Reemplazando la definición (5) y el resultado (10) la expresión anterior se transforma en

$$\int_{\Sigma_2} \oint_{C_1} \delta^3(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) d\vec{l}_1 \cdot d\vec{\sigma}_2 = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \left(d\vec{l}_1 \times \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right) \cdot d\vec{l}_2 \quad (14)$$

El primer miembro de esta expresión se define como el coeficiente de encadenamiento entre las curvas C_1 y C_2 y lo denotaremos por N

$$N = \int_{\Sigma_2} \oint_{C_1} \delta^3(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) d\vec{l}_1 \cdot d\vec{\sigma}_2 \quad (15)$$

Aplicando una transformación cíclica al segundo miembro de (14) encontramos una forma más simétrica conocida como Integral de Encadenamiento de Gauss.

$$N = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (d\vec{l}_1 \times d\vec{l}_2) \quad (16)$$

Analizamos ahora el contenido topológico del coeficiente de encadenamiento N . Para ello evaluaremos en detalle la definición (15). Esta integral será nula si la curva C_1 no atraviesa la superficie Σ_2 , en cuyo caso C_1 y C_2 no están encadenadas. Si por el contrario la curva C_1 atraviesa la superficie Σ_2 en un punto, la integral tomará los valores 1 o -1, según si los vectores $d\vec{l}_1$ y $d\vec{\sigma}_2$ se encuentren ambos de un lado de la superficie o uno a cada lado de la misma. En consecuencia, si la curva corta a la superficie en varios puntos el coeficiente de encadenamiento será indicativo de la diferencia entre el número de veces en que el cruce ocurre en un sentido y en el contrario. Nótese además que la fórmula de Gauss sólo requiere la descripción detallada de las curvas C_1 y C_2 , y resulta invariante ante la permutación de los subíndices (como era de esperarse, dado que el coeficiente de encadenamiento es un indicador de una propiedad mutua entre las curvas).

Helicidad magnética

Un plasma conductor perfecto (es decir, con conductividad σ tendiendo a ∞) se caracteriza por que el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y la inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ son perpendiculares en todo punto y para todo tiempo. La relación que vincula los campos en estas condiciones es

$$\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) = 0. \quad (17)$$

Utilizando la ley de Faraday se obtiene la evolución temporal del campo magnético

$$\partial \vec{B} / \partial t = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (18)$$

Introducimos un potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ eligiendo un gauge que elimine el potencial eléctrico de manera que los campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{B}(\vec{r}, t)$ puedan derivarse de la siguiente forma

$$\vec{E} = -\partial \vec{A} / \partial t, \quad (19)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (20)$$

reemplazando la relación (19) en la (17) tenemos que la evolución temporal del potencial vector es

$$\partial \vec{A} / \partial t = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (21)$$

Consideremos una porción de plasma conductor perfecto de volumen V limitado por una superficie cerrada S . Sea $\chi(\vec{r}, t)$ un potencial escalar arbitrario que define un nuevo potencial vectorial $\vec{A}'(\vec{r}, t)$ mediante la relación

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi. \quad (22)$$

La helicidad magnética es una magnitud extensiva dependiente del gauge que se define como

$$K = \int_V (\vec{A}' \cdot \vec{B}) dv. \quad (23)$$

Invariancia de la helicidad ante cambio de gauge

A continuación probaremos que la helicidad magnética definida sobre volúmenes especiales puede resultar invariante ante transformaciones de contraste.

Una superficie magnética es aquella en que el vector inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ resulta tangente en todos los puntos. La helicidad magnética definida sobre un volumen V simplemente conexo limitado por una superficie magnética cerrada resulta invariante ante el cambio de gauge.

Para probarlo utilizamos la definición general de la helicidad reemplazando explícitamente la transformación de contraste (22). Introducimos la notación $K_{\vec{A}'}$ para identificar la helicidad asociada con el potencial vectorial \vec{A}'

$$\begin{aligned} K_{\vec{A}'} &= \int_V [(\vec{A} + \vec{\nabla} \chi) \cdot \vec{B}] dv \\ K_{\vec{A}'} &= \int_V (\vec{A} \cdot \vec{B}) dv + \int_V (\vec{\nabla} \chi \cdot \vec{B}) dv \\ K_{\vec{A}'} &= K_{\vec{A}} + \int_V [\vec{\nabla} \cdot (\chi \vec{B}) - \chi (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})] dv. \end{aligned} \quad (24)$$

Utilizando el teorema de Gauss y la nulidad de $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ tenemos

$$K_{\vec{A}'} = K_{\vec{A}} + \int_S (\chi \vec{B}) \cdot d\vec{S}, \quad (25)$$

y por ser S una superficie magnética resulta que \vec{B} es siempre perpendicular a $d\vec{S}$. Por tanto queda demostrado que

$$K_{\vec{A}'} = K_{\vec{A}}. \quad (26)$$

Este resultado puede aplicarse en dos situaciones físicamente distintas. La primera resulta de elegir la superficie S de modo que la inducción magnética \vec{B} se anule sobre ella, tal como ocurre en sistemas cerrados simplemente conexos cuando se calcula la helicidad sobre todo el volumen (ver nota sobre sistemas cerrados). En segundo lugar es válido cuando un plasma conductor perfecto se confina en una cavidad rígida simplemente conexa de paredes perfectamente conductoras, y se estima la helicidad sobre todo el volumen del plasma.

Extensión a sistemas múltiplemente conexos

El tratamiento anterior no puede ser extendido en forma directa a sistemas contenidos en volúmenes múltiplemente conexos debido a que la ley de Gauss no es válida en estos casos. Sin embargo, la invariancia de la helicidad magnética ante cambios de Gauge puede mantenerse si nos limitamos a potenciales escalares $\chi(\vec{r}, t)$ univaluados.

Para fijar ideas, imaginemos la superficie S de un toro formada por líneas de inducción magnética \vec{B} cerradas. Si cortamos el toro con una superficie S' transversal a las líneas de \vec{B} , podemos imaginar al volumen del toro como simplemente conexo, entendiendo como superficie límite a S combinada adecuadamente con S'. En este caso, el teorema de Gauss es aplicable a (24), pero requiere la cancelación de dos integrales sobre S' para que los resultados no dependan de la topología de la superficie S,

$$K_{\vec{A}'} = K_{\vec{A}} + \int_S (\chi \vec{B}) \cdot d\vec{S} + \int_{S'_+} (\chi \vec{B}) \cdot d\vec{S} + \int_{S'_-} (\chi \vec{B}) \cdot d\vec{S}, \quad (27)$$

donde S'_+ y S'_- denotan que las integrales deben evaluarse llevando al límite los integrandos por la derecha y por la izquierda de S' respectivamente⁴. La última ecuación será idéntica a (25) si $\chi(\vec{r}, t)$ es univaluada sobre S'.

Un caso importante es aquel donde la helicidad magnética se calcula en el volumen de un tubo cerrado de inducción magnética. Dicho tubo puede construirse en el seno de un plasma conductor, eligiendo en primer lugar una curva cerrada,

⁴Tener en cuenta que los sentidos de los vectores $d\vec{S}$ sobre S'_+ y S'_- son opuestos

y luego formando su superficie límite con las líneas de inducción magnética \vec{B} que pasan por la curva. En muchos casos, las superficies magnéticas así generadas limitan volúmenes no simplemente conexos. Las helicidades calculadas en estos volúmenes serán invariantes de Gauge si las transformaciones se realizan a través de potenciales univaluados.

En este punto es conveniente remarcar que un tubo de inducción múltiplemente conexo puede definirse sobre un plasma que ocupa una cavidad simplemente conexa. En este caso no pueden darse transformaciones a partir de potenciales multivaluados, y por tanto, la helicidad magnética evaluada sobre el tubo de inducción es invariante ante cualquier clase de transformación de Gauge. En realidad, los potenciales multivaluados sólo pueden aparecer cuando las cavidades que contienen el plasma son múltiplemente conexas.

Interpretación física de la Helicidad Magnética

Para comprender el significado físico de la helicidad magnética comencemos por imaginar un tubo infinitesimal, cuyas paredes están formadas por líneas de inducción magnética \vec{B} cerradas e infinitamente próximas. Sean $d\vec{\sigma}_1$ el vector que dirige el área transversal del tubo, C_1 una línea de campo cerrada interior al mismo y Σ_1 una superficie simple abierta limitada por la curva C_1 . La helicidad magnética diferencial dK calculada sobre el volumen del tubo infinitesimal será

$$dK = \oint_{C_1} (\vec{A} \cdot \vec{B})(d\vec{\sigma}_1 \cdot d\vec{l}_1) \quad (28)$$

Nótese que tanto la inducción magnética como los diferenciales de área y longitud son colineales en cada punto de la región de integración. Si denotamos por \vec{u} al vector unitario tangente a la curva C_1 en cada punto, la integral anterior puede reescribirse como

$$dK = \oint_{C_1} (\vec{A} \cdot \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{u})Bd\sigma_1 dl_1 \quad (29)$$

$$dK = \oint_{C_1} (\vec{A} \cdot d\vec{l}_1)(\vec{B} \cdot d\vec{\sigma}_1) \quad (30)$$

Por la forma en que fue elegido el tubo de inducción, el flujo magnético $d\phi_1$ a través de cualquier sección transversal del mismo es constante, y viene dado por

$$d\phi_1 = \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}_1. \quad (31)$$

Entonces la integral (30) se reduce a

$$dK = d\phi_1 \oint_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{l}_1 \quad (32)$$

Asumiendo la regularidad del potencial \vec{A} y utilizando el teorema de Stokes tenemos que

$$\begin{aligned} dK &= d\phi_1 \int_{\Sigma_1} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{\Sigma}_1 \\ dK &= d\phi_1 \int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}_1 \\ dK &= \cancel{Phid\phi_1} \cdot \phi_1 \cdot d\phi_1 \end{aligned} \quad (33)$$

Esta última relación provee una interpretación para la helicidad magnética calculada sobre un tubo infinitesimal cerrado en términos de los flujos magnéticos. La helicidad es el producto del flujo diferencial contenido en el tubo, por el flujo del campo exterior al mismo que atraviesa cualquier superficie simple contorneada por dicho tubo ⁵.

En este punto es conveniente notar el carácter no local de la helicidad magnética. En efecto, aunque la integral (28) se extiende exclusivamente sobre el volumen interior al tubo, la relación (33) involucra detalles de la inducción magnética \vec{B} exteriores a dicho volumen. Esto muestra que la integral (28) contiene la información acerca de ciertos detalles relevantes de la inducción magnética exterior al volumen de integración. Estos detalles están implícitos en el potencial vector \vec{A} , y es en este sentido que tanto el potencial vector como la helicidad magnética resultan no locales⁶.

Cuando el flujo a través de la superficie Σ_1 es no nulo podemos interpretar que existen líneas de inducción magnética que atraviesan dicha superficie en forma no compensada (es decir, el número de veces que la línea atraviesa la superficie en un sentido es distinto al número de veces que lo hace en el sentido contrario). Dado que las líneas de inducción son cerradas (campo solenoidal), la falta de compensación mencionada deriva en el encadenamiento de dichas líneas con el tubo de inducción dirigido por la curva cerrada C_1 . En este sentido, decimos que la helicidad magnética es una medida del encadenamiento entre las líneas de inducción magnética ⁷.

Ahora intentaremos dar un sentido concreto al concepto de helicidad calculada sobre un volumen macroscópico simplemente conexo. Para ello consideremos el caso simple en el cual dos tubos de sección transversal macroscópica se entrelazan como eslabones de una cadena, ocupando todo el volumen de la región. Cada uno

⁵La helicidad será positiva cuando los flujos Φ_1 y $d\phi_1$ tengan los sentidos relacionados por la regla de la mano derecha.

⁶Nótese que la inducción magnética \vec{B} puede variarse arbitrariamente en una región del espacio, a la vez que se mantiene constante en otra región. Sin embargo, el potencial vector \vec{A} asociado variará como consecuencia de la modificación de \vec{B} , tanto en la región donde ocurre dicha modificación como en el resto del espacio.

⁷No obstante, la helicidad magnética nula no es equivalente a la ausencia de encadenamiento. A tal efecto puede argumentarse que los flujos a través de una superficie pueden ser compensados por el aporte de diferentes líneas de inducción. Casos topológicamente más complejos tales como el nudo "Whitehead", constituyen también encadenamientos con helicidad nula.

de estos tubos puede subdividirse en un conjunto de tubos infinitesimales, para los cuales la helicidad diferencial viene dada por la ecuación (33). Denotamos por σ_1 y σ_2 a dos secciones transversales arbitrariamente elegidas en cada uno de los tubos macroscópicos. Una caracterización adecuada para los tubos infinitesimales puede hacerse introduciendo dos pares de coordenadas (ξ_1, η_1) y (ξ_2, η_2) , que determinan los puntos sobre las superficies σ_1 y σ_2 respectivamente. La helicidad magnética K puede escribirse entonces como sigue

$$K = \int_V (\vec{A} \cdot \vec{B}) dV = \int_{\sigma_1} dK(\xi_1, \eta_1) + \int_{\sigma_2} dK(\xi_2, \eta_2) \quad (34)$$

donde $dK(\xi_i, \eta_i)$ es la helicidad magnética diferencial correspondiente al tubo caracterizado por las coordenadas (ξ_i, η_i) . Definimos por $\Sigma_1(\xi_1, \eta_1)$ y $\Sigma_2(\xi_2, \eta_2)$ a dos superficies abiertas contorneadas por los tubos infinitesimales denotados por (ξ_1, η_1) y (ξ_2, η_2) respectivamente. Utilizando la ecuación (33) tenemos que

$$K = \int_{\sigma_1} d\phi_1(\xi_1, \eta_1) \int_{\Sigma_1(\xi_1, \eta_1)} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}_1 + \int_{\sigma_2} d\phi_2(\xi_2, \eta_2) \int_{\Sigma_2(\xi_2, \eta_2)} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}_2 \quad (35)$$

Nótese que siempre es posible elegir las superficies $\Sigma_1(\xi_1, \eta_1)$ y $\Sigma_2(\xi_2, \eta_2)$ de modo que incluyan a σ_2 y a σ_1 respectivamente. Por otra parte, obsérvese que sobre las superficies $\{\Sigma_1(\xi_1, \eta_1) - \sigma_2\}$ y $\{\Sigma_2(\xi_2, \eta_2) - \sigma_1\}$ el flujo magnético es nulo⁸. En consecuencia, la última ecuación puede reescribirse como sigue

$$\begin{aligned} K &= \int_{\sigma_1} d\phi_1(\xi_1, \eta_1) \int_{\sigma_2} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}_2 + \int_{\sigma_2} d\phi_2(\xi_2, \eta_2) \int_{\sigma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}_1 \\ K &= \phi_2 \int_{\sigma_1} d\phi_1(\xi_1, \eta_1) + \phi_1 \int_{\sigma_2} d\phi_2(\xi_2, \eta_2), \end{aligned} \quad (36)$$

con lo cual se concluye que

$$K = 2\phi_1\phi_2 \quad (37)$$

Esta ecuación provee la interpretación física buscada para la helicidad magnética evaluada sobre un volumen macroscópico. Esta puede interpretarse como una magnitud proporcional al producto de los flujos encadenados, y en tal sentido decimos que la helicidad magnética es una medida del encadenamiento macroscópico de los tubos de flujo magnético.

Una interpretación alternativa que permite construir otra forma diferencial de la helicidad magnética puede derivarse de la relación (37). Para ello consideremos que dentro de un volumen V se encuentra un hipotético campo magnético constituido únicamente por dos tubos infinitesimales encadenados una sola vez. Entonces es inmediato que

$$\delta K = 2 \times d\phi_1 d\phi_2 \quad (38)$$

⁸El signo "-" utilizado aquí debe entenderse en sentido conjuntista

NO

Esta helicidad magnética diferencial da cuenta del encadenamiento entre dos tubos infinitesimales simples cerrados, y varios autores la utilizan como punto de partida para la interpretación macroscópica ⁹.

Una extensión inmediata para sistemas con múltiples encadenamientos puede obtenerse a partir de (37) y viene dada por

$$K = \sum_{i \neq j} \phi_i \phi_j = 2 \sum_{i < j} \phi_i \phi_j \quad (39)$$

Todos los resultados obtenidos en esta sección son válidos siempre que la región en la cual se desarrollan los campos sea simplemente conexa.

Significado de la helicidad magnética en sistemas múltiplemente conexos

Con el objeto de ilustrar el significado de la helicidad magnética en sistemas con contornos completamente generales, elegimos el espacio comprendido por un toro por tratarse del volumen más sencillo no simplemente conexo. Desde el punto de vista topológico, sobre la superficie del toro pueden distinguirse dos clases de curvas no reducibles a un punto a través de deformaciones continuas. Identificamos por C_1 a las curvas que pueden deformarse hasta rodear el agujero central del toro, y por C_2 a las que pueden reducirse hasta limitar una sección transversal del toro.

El potencial vector \vec{A} es un campo que se extiende tanto en la región interior del toro como en el medio exterior. De acuerdo con su carácter no local, el potencial vector interior al toro posee información acerca de ciertas peculiaridades del campo exterior. Si suponemos que la superficie del toro se comporta como una superficie magnética ($\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$), es evidente que la helicidad magnética definida por

$$K = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} dv \quad (40)$$

dependerá de la estructura del campo exterior al toro, a través de \vec{A} . En particular, esta helicidad dará cuenta de los enlaces que ocurran entre las líneas de inducción magnéticas interiores al toro. Además, incluirá el encadenamiento de dichas líneas con las del campo exterior que atraviesan el agujero del toro ¹⁰. Este último efecto es forzado por la topología, desnaturalizando el significado físico de la helicidad.

Con el objeto de salvar la dificultad que introduce la definición (40), introducimos un nuevo invariante que sólo tiene en cuenta los encadenamientos internos del

⁹Se ha utilizado δK para evitar confusiones con dK , cuyo significado físico es distinto.

¹⁰Nótese que este encadenamiento se cuenta una sola vez, dado que la integral de volumen no incluye el espacio ocupado por el campo externo.

toro. Sean c_1 y c_2 dos curvas cualesquiera de las clases C_1 y C_2 respectivamente. Definimos la helicidad magnética modificada K^1 por

$$K^1 = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} dv - \oint_{c_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} \oint_{c_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (41)$$

El significado físico de este invariante puede comprenderse fácilmente si se asume la regularidad del potencial vector \vec{A} en todo el espacio. Utilizando el Teorema de Stokes tenemos que

$$\oint_{c_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_1 \quad (42)$$

$$\oint_{c_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_2 \quad (43)$$

donde S_1 y S_2 son superficies simples contorneadas por las curvas c_1 y c_2 respectivamente, mientras que Φ_1 y Φ_2 son los flujos a través de las mismas. Nótese que cualquiera sea la elección de c_1 y c_2 , Φ_1 representa el flujo del campo exterior a través del agujero del toro, a la vez que Φ_2 es el flujo del campo interior a través de la sección transversal del toro. Entonces, la helicidad magnética modificada K^1 viene dada por

$$K^1 = K - \Phi_1 \Phi_2. \quad (44)$$

Esta expresión puede interpretarse, valiéndose de la relación (37), como una medida del encadenamiento del campo interior del toro, descartando el enlace con el campo exterior establecido por la topología del sistema.

El problema de la Energía Magnética Mínima y la Helicidad total

Un plasma congelado que ocupa un volumen limitado por una superficie magnética, evolucionará espontáneamente hacia el estado de energía mínima compatible con sus restricciones topológicas. Cuando la única energía relevante es la magnética, esta es la que debe hacerse mínima respetando los encadenamientos de las líneas de inducción magnética. Un resultado inmediato que puede entenderse en términos de las propiedades de los plasmas congelados, es que la helicidad magnética total será un invariante temporal en la evolución hacia la energía magnética mínima. En los tratamientos que siguen presentamos varios modos de derivar este resultado utilizando exclusivamente consideraciones magnetohidrodinámicas. También encontramos una caracterización para los estados de energía magnética mínima para los casos de cavidades rígidas conductoras perfectas y sistemas cerrados (Teorema de Woltjer)

Plasmas confinados en cavidades conductoras

Sea V el volumen de una región limitada por una pared rígida conductora que caracteriza una superficie cerrada S . Si un plasma neutro de conductividad infinita ocupa el volumen V , su evolución temporal ocurrirá de modo que la helicidad magnética K se mantenga constante.

Por otra parte, el estado en que la energía magnética W es mínima se caracteriza por la ausencia de fuerzas magnéticas en todo el volumen V (estado force-free con α constante).

Para demostrar la primera parte utilizamos el gauge definido por las ecuaciones (19) y (20). Nótese que la propiedad de invariancia definido por la ecuación (26) es perfectamente aplicable en este caso, con lo cual la elección de un gauge particular no le resta generalidad a los resultados que se obtengan.

La evolución temporal de la helicidad magnética puede desarrollarse como sigue

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\int_V (\vec{A} \cdot \vec{B}) dv \right] \\ \frac{dK}{dt} &= \int_V \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B} \right) dv + \int_V \left(\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv.\end{aligned}$$

Reemplazando las relaciones (18) y (21) tenemos que

$$\frac{dK}{dt} = \int_V [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{B}] dv + \int_V \{ \vec{A} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})] \} dv. \quad (45)$$

El primer integrando se anula idénticamente, mientras que el segundo puede desarrollarse como sigue

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})] &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times (\vec{v} \times \vec{B})] \\ \vec{A} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})] &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot [\vec{A} \times (\vec{v} \times \vec{B})] \\ \vec{A} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})] &= -\vec{\nabla} \cdot [\vec{v}(\vec{A} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{v})].\end{aligned} \quad (46)$$

Reemplazando en la ecuación (45) y utilizando el teorema de Gauss tenemos que

$$\frac{dK}{dt} = - \int_S [\vec{v}(\vec{A} \cdot \vec{B})] \cdot d\vec{S} + \int_S [\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{v})] \cdot d\vec{S}.$$

La primera de estas integrales se anula por la condición de rigidez de la superficie que impone la perpendicularidad entre \vec{v} y $d\vec{S}$. Por su parte, la segunda integral también se anula porque la superficie es un conductor perfecto y en consecuencia la inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ es tangente en todo punto. Entonces queda demostrado que la helicidad magnética K es un invariante temporal.

$$\frac{dK}{dt} = 0. \quad (47)$$

2^o)

Para probar la segunda parte del teorema podemos evaluar la energía magnética mínima compatible con las condiciones de contorno para la inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$, suponiendo una helicidad magnética dada K_0 .

Para ello nos valemos de un criterio variacional, buscando una condición de extremo para la energía que mediante el método de Multiplicadores de Lagrange puede hacerse compatible con una helicidad magnética constante K_0 .

Sea W la energía dada por

$$W = (2\mu)^{-1} \int_V |B|^2 dv.$$

La condición extremal modificada será

$$\begin{aligned} \delta W = (2\mu)^{-1} \left\{ \int_V [2(\vec{B} \cdot \delta\vec{B}) dv - \alpha \int_V [(\delta\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \delta\vec{B})] dv \right\} = 0, \\ \int_V [2(\vec{B} \cdot \delta\vec{B}) dv - \alpha \int_V [(\delta\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \delta\vec{B})] dv = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

En primer lugar evaluamos la relación entre $\delta\vec{A}$ y $\delta\vec{B}$. Debido a la linealidad del operador rotor, se tiene que

$$\delta\vec{B} = \nabla \times \delta\vec{A}. \quad (49)$$

La condición extremal implica la evaluación sobre todas las variaciones $\delta\vec{B}(\vec{r}, t)$ en el volumen V , que resulten tangentes sobre la superficie cerrada S . Ahora probaremos que la condición

$$\delta\vec{A}(\vec{r}_s, t) = 0, \quad (50)$$

sobre la superficie S es suficiente para incluir todas las posibles variaciones $\delta\vec{B}(\vec{r}_s, t)$ compatibles con las condiciones de contorno (el subíndice "s" se ha incluido para indicar posiciones sobre la superficie S).

Consideremos que la superficie cerrada S (estática por hipótesis) tiene condiciones de regularidad suficientes para ser descripta por una ecuación escalar de la forma

$$\psi(\vec{r}_s) = 0. \quad (51)$$

La condición (50) implica que cada una de las componentes del campo vectorial $\delta\vec{A}(\vec{r}, t)$ se anula para todo tiempo sobre la superficie S , por lo cual es razonable suponer que en un entorno de la superficie S , $\delta\vec{A}(\vec{r}, t)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} \delta\vec{A}(\vec{r}, t) &= [F_x(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}), F_y(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}), F_z(\vec{r}, t)\psi(\vec{r})] \\ \delta\vec{A}(\vec{r}, t) &= \psi(\vec{r})\vec{F}(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (52)$$

donde $\vec{F}(\vec{r}, t)$ es un campo vectorial regular en el entorno de S. Entonces reemplazando en la ecuación (49) sobre la superficie S tenemos que

$$\begin{aligned}\delta\vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\psi\vec{F}) \\ \delta\vec{B} &= \psi(\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \vec{F} \times \vec{\nabla}\psi \\ \delta\vec{B}_\perp + \delta\vec{B}_\parallel &= \vec{F} \times \vec{\nabla}\psi.\end{aligned}\quad (53)$$

Como $\vec{\nabla}\psi$ es un vector perpendicular a la superficie S, el segundo miembro de (53) está contenido en dicha superficie. Por lo tanto,

$$\delta\vec{B}_\perp(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (54)$$

Esto significa que $\delta\vec{B}$ compatible con la condición (50) satisface la condición de contorno sobre S. Falta probar que la condición (50) incluye todas las posibilidades de $\delta\vec{B}$ sobre la superficie.

La ecuación (53) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\delta\vec{B}_\parallel &= \vec{F}_\perp \times \vec{\nabla}\psi + \vec{F}_\parallel \times \vec{\nabla}\psi \\ \delta\vec{B}_\parallel &= \vec{F}_\parallel \times \vec{\nabla}\psi,\end{aligned}\quad (55)$$

de donde se concluye que $\vec{F}_\perp(\vec{r}_s, t)$ puede elegirse arbitrariamente. Haciendo el producto vectorial de ambos miembros de la ecuación (55) por $\vec{\nabla}\psi$ y reordenando, tenemos que

$$\vec{F}_\parallel(\vec{r}_s, t) = \frac{\vec{n}(\vec{r}_s) \times \delta\vec{B}_\parallel(\vec{r}_s, t)}{|\vec{\nabla}\psi|(\vec{r}_s, t)}, \quad (56)$$

donde $\vec{n}(\vec{r}_s)$ es el versor normal en cada punto de la superficie.

Con esto concluimos que dado $\delta\vec{B}_\parallel(\vec{r}_s, t)$ completamente arbitrario siempre es posible construir un campo vectorial \vec{F} a partir de la ecuación (56), que convalide el uso de la condición (50).

Ahora estamos en condiciones de retomar la ecuación (48) para derivar la condición extremal. Analizando por separado los integrandos de (48)

$$\begin{aligned}2\vec{B} \cdot \delta\vec{B} &= 2\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \delta\vec{A}) \\ 2\vec{B} \cdot \delta\vec{B} &= 2[\vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{A} \times \vec{B}) + \delta\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})]\end{aligned}\quad (57)$$

$$\begin{aligned}(\delta\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \delta\vec{B}) &= (\delta\vec{A} \cdot \vec{B}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \delta\vec{A}) \\ (\delta\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \delta\vec{B}) &= 2(\delta\vec{A} \cdot \vec{B}) + \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{A} \times \vec{A}).\end{aligned}\quad (58)$$

Reemplazando los resultados (57) y (58) en la ecuación (48), reordenando y aplicando el teorema de Gauss se obtiene

$$2 \int_V \{\delta\vec{A} \cdot [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \alpha\vec{B}]\} dv + \int_S [\delta\vec{A} \times (2\vec{B} - \alpha\vec{A})] \cdot d\vec{S} = 0. \quad (59)$$

La integral de superficie se anula en virtud de la condición (50). La anulaci3n de la integral de volumen para cualquier variaci3n $\delta\vec{A}(\vec{r}, t)$ en dicho volumen requiere la condici3n

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \alpha\vec{B}, \quad (60)$$

con lo cual queda demostrado que la energa magn3tica extremal compatible con una helicidad dada K_0 ocurre cuando la inducci3n magn3tica \vec{B} satisface la condici3n (60) de campos force-free con α constante. N3tese que esta condici3n es necesaria pero no suficiente para caracterizar el estado de energa magn3tica m3nima. En efecto, es posible encontrar m3s de un estado force-free para un sistema dado con diferentes energas.

Evoluci3n temporal de superficies magn3ticas. Invariancia de la helicidad

Seg3n se ha probado, cuando se calcula la helicidad magn3tica sobre un volumen limitado por una superficie magn3tica, esta resulta invariante ante transformaciones de Gauge. Esto permite utilizar el gauge propuesto por las relaciones (19) y (20) sin perdida de generalidad.

Sea V el volumen limitado por una superficie magn3tica S que evoluciona en el tiempo seg3n un campo de velocidades $\vec{v}(\vec{r})$. Consideremos la helicidad magn3tica definida por

$$K = \int (\vec{A} \cdot \vec{B}) dv. \quad (61)$$

La evoluci3n temporal de esta helicidad, incluyendo los cambios de contorno debidos al movimiento de la superficie l3mite, pueden escribirse como

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B} \right) dv + \int_V \left(\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv + \oint_S (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (62)$$

Utilizando las relaciones (18) y (21) podemos reescribir las integrales de (62) como sigue

$$\frac{dK}{dt} = \int_V [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{B}] dv + \int_V \{ \vec{A} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})] \} dv + \oint_S (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (63)$$

El primer integrando se anula id3nticamente mientras que el segundo puede reemplazarse por (46). Utilizando el teorema de Gauss tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= - \oint_S [\vec{v}(\vec{A} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{v})] \cdot d\vec{S} + \oint_S (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{v} \cdot d\vec{S} \\ \frac{dK}{dt} &= \oint_S (\vec{A} \cdot \vec{v}) \vec{B} \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (64)$$

Dado que S es una superficie magnética, la inducción magnética \vec{B} resulta perpendicular a $d\vec{S}$. De esto se concluye que la helicidad K es un invariante temporal

$$\frac{dK}{dt} = 0. \quad (65)$$

Nota sobre sistemas cerrados

Entendemos por sistema cerrado (o aislado) a todo sistema que no intercambia materia ni carga eléctrica con el medio exterior, a la vez que no es afectado por campos externos y los campos con fuentes en su interior no influyen fuera de sus límites. Por otra parte, tampoco interactúan a través de efectos de contacto ya sea térmica o mecánicamente. En lo que sigue nos proponemos caracterizar las condiciones de frontera que deben satisfacer los campos $\vec{E}(\vec{r}_s, t)$, $\vec{B}(\vec{r}_s, t)$ y el potencial vector $\vec{A}(\vec{r}_s, t)$ en la superficie límite de un sistema cerrado constituido únicamente por un plasma conductor casi perfecto (conductividad σ muy grande aunque no infinita). Utilizaremos el supraíndice “e” para indicar los campos de la región exterior y el supraíndice “i” para los campos de la región interior (ambos debidos a fuentes internas), mientras \vec{r}_s denotará los puntos de la superficie límite.

La imposibilidad de interacción mecánica con el medio exterior mediante fuerzas de contacto hace necesaria la definición de una superficie límite rígida. Así la velocidad del plasma en la superficie límite debe ser tangente a la misma.

$$\vec{v}_\perp^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (66)$$

Por su parte, la anulación de los campos eléctrico y magnético (debidos a fuentes interiores) en la región externa, condicionan el potencial vector exterior $\vec{A}^e(\vec{r}, t)$ de acuerdo con

$$\vec{E}^e(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} = 0, \quad (67)$$

$$\vec{B}^e(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}^e = 0, \quad (68)$$

donde se ha utilizado el gauge propuesto en (19) y (20). Las condiciones de contorno habituales para el campo electromagnético y las relaciones (67) y (68) conducen a

$$\vec{E}_\parallel^i(\vec{r}_s, t) = 0, \quad (69)$$

$$\vec{B}_\perp^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (70)$$

Utilizando las condiciones (66), (69) y (70) podemos escribir la densidad de corriente $\vec{J}^i(\vec{r}_s, t)$ sobre la superficie como sigue

$$\begin{aligned}\vec{J}^i &= \sigma(\vec{E}^i + \vec{v}^i \times \vec{B}^i) \\ \vec{J}^i &= \sigma(\vec{E}_\perp^i + \vec{v}_\parallel^i \times \vec{B}_\parallel^i) = \vec{J}_\perp^i,\end{aligned}\quad (71)$$

de donde se concluye que

$$\vec{J}_\parallel^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (72)$$

Dado que no puede haber corrientes que atraviesen la superficie, ni tampoco puntos de acumulación de carga sobre la misma, también podemos concluir que

$$\vec{J}_\perp^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (73)$$

La condición (72) exige la continuidad de la componente tangencial de la inducción magnética \vec{B} , y por lo tanto tenemos que

$$\vec{B}_\parallel^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (74)$$

Reemplazando este resultado y la condición (73) en (71) concluimos que

$$\vec{E}_\perp^i(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (75)$$

Combinando las condiciones (19), (69) y (75) obtenemos que

$$\frac{\partial \vec{A}^i(\vec{r}_s, t)}{\partial t} = 0; \quad (76)$$

además, dado que el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}_s, t)$ es continuo sobre la superficie (condición garantizada por (69) y (75)) y que la inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}_s, t)$ es finita a ambos lados de la misma, concluimos que el potencial vector $\vec{A}(\vec{r}_s, t)$ debe ser continuo en la superficie¹¹.

$$\vec{A}^i(\vec{r}_s, t) = \vec{A}^e(\vec{r}_s, t). \quad (77)$$

Nótese que la condición impuesta acerca de la conductividad en este tratamiento no invalida el caso límite de conductividad infinita, si no que por el contrario permite visualizar el modo correcto de realizar el paso al límite. De este modo, todos los resultados obtenidos en esta sección son válidos en plasmas conductores perfectos.

¹¹En realidad, es necesario un ajuste más detallado del gauge propuesto en (19) y (20), que deja una arbitrariedad remanente utilizable para evitar discontinuidades en el potencial vector $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Esta arbitrariedad permite ajustar $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, que puede elegirse finita en todo el espacio, con lo que queda garantizada la continuidad de $\vec{A}(\vec{r}, t)$

Teorema de Woltjer

Consideremos un plasma conductor perfecto que constituye un sistema cerrado. En estas condiciones la helicidad magnética calculada sobre todo el volumen del sistema resulta un invariante temporal. Por otra parte, la energía magnética mínima ocurre para un estado en que las fuerzas magnéticas son nulas en todo punto del plasma (estado force-free con α constante).

La condición de sistema cerrado nos permite definir una superficie límite cerrada S invariante en el tiempo, sobre la cual se anula la inducción magnética \vec{B} . De este modo, el sistema puede encuadrarse entre los casos en que vale la ecuación (26), en virtud de la cual podemos utilizar el gauge definido por (19) y (20) sin pérdida de generalidad.

Sea V el volumen limitado por la superficie S y K la helicidad magnética definida por

$$K = \int_V (\vec{A} \cdot \vec{B}) dv. \quad (78)$$

La evolución temporal K puede desarrollarse como

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \int_V \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv \\ \frac{dK}{dt} &= \int_V \left[2 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right] dv. \end{aligned} \quad (79)$$

Utilizando la relación (21) y la ley de Gauss tenemos que

$$\frac{dK}{dt} = 2 \int_V [(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{B}] dv - \oint_S \left(\vec{A} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \quad (80)$$

El integrando del primer término se anula idénticamente mientras que el segundo también es nulo en virtud de la condición (76) válida en sistemas cerrados. Con esto queda demostrado que la helicidad magnética K es un invariante temporal

$$\frac{dK}{dt} = 0. \quad (81)$$

Para probar la segunda parte buscamos el mínimo de energía magnética condicionada por una helicidad magnética constante. Los lineamientos son los mismos que derivan en la ecuación (48), por lo cual la reescribimos para utilizarla como punto de partida

$$\int_V 2(\vec{B} \cdot \delta \vec{B}) dv - \alpha \int_V [(\delta \vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \delta \vec{B})] dv = 0. \quad (82)$$

El gauge elegido en (19) y (20) deja una arbitrariedad remanente que se pone de manifiesto en el momento de elegir un potencial vectorial que satisfaga las condiciones (77) y (76) para la región exterior de sistemas cerrados. Esta arbitrariedad se remueve eligiendo al potencial vector \vec{A} como el gradiente de un campo escalar regular independiente del tiempo, cuando el campo electromagnético es nulo. Una vez hecha esta elección, los valores de \vec{A} quedan fijos sobre la superficie límite del sistema independientemente de las modificaciones físicas que operen en su interior. De este modo, cualquier cálculo que incluya variaciones $\delta\vec{A}$ puede condicionarse por

$$\delta\vec{A}(\vec{r}_s, t) = 0. \quad (83)$$

En lo que sigue, la demostración es idéntica al caso de plasmas confinados en cavidades conductoras, desde la ecuación (57) hasta la condición (60), que reescribimos como conclusión del teorema

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \alpha\vec{B}. \quad (84)$$

Con esto queda demostrado el teorema, aunque debe enfatizarse la diferencia entre las razones físicas que conducen a las condiciones (83) y (50). La primera se cumple porque el plasma es un sistema cerrado, mientras que la segunda es consecuencia de que la superficie límite es un conductor perfecto rígido¹².

Deriva de las líneas de inducción magnética en plasmas congelados. Restricciones topológicas y energía magnética mínima

Un problema importante que concierne a la Magnetohidrodinámica es la obtención del estado de mínima energía en un plasma conductor perfecto magnetizado. El carácter solenoidal del campo magnético junto con la condición de flujo congelado nos permite un análisis basado en invariantes topológicos; el más simple de estos invariantes es la helicidad magnética relacionada con el encadenamiento de las líneas de inducción (Moffatt 1992).

Uno de los primeros resultados fue obtenido por Woltjer (1958) quien demostró que en un sistema cerrado la helicidad magnética sobre todo el volumen es un invariante temporal; además mostró que la energía magnética mínima, bajo la condición de helicidad constante, corresponde a un campo force-free lineal. Sin embargo, este principio variacional no está completo, debido a que en un plasma conductor perfecto existen infinitos invariantes topológicos (Bhattacharjee 1982);

¹²Nótese que los lineamientos utilizados en la demostración de (50) no constituyen una alternativa, sino una generalización que incluye las condiciones de la demostración de (83) como un caso particular. De este modo, el teorema de Woltjer podría demostrarse utilizando (50) en lugar de (83)

con cada línea de campo cerrada puede asociarse una helicidad magnética diferencial, que permanece constante (Taylor 1974). Taylor propuso que tomando en cuenta todos estos invariantes como restricciones, el estado de mínima energía corresponde a un campo force-free no lineal, sugiriendo una prueba basada en una extensión de la técnica de los multiplicadores de Lagrange (Taylor 1986, 1992). Sin embargo, una teoría variacional acorde a los lineamientos dados por Taylor está muy lejos de ser desarrollada (Laurence y Avellaneda, 1991).

En las secciones siguientes proponemos un camino alternativo para resolver el problema de la energía mínima con infinitas restricciones. El problema de los puntos extremales condicionados puede aproximarse mediante métodos directos o usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange. La condición de flujo congelado puede interpretarse como un acoplamiento entre las líneas de inducción magnética y la materia, de forma tal de preservar la helicidad magnética diferencial en cada línea de campo cerrada, limitando el movimiento del fluido. Teniendo en cuenta que la helicidad magnética es una medida del encadenamiento entre las líneas de inducción, puede deducirse que la invariancia de la helicidad magnética diferencial sobre todas las líneas de campo cerradas ocurre si y sólo si el plasma es congelado. En este sentido decimos que la condición de congelamiento es equivalente a las infinitas restricciones topológicas. Por lo tanto, un modo alternativo para resolver el problema extremal consiste en desarrollar un método directo que restrinja las variaciones de la inducción magnética, en forma compatible con la condición de congelamiento; en este caso, la metodología propuesta resulta más adecuada que una extensión de la técnica de multiplicadores de Lagrange.

A continuación, analizaremos el sistema formado por un plasma de conductividad infinita contenido en un volumen simplemente conexo de paredes rígidas perfectamente conductoras. Definimos un campo continuo $\delta\vec{r}(\vec{r})$ con derivadas primeras continuas, las cuales representan un desplazamiento virtual arbitrario del fluido. Comenzaremos estudiando la forma en que el campo de desplazamientos transforma vectores, superficies y volúmenes infinitesimales. Con estos resultados y usando la condición de congelamiento obtenemos una transformación para el campo de inducción magnética. Finalmente, buscaremos los estados que satisfacen la condición extremal para la energía magnética.

Transformación de elementos geométricos a través de campos de desplazamientos

En esta sección estudiaremos la forma en que un campo de desplazamientos transforma vectores, áreas y volúmenes infinitesimales, con el fin de analizar la estructura de las líneas de campo desplazadas. Consideremos dos puntos infinitamente próximos caracterizados por los vectores \vec{r} y $\vec{r} + d\vec{r}$ (ver figura ()), donde $d\vec{r}$ es un vector infinitesimal en una dirección arbitraria caracterizada por el versor \hat{u} . Si aplicamos un campo de desplazamientos $\delta\vec{r}$, los puntos anteriores

experimentarán un corrimiento dado por

$$\begin{aligned}\vec{r} &\rightarrow \vec{r} + \delta\vec{r}(\vec{r}) \\ \vec{r} + dr \check{u} &\rightarrow \vec{r} + dr \check{u} + \delta\vec{r}(\vec{r} + dr \check{u}).\end{aligned}\quad (85)$$

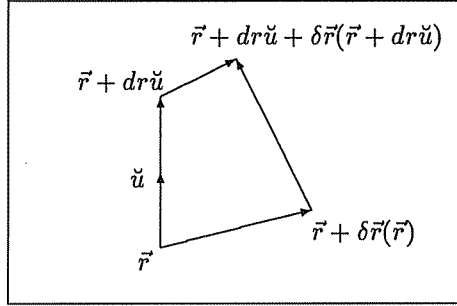


Figure 1: Esquema de la transformación de un vector diferencial debido a un campo de desplazamientos regular.

El vector diferencia desplazado $d\vec{r}'$ puede construirse restando las posiciones desplazadas,

$$\begin{aligned}d\vec{r}' &= dr \check{u} + \delta\vec{r}(\vec{r} + dr \check{u}) - \delta\vec{r}(\vec{r}) \\ d\vec{r}' &= dr[\check{u} + (\check{u} \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}].\end{aligned}\quad (86)$$

y el nuevo versor en la dirección de $d\vec{r}'$ viene dado por

$$\check{u}' = \frac{\check{u} + (\check{u} \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}}{|\check{u} + (\check{u} \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}|}\quad (87)$$

Con el fin de simplificar cálculos posteriores, introducimos un vector auxiliar \vec{u}' dado por

$$\vec{u}' = \check{u} + (\check{u} \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}\quad (88)$$

Consideremos ahora un elemento de área $d\vec{a}$ orientado arbitrariamente, y el correspondiente elemento transformado $d\vec{a}'$. Cada uno de ellos puede describirse mediante los productos siguientes

$$d\vec{a} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 = dr_1 dr_2 (\check{u}_1 \times \check{u}_2)\quad (89)$$

$$d\vec{a}' = d\vec{r}'_1 \times d\vec{r}'_2,\quad (90)$$

donde $d\vec{r}_1$ y $d\vec{r}_2$ son dos vectores diferenciales no alineados, \check{u}_1 y \check{u}_2 los versores en las direcciones correspondientes, y $d\vec{r}'_1$ y $d\vec{r}'_2$ se obtienen transformando respectivamente $d\vec{r}_1$ y $d\vec{r}_2$ mediante la relación (86). De esta manera es posible expresar

el área transformada en función de los versores \check{u}_1 y \check{u}_2 . Despreciando términos de orden superior en $\delta\vec{r}$ y sus derivadas ¹³ y, $d\vec{a}'$ se puede expresar como

$$d\vec{a}' = dr_1 dr_2 \{ \check{u}_1 \times \check{u}_2 + \check{u}_1 \times [(\check{u}_2 \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}] - \check{u}_2 \times [(\check{u}_1 \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}] \}. \quad (91)$$

Utilizando la identidad (129) y observando que \check{u}_1 y \check{u}_2 son fijos a los efectos de este cálculo, tenemos que

$$d\vec{a}' = dr_1 dr_2 \{ \check{u}_1 \times \check{u}_2 + \check{u}_1 \times \vec{\nabla}(\check{u}_2 \cdot \delta\vec{r}) - \check{u}_1 \times [\check{u}_2 \times (\vec{\nabla} \times \delta\vec{r})] - \check{u}_2 \times \vec{\nabla}(\check{u}_1 \cdot \delta\vec{r}) + \check{u}_2 \times [\check{u}_1 \times (\vec{\nabla} \times \delta\vec{r})] \}. \quad (92)$$

Valiéndonos de las identidades (127) y (133), podemos reescribir los términos de (92) del modo siguiente

$$-\check{u}_1 \times \vec{\nabla}(\check{u}_2 \cdot \delta\vec{r}) = \vec{\nabla} \times [\check{u}_1(\delta\vec{r} \cdot \check{u}_2)] \quad (93)$$

$$-\check{u}_2 \times \vec{\nabla}(\check{u}_1 \cdot \delta\vec{r}) = \vec{\nabla} \times [\check{u}_2(\delta\vec{r} \cdot \check{u}_1)] \quad (94)$$

$$\begin{aligned} -\check{u}_1 \times [\check{u}_2 \times (\vec{\nabla} \times \delta\vec{r})] + \check{u}_2 \times [\check{u}_1 \times (\vec{\nabla} \times \delta\vec{r})] &= \\ &= (\vec{\nabla} \times \delta\vec{r}) \times (\check{u}_1 \times \check{u}_2). \end{aligned} \quad (95)$$

Reemplazando en (92) y agrupando términos tenemos

$$d\vec{a}' = dr_1 dr_2 \{ \check{u}_1 \times \check{u}_2 - \vec{\nabla} \times [\check{u}_1(\delta\vec{r} \cdot \check{u}_2) - \check{u}_2(\delta\vec{r} \cdot \check{u}_1)] + [(\vec{\nabla} \times \delta\vec{r}) \times (\check{u}_1 \times \check{u}_2)] \}. \quad (96)$$

Finalmente, utilizando la identidad (126) concluimos que

$$d\vec{a}' = dr_1 dr_2 \{ \check{u}_1 \times \check{u}_2 - \vec{\nabla} \times [\delta\vec{r} \times (\check{u}_1 \times \check{u}_2)] + [(\vec{\nabla} \times \delta\vec{r}) \times (\check{u}_1 \times \check{u}_2)] \} \quad (97)$$

Esta transformación describe el modo en que se modifica un elemento de superficie cuando se aplica un desplazamiento regular arbitrario. Una forma alternativa se obtiene utilizando las identidades (129) y (132),

$$d\vec{a}' = dr_1 dr_2 \{ \check{u}_1 \times \check{u}_2 + (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r})(\check{u}_1 \times \check{u}_2) - \vec{\nabla}[\delta\vec{r} \cdot (\check{u}_1 \times \check{u}_2)] \}. \quad (98)$$

¹³Suponer que las derivadas de $\delta\vec{r}$ son pequeñas podría interpretarse como una restricción demasiado fuerte, que limitaría seriamente la validez de las ecuaciones deducidas bajo esta condición. Sin embargo, un argumento físico relativo a las propiedades de los medios continuos permite acotar el valor de las derivadas en términos del tamaño de los desplazamientos. Consideremos dos elementos de fluido contiguos muy pequeños, tal que la separación de sus centros de masa sea d . Si el módulo máximo del desplazamiento admitido para uno de ellos es ε , el módulo de la derivada debe satisfacer

$$\left| \frac{\partial \delta\vec{r}}{\partial x_d} \right| \leq \frac{2\varepsilon}{d} \leq \frac{2\varepsilon}{d_0},$$

donde x_d es una coordenada en la dirección que une los centros de masa, y d_0 es una cota inferior para la distancia entre los mismos. Como d_0 puede elegirse, por ejemplo, una distancia intermolecular típica para el fluido en cuestión, de manera que las derivadas pueden ser tan pequeñas como uno quiera si se eligen desplazamientos suficientemente pequeños.

Las ecuaciones (97) y (98) pueden escribirse en forma más compacta utilizando la relación (89), aunque a expensas de cierta pérdida de formalidad derivada de la introducción de $d\vec{a}$ en los operadores diferenciales. Hecha la aclaración, las ecuaciones mencionadas toman la forma

$$d\vec{a}' = d\vec{a} - \vec{\nabla} \times [\delta\vec{r} \times d\vec{a}] + (\vec{\nabla} \times \delta\vec{r}) \times d\vec{a}, \quad (99)$$

$$d\vec{a}' = d\vec{a} + (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r})d\vec{a} - \vec{\nabla}[\delta\vec{r} \cdot d\vec{a}]. \quad (100)$$

Por último buscaremos una transformación para los elementos de volumen infinitesimales. Sean dv un elemento de volumen y dv' su correspondiente elemento transformado, que pueden expresarse como los productos mixtos siguientes

$$dv = d\vec{r}_3 \cdot (d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2) = dr_1 dr_2 dr_3 [\check{u}_3 \cdot (\check{u}_1 \times \check{u}_2)] \quad (101)$$

$$dv' = d\vec{r}'_3 \cdot (d\vec{r}'_1 \times d\vec{r}'_2) \quad (102)$$

donde $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$ y $d\vec{r}_3$ son tres vectores diferenciales no coplanares, \check{u}_1 , \check{u}_2 y \check{u}_3 son los versores en las direcciones correspondientes y donde los diferenciales primados resultan de transformar sus homólogos no primados. Utilizando las transformaciones (86) y (98) el elemento de volumen transformado puede escribirse como

$$dv = dr_1 dr_2 dr_3 \{ \check{u}_3 + (\check{u}_3 \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r} \} \cdot \{ (\check{u}_1 \times \check{u}_2) + (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r})(\check{u}_1 \times \check{u}_2) - \vec{\nabla}[\delta\vec{r} \cdot (\check{u}_1 \times \check{u}_2)] \}. \quad (103)$$

Despreciando términos de orden superior en $\delta\vec{r}$ y sus derivadas primeras, al distribuir el producto anterior tenemos que

$$dv' = dr_1 dr_2 dr_3 \{ \check{u}_3 \cdot (\check{u}_1 \times \check{u}_2) [1 + (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r})] - \check{u}_3 \cdot \vec{\nabla}[\delta\vec{r} \cdot (\check{u}_1 \times \check{u}_2)] + (\check{u}_1 \times \check{u}_2) \cdot [(\check{u}_3 \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}] \} \quad (104)$$

A continuación probaremos que el segundo y tercer término de la llave se cancelan mutuamente. En el desarrollo siguiente, utilizaremos secuencialmente las identidades (129), (128), (130), (126) y (131), asumiendo que los versores \check{u}_1 , \check{u}_2 y \check{u}_3 son constantes a efectos de este cálculo:

$$\begin{aligned} & (\check{u}_1 \times \check{u}_2) \cdot [(\check{u}_3 \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}] = \\ & = -(\check{u}_1 \times \check{u}_2) \cdot [\vec{\nabla}(\check{u}_3 \cdot \delta\vec{r}) - \check{u}_3 \times (\vec{\nabla} \times \delta\vec{r})] = \\ & = -(\check{u}_1 \times \check{u}_2) \cdot \vec{\nabla}(\delta\vec{r} \cdot \check{u}_3) + (\vec{\nabla} \times \delta\vec{r}) \cdot [(\check{u}_1 \times \check{u}_2) \times \check{u}_3] = \\ & = -(\check{u}_1 \times \check{u}_2) \cdot \vec{\nabla}(\delta\vec{r} \cdot \check{u}_3) + \vec{\nabla} \cdot \{ \delta\vec{r} \times [(\check{u}_1 \times \check{u}_2) \times \check{u}_3] \} = \\ & = -(\check{u}_1 \times \check{u}_2) \cdot \vec{\nabla}(\delta\vec{r} \cdot \check{u}_3) + \vec{\nabla}[(\check{u}_1 \times \check{u}_2)(\delta\vec{r} \cdot \check{u}_3) + \check{u}_3(\delta\vec{r} \cdot (\check{u}_1 \times \check{u}_2))] = \\ & = -(\check{u}_1 \times \check{u}_2) \cdot \vec{\nabla}(\delta\vec{r} \cdot \check{u}_3) + \{ (\check{u}_1 \times \check{u}_2) \cdot \vec{\nabla}(\delta\vec{r} \cdot \check{u}_3) - \check{u}_3 \cdot \vec{\nabla}[\delta\vec{r} \cdot (\check{u}_1 \times \check{u}_2)] \} = \\ & = \check{u}_3 \cdot \vec{\nabla}[\delta\vec{r} \cdot (\check{u}_1 \times \check{u}_2)] \end{aligned}$$

$$-\check{u}_3 \cdot \vec{\nabla}[\delta\vec{r} \cdot (\check{u}_1 \times \check{u}_2)] + (\check{u}_1 \times \check{u}_2) \cdot [(\check{u}_3 \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}] = 0 \quad (105)$$

Reemplazando este resultado en (104) y recordando la relación (101) tenemos que

$$dv' = [d\vec{r}_3 \cdot (d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2)][1 + \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r}] \quad (106)$$

o bien en una forma más compacta

$$dv' = dv[1 + \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r}] \quad (107)$$

Transformación de la inducción magnética ante un campo de desplazamientos bajo la condición de plasma congelado

En esta sección estamos interesados en obtener la forma de la inducción magnética en cada punto de un plasma, al efectuarse sobre él un desplazamiento regular arbitrario. Para definir mediante un sustrato material la dirección de la inducción magnética podemos elegir dos elementos de plasma, colocados en las posiciones \vec{r} y $\vec{r} + d\vec{r}$, de manera tal que $d\vec{r}$ se encuentre en la misma dirección y sentido que $\vec{B}(\vec{r})$. La condición de congelamiento mencionada en la sección anterior nos asegura que la inducción magnética $\vec{B}(\vec{r} + \delta\vec{r})$, una vez realizado el desplazamiento, debe hallarse en la dirección que une a los mismos elementos de plasma. De este modo, podemos concluir que la dirección de \vec{B} se transforma de acuerdo con la regla propuesta en la ecuación (). Además, la regularidad del campo de desplazamientos junto con la condición de congelamiento garantiza la identificación de las líneas de inducción magnética \vec{B} , que pueden rotularse antes del desplazamiento y relocalizarse después del mismo mediante la ubicación de los elementos de plasma asociados.

De lo anterior se desprende que los tubos de inducción magnética mantienen su identidad, siendo invariante el flujo magnético a través de los mismos. Valiéndonos de esta propiedad, podemos encontrar una ley de transformación para el módulo de la inducción magnética $B'(\vec{r} + \delta\vec{r})$. Si denotamos con $d\vec{a}$ y $d\vec{a}'$ a las áreas de las secciones transversales diferenciales de un tubo de inducción infinitesimal antes y después del desplazamiento, la condición anterior puede escribirse como

$$\vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a}(\vec{r}) = \vec{B}'(\vec{r} + \delta\vec{r}) \cdot d\vec{a}'(\vec{r} + \delta\vec{r}). \quad (108)$$

En lo sucesivo omitiremos las dependencias por simplicidad, aunque es conveniente que se tengan en cuenta para la comprensión del análisis que sigue.

Sea \check{u} un versor en la dirección de \vec{B} , y \vec{u}' su correspondiente vector transformado. La ecuación (108) puede reconstruirse como sigue

$$\vec{B}' = B \frac{(d\vec{r} \cdot d\vec{a})}{(d\vec{r}' \cdot d\vec{a}')} \vec{u}' = B \frac{dv}{dv'} \vec{u}'. \quad (109)$$

A continuación desarrollamos una aproximación a primer orden en $\delta\vec{r}$ para el campo transformado \vec{B}' . Nótese en primer lugar que el denominador de (109) resulta de transformar un elemento de volumen de acuerdo con (106), mientras que el vector \vec{u}' proviene de transformar \vec{u} según (88). Reemplazando estos resultados tenemos que

$$\vec{B}' = B \frac{\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}}{(1 + \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r})}. \quad (110)$$

Desarrollando a primer orden $(1 + \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r})^{-1}$, la expresión anterior se convierte en

$$\vec{B}' = B [\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r}](1 - \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r}). \quad (111)$$

Por último, distribuyendo y despreciando nuevamente términos de orden superior en $\delta\vec{r}$ concluimos que

$$\vec{B}'(\vec{r} + \delta\vec{r}) = \vec{B}'(\vec{r}) + (\vec{B}'(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r} - (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r})\vec{B}'(\vec{r}). \quad (112)$$

En esta ecuación se han agregado nuevamente las dependencias con el objeto de poner de manifiesto la deslocalización producida por la transformación. En realidad, estamos interesados en encontrar la forma de $\vec{B}'(\vec{r})$, para lo cual podemos utilizar un desarrollo en serie hasta primer orden de \vec{B}' alrededor del punto \vec{r} suponiendo que $\delta\vec{r}$ es muy pequeño.

$$\vec{B}'(\vec{r} + \delta\vec{r}) = \vec{B}'(\vec{r}) + (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}'(\vec{r}), \quad (113)$$

de donde,

$$\vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}'(\vec{r} + \delta\vec{r}) - (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}'(\vec{r}). \quad (114)$$

Reemplazando el resultado (112) en (114) y observando detenidamente el modo en que se desprecian términos de orden superior en $\delta\vec{r}$, tenemos que

$$\vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) + (\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla})\delta\vec{r} - (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{r})\vec{B}(\vec{r}) - (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}(\vec{r}). \quad (115)$$

Introduciendo un término complementario, que resulta idénticamente nulo por contener $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$, la expresión anterior puede escribirse en forma compacta como

$$\vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times [\delta\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})]. \quad (116)$$

La última relación da cuenta del efecto que produce un desplazamiento $\delta\vec{r}$ sobre la inducción magnética en cada punto del plasma, respetando la condición de congelamiento. Esta expresión puede escribirse en un modo que resultará útil en cálculos variacionales posteriores, introduciendo el vector $\delta\vec{B}(\vec{r})$

$$\delta\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times [\delta\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})] \quad (117)$$

Energía magnética mínima

Para evaluar las propiedades del estado de energía magnética mínima W proponemos la anulación de la variación δW , calculada bajo las restricciones impuestas por la condición de congelamiento que caracteriza a los plasmas conductores perfectos. Estas restricciones constituyen un conjunto continuo de infinitas ecuaciones de vínculo, que expresan la invariancia de la helicidad diferencial sobre cada línea de inducción magnética. Sin embargo, es posible tener en cuenta implícitamente los vínculos mencionados, reduciendo el conjunto de variaciones a aquellas funciones $\delta \vec{B}(\vec{r})$ compatibles con un desplazamiento arbitrario $\delta \vec{r}(\vec{r})$ de la materia.

Sea $\delta \vec{r}(\vec{r})$ un campo de desplazamientos infinitesimales arbitrario, que se aplica sobre un plasma conductor perfecto confinado en un volumen V , limitado por una superficie S cerrada y rígida. La condición de rigidez sobre S impone la restricción dada por

$$\delta \vec{r}(\vec{r}_s) \cdot d\vec{S} = 0. \quad (118)$$

Si además imponemos que la superficie esté constituida por un conductor perfecto, debe satisfacerse también la condición

$$\vec{B}(\vec{r}_s) \cdot d\vec{S} = 0. \quad (119)$$

Introducimos ahora la condición de anulación sobre δW . Esta implica que

$$\int_V (\vec{B} \cdot \delta \vec{B}) dv = 0. \quad (120)$$

Utilizando la relación (117) que vincula la variación de la inducción magnética con el correspondiente desplazamiento de plasma, tenemos

$$\int_V \{ \vec{B} \cdot [\vec{\nabla} \times (\delta \vec{r} \times \vec{B})] \} dv = 0. \quad (121)$$

Operando con identidades vectoriales y utilizando el teorema de Gauss podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_V \{ \vec{\nabla} \cdot [(\delta \vec{r} \times \vec{B}) \times \vec{B}] + (\delta \vec{r} \times \vec{B}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \} &= 0 \\ \oint_S [(\delta \vec{r} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \cdot d\vec{S} - \int_V \{ [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \cdot \delta \vec{r} \} dv &= 0 \\ \oint_S (\vec{B} \cdot \delta \vec{r}) \vec{B} \cdot d\vec{S} - \oint_S (\vec{B} \cdot \vec{B}) \delta \vec{r} \cdot d\vec{S} - \int_V \{ [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \cdot \delta \vec{r} \} dv &= 0. \end{aligned} \quad (122)$$

Las integrales de superficie se anulan en virtud de las condiciones (118) y (119), por lo cual tenemos

$$\int_V \{ [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \cdot \delta \vec{r} \} dv = 0 \quad (123)$$

Dado que esta integral debe anularse para todas las posibles variaciones $\delta\vec{r}$, debe anularse el corchete del integrando. La condición más general que cumple con este requisito es

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \alpha(\vec{r})\vec{B}. \quad (124)$$

La última relación expresa que el estado con energía mínima debe ser del tipo force-free, caracterizado por un campo escalar $\alpha(\vec{r})$. Evaluando la divergencia de ambos miembros de (124), puede concluirse que

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\alpha(\vec{r}) = 0. \quad (125)$$

De esta relación se desprende que las líneas de inducción magnética se encuentran sobre superficies de α constante.

Apéndice

Identidades vectoriales

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (126)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (127)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (128)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (129)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (130)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = \varphi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \quad (131)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (132)$$

$$\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{A}) = \varphi(\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla} \varphi) \times \vec{A} \quad (133)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0 \quad (134)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (135)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (136)$$

Referencias

- Bhattacharjee, A. and Dewar, R. L., 1982, Phys. Fluids 25, 887*
- Laurence, P. and Avellaneda, M., 1991, J. Math. Phys. 32, 1240.*
- Moffatt, 1992, Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas*
(*Moffatt, H. K., Zaslavsky, G. M., Comte, P. and Tabor, M., eds.*), 3-28.
Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
- Priest, E. R., 1982, Solar Magnetohydrodynamic (Reidel Publ. Company: London.)*
- Taylor, J. B., 1974, Phys. Rev. Lett., 33, 1139.*
- Taylor, J. B., 1986, Reviews of Modern Physics 58, 741.*
- Taylor, J. B., 1992, Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas*
(*Moffatt, H. K., Zaslavsky, G. M., Comte, P. and Tabor, M., eds.*), 151-165.
Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
- Woltjer, L., 1958, Proceedings of the National Academy of Sciences, 44, 833.*

VI. Ondas magnetohidrodinámicas

Las ecuaciones de la MHD constituyen un sistema no lineal; si se las linealiza suponiendo pequeñas perturbaciones a partir de una situación de equilibrio, despreciando términos cuadráticos o mayores, el conjunto de ecuaciones resultante admite soluciones de tipo ondulatorio.

Antes de discutir estas ondas notemos lo siguiente: las ecuaciones de Maxwell en el vacío dan lugar a ondas electromagnéticas transversales ($\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$; $\vec{E} \perp \vec{k}$), debido a que un campo magnético variable $\vec{B}_m \propto e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ produce un campo eléctrico y un campo magnético variable en el tiempo produce un campo magnético; estas ondas no aparecen en la magnetohidrodinámica debido a que entre las aproximaciones que se hacen en MHD, se desprecia la corriente de desplazamiento $\partial \vec{E} / \partial t$.

Las ondas en la MHD son perturbaciones en el movimiento del plasma, que a su vez provocan perturbaciones en el campo \vec{B} , la densidad ρ y la presión p ; estas ondas son producidas por las distintas fuerzas restitutivas: gradiente de la presión, fuerza de Lorentz, gravedad (y fuerza de Coriolis, caso que no consideraremos). Si una fuer

predomina sobre las otras de modo de poder considerar una sola y despreciar las restantes tendremos ondas de sonido (producidas por el gradiente de presión), ondas magnéticas que pueden ser ondas de Alfvén de corte y de compresión (producidas por la tensión y la presión magnéticas, o sea por la fuerza de Lorentz) y ondas de gravedad (fuerza de gravedad).

Veremos primero las ondas de sonido y las ondas magnéticas; después las modificaciones que se producen si se consideran juntas el gradiente de presión y la fuerza de Lorentz: ondas magnetoacústicas; más adelante analizaremos las ondas de gravedad en ausencia de campo magnético y después consideraremos someramente que sucede si se tienen en cuenta el gradiente de presión, la fuerza de Lorentz y la gravedad juntas.

Ondas de sonido

Supongamos que tenemos un gas no viscoso en el que no hay campo magnético y la fuerza gravitatoria es despreciable. Las ecuaciones a considerar son la conservación de masa y la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \vec{\nabla} p \quad (2)$$

Además supondremos adiabaticidad, o sea que los movimientos son suficientemente rápidos como para que no haya intercambios de calor; para un gas ideal esto implica:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

o sea

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (3)$$

donde $\gamma = c_p / c_v$.

Partimos de una situación de equilibrio dada por ρ_0 y p_0 uniformes y $\vec{v}_0 = 0$; perturbamos levemente el sistema de modo que

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t), \quad p = p_0 + p_1(\vec{r}, t), \quad \vec{v} = \vec{v}_1(\vec{r}, t).$$

De las ecuaciones (1) y (2), despreciando términos cuadráticos se obtiene

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \vec{\nabla} p_1 \quad (5)$$

De la ecuación (3), reteniendo solo términos lineales:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0 + \rho_1}{(\rho_0 + \rho_1)^\gamma} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(p_0 + p_1)}{\rho_0 \delta} \left(1 - \delta \frac{p_1}{p_0} \right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[p_0 - \delta \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 + p_1 \right] = 0$$

o sea:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - c_s^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

donde

$$c_s = \left(\delta \frac{p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \tag{7}$$

es la velocidad del sonido.

Para obtener una ecuación diferencial solo para p_1 , reemplazamos la ecuación (4) en la (6):

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + c_s^2 \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 ;$$

derivando esta ecuación respecto al tiempo y usando (5):

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = - c_s^2 \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = c_s^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} p_1 = c_s^2 \nabla^2 p_1 ;$$

o sea

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

que es una ecuación de ondas para p_1 . Si propo-

memos como solución una onda plana

$$p_1 = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

resulta una relación de dispersión

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 \quad ; \quad (9)$$

las otras magnitudes tienen el mismo tipo de dependencia espacio-temporal; si ponemos para la velocidad

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

reemplazando en la ecuación (5):

$$-\rho_0 i \omega \vec{v}_1 = -A i \vec{k}$$

o sea que \vec{v}_1 es paralelo a \vec{k} : las ondas sonoras son ondas longitudinales.

La fuerza restauradora en este caso es el gradiente de presión: una compresión o una rarefacción del gas crea un gradiente de presión que tiende a restablecer el equilibrio.

Ondas magnéticas

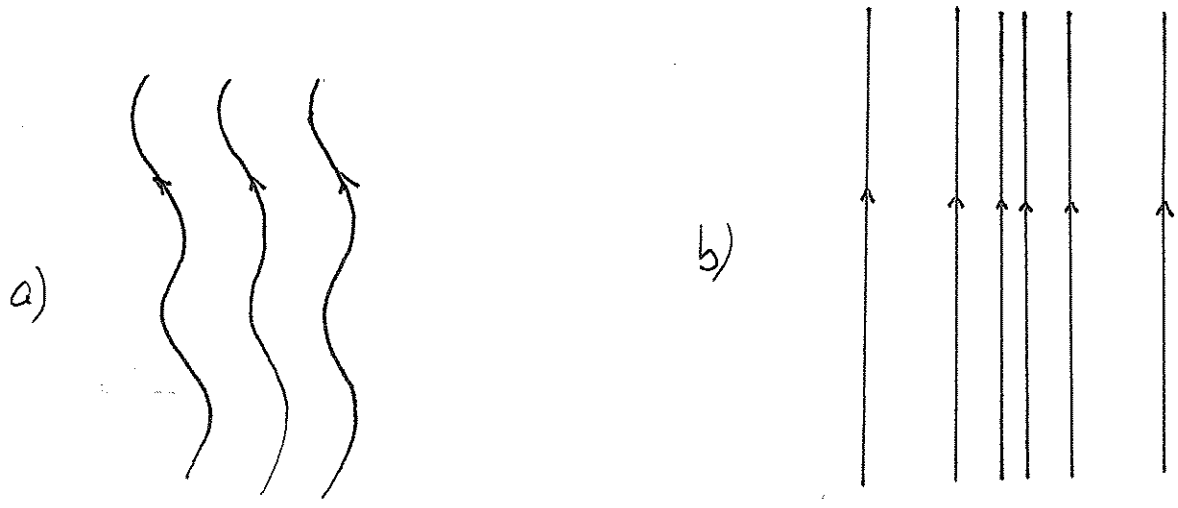
En este caso consideraremos la acción del campo magnético y despreciaremos las otras fuerzas. Vimos que la fuerza de Lorentz se puede descomponer en dos términos. Cuando es analizada como fuerza por unidad

de área transmitida de un elemento de plasma a otro adyacente, un término corresponde a tensión a lo largo de las líneas de inducción y el otro a presión normal a la superficie de separación; la fuerza volumétrica neta del primero aparece cuando hay curvatura de las líneas y está dirigida hacia el centro de curvatura de las mismas, y la del segundo cuando hay variación de la amplitud de B . Estas actuarán como fuerzas restauradoras para las ondas magnéticas que como veremos son de dos tipos: ondas de Alfvén de corte (o simplemente ondas de Alfvén) y ondas compresionales de Alfvén. Supondremos un plasma de conductividad infinita.

Antes de obtener la ecuación de onda correspondiente, analicemos gráficamente dos casos simples: supongamos que tenemos un campo \vec{B}_0 uniforme y que la perturbación \vec{B}_1 es:

- a) perpendicular a \vec{B}_0 y variando en la dirección de \vec{B}_0 .
- b) en la dirección de \vec{B}_0 y variando perpendicularmente a \vec{B}_0 .

Las líneas de inducción resultantes son:



En el caso a) el valor de $|\vec{B}|$ no varía (suponemos $|\vec{B}_1| \ll |\vec{B}_0|$) y por lo tanto no actúa la presión magnética, pero las líneas están curvadas y entonces hay resultante neta de la tensión, que vimos está en dirección del centro de curvatura; aparece una velocidad \vec{V} perpendicular a \vec{B}_0 y el plasma oscila arrastrando a las líneas, ya que hay congelamiento; se tiene $\vec{k} \parallel \vec{B}_0 \perp \vec{V} \parallel \vec{B}_1$.

En el caso b) como la presión magnética es mayor donde el campo de inducción es mayor, aparece una fuerza sobre el plasma desde la zona de mayor densidad de líneas a la de menor densidad, y una velocidad del plasma perpendicular a \vec{B}_0 ; el plasma oscila arrastrando a las líneas.

Estos son dos casos límites de las ondas de corte de Alfvén y de las ondas compresionales de Alfvén que analizaremos en seguida analíticamente.

Si se considera únicamente la fuerza de Lorentz y se desprecian las demás, las ecuaciones de conservación

de masa, de movimiento y de inducción son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B})$$

Además supondremos adiabaticidad, pero como en las ecuaciones (10) no aparece la presión, la ecuación correspondiente queda desacoplada de éstas que se pueden resolver independientemente

Partamos de una situación de equilibrio estático con densidad e inducción magnética uniformes ρ_0 y \vec{B}_0 y velocidad $\vec{v}_0 = 0$. Consideremos pequeños apartamientos de la situación de equilibrio de modo que

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1(\vec{r}, t)$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones (10) y manteniendo solo términos lineales en las perturbaciones resulta:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1) \wedge \vec{B}_0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_0)$$

Combinando estas ecuaciones se puede obtener una ecuación para \vec{V}_1 ; tomando la derivada respecto al tiempo de la 2ª:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \left(\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \right) \wedge \vec{B}_0$$

y reemplazando la tercera, se obtiene:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \left[\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{B}_0) \right] \wedge \vec{B}_0 \quad (12)$$

Proponemos una solución de la forma de onda plana monocromática.

$$\vec{V}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

con lo que resulta el mismo tipo de dependencia para ρ_1 y \vec{B}_1 . Teniendo en cuenta que si una magnitud \vec{A} tiene una dependencia $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ entonces

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\omega \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = i\vec{k} \wedge \vec{A}$$

de la ecuación (12) obtenemos:

$$\omega^2 \rho_0 \vec{v}_1 + \frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \wedge \left\{ \vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge (\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_0) \right] \right\} = 0$$

Aplicando dos veces la relación que da a que

es igual un triple producto vectorial y dividiendo por ρ_0 se llega a

$$\omega^2 \vec{v}_1 + \frac{1}{\mu \rho_0} \left[(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) (\vec{v}_1 \cdot \vec{B}_0) - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) B_0^2 \right] \vec{k} +$$

$$+ \frac{1}{\mu \rho_0} (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) (\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 - \frac{1}{\mu \rho_0} (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \vec{v}_1 = 0 \quad (13)$$

Llamaremos velocidad de Alfvén a la magnitud

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{\mu \rho_0}} \quad (14)$$

Una propiedad que se cumple siempre para ondas planas en que exista perturbación de un campo magnético, no solo para las ondas de Alfvén sino para las ondas que veremos más adelante, es que la inducción magnética perturbada es perpendicular a la dirección de propagación; esto resulta de $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, por lo que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0$, o sea

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (15)$$

Volviendo a la ecuación (13), si la multiplicamos escalarmente por \vec{B}_0 se simplifican cuatro de los términos quedando

$$\omega^2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{B}_0) = 0$$

lo que lleva a:

$$\boxed{(\vec{v}_1 \cdot \vec{B}_0) = 0} \quad (16)$$

o sea que, para las ondas ^{linealizadas} magnéticas, la velocidad de perturbación del plasma es perpendicular a la inducción magnética ambiente \vec{B}_0 .

Si ahora multiplicamos la ecuación (13) escalarmente por \vec{k} , teniendo en cuenta ⁽¹⁴⁾ (16) se llega a

$$\boxed{(\omega^2 - k^2 v_A^2)(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) = 0} \quad (17)$$

Para que se cumpla esta ecuación hay dos posibilidades: $(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) = 0$ ó $(\omega^2 - k^2 v_A^2) = 0$, dando lugar a dos modos para las ondas magnéticas.

a) Ondas de Alfvén de corte

Corresponden al caso

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0} \quad (18)$$

o sea $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0$; usando la primera de las ecuaciones (11) resulta $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0$ que para una onda plana implica

$$\rho_1 = 0 ;$$

si suponemos adiabaticidad resulta

$$\phi_1 = 0 ;$$

o sea que la onda de Alfvén ^(adiabática) transversal es una perturbación incompresible y no provoca variaciones

ni de la densidad ni de la presión y solo varían la velocidad y la inducción magnética, siendo ambas perturbaciones perpendiculares a la dirección de propagación de la fase (dada por \vec{k})

Para obtener la relación entre ω y k volvemos a la ecuación (13) y hacemos uso de (16) y (18):

$$\left[\omega^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_A)^2 \right] \vec{v}_1 = 0$$

o sea

$$\boxed{\omega = \pm k v_A \cos \theta} \quad (19)$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de propagación y \vec{B}_0 .

La relación entre \vec{v}_1 y \vec{B}_1 se obtiene de la 3ª de las ecuaciones (11):

$$-i\omega \vec{B}_1 = i k \wedge (\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_0) = i [(\vec{k} \cdot \vec{B}_0) \vec{v}_1 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0];$$

como para la onda de Alfvén de corte es $(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) = 0$ resulta

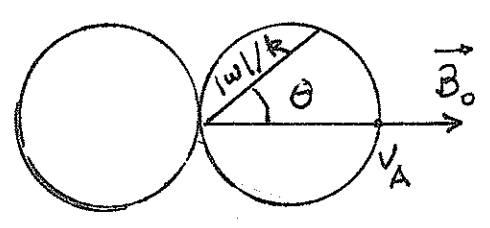
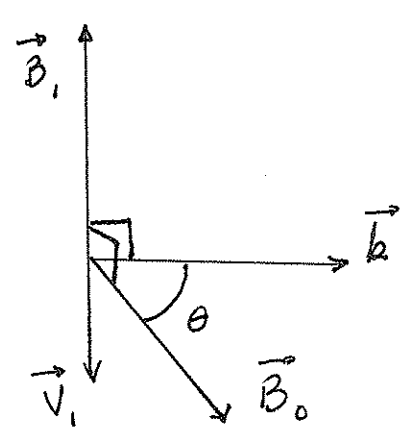
$$\vec{B}_1 = -\frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\omega} \vec{v}_1$$

y haciendo uso de la relación de dispersión (19):

$$\vec{v}_1 = \mp \frac{\vec{B}_1}{\sqrt{\mu \rho_0}} \quad ; \quad (20)$$

los signos (-) o (+) corresponden a que la velocidad de fase tenga proyección positiva o negativa en la dirección de \vec{B}_0 .

Teniendo en cuenta (15), (16), (18) y (20) vemos que tanto \vec{v}_i como \vec{B}_i son perpendiculares a \vec{B}_0 y a \vec{k} .



(para el signo de arriba)

El ejemplo a) que vimos al principio corresponde a una onda de Alfvén de corte con $\theta = 0$.

La velocidad de fase de las ondas de Alfvén tiene la dirección de \vec{k} y vale $|\vec{v}_f| = v_A |\cos \theta|$. Cuando ω depende solo del módulo de \vec{k} , la velocidad de grupo es $\partial \omega / \partial k$; en este caso en que ω depende también de la dirección de \vec{k} , debemos usar que

$$\vec{v}_g = \vec{\nabla}_k \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right)$$

Si elegimos el eje z en la dirección de \vec{B}_0 la ecuación (19) se puede poner

$$\omega = \pm v_A k_z$$

con lo que

$$\vec{v}_g = \pm \vec{v}_A$$

(21)

O sea que la energía de las ondas de Alfvén transversales se propaga en la dirección de la inducción magnética \vec{B}_0 (en el mismo sentido o en sentido opuesto), cualquiera que sea la dirección del \vec{k} .

Analizando la fuerza de Lorentz se ve que en este caso solo contribuye el término de tensión; para ver que la presión magnética no contribuye tengamos en cuenta que ésta es proporcional a B^2 y para las ondas de Alfvén de corte

$$B^2 = |\vec{B}_0 + \vec{B}_1|^2 = B_0^2 + 2\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1 + B_1^2 = B_0^2$$

ya que $\vec{B}_0 \perp \vec{B}_1$ y B_1^2 se desprecia en aproximación lineal; por lo tanto

$$\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) = 0$$

Una característica interesante de las ondas de Alfvén de corte es que, como veremos más adelante, siguen existiendo cuando se considera la presencia de $\vec{\nabla} p$ o gravedad mientras que las otras ondas magnéticas, las de Alfvén de compresión, se modifican y acoplan con las de sonido.

Otra característica muy importante de estas ondas es la siguiente: hasta ahora hemos linealizado las ecuaciones suponiendo amplitudes pequeñas; como las ecuaciones de la MHD son no lineales, al aumentar la amplitud de las ondas magnetohidrodinámicas en general ocurre que el perfil de la onda no se mantiene constante como en la aproximación lineal sino que se distorsiona con el tiempo, pudiendo dar lugar a ondas de choque; pero las ondas de Alfvén transversales tienen la peculiaridad de que se propagan sin distorsionarse aún con amplitudes grandes. Veremos que en el caso no linealizado las ecuaciones (10) se cumplen si

$$\vec{v}_1 = \mp \frac{\vec{B}_1}{\sqrt{\mu \rho_0}}, \quad |\vec{B}_0 + \vec{B}_1| = ct, \quad p_1 = 0 \quad p_1 = 0 \quad (22)$$

si no se impone adiabático $\Rightarrow p_1 \neq 0$ y $p_1 + \frac{1}{\rho_0} |\vec{B}_1|^2 = ct$
 y la perturbación viaja con una velocidad $\pm \vec{v}_A$;
 o sea que tanto \vec{v}_1 como \vec{B}_1 tienen una dependencia espacio temporal de la forma

$$\vec{A}(\vec{r} \mp \vec{v}_A t);$$

esto implica que

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mp (\vec{v}_A \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

De (22), como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0$, resulta $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0$, y

la 1ª de las ecuaciones (10) se satisface ya que $f_1 = 0$
 La 3ª de las ecuaciones (10) se satisface para la dependencia propuesta ya que

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \mp (\vec{v}_A \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 = \mp (\vec{v}_A \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{v}_1 \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)) = \mp \frac{1}{\mu \rho_0} \vec{\nabla} \wedge [\vec{B}_1 \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1)] \\ &= \mp \frac{1}{\mu \rho_0} (\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 = \mp (\vec{v}_A \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \end{aligned}$$

De la 2ª de las ecuaciones (10) tenemos
 (ec. de mov; pongamos también $\vec{\nabla} p$)

$$\begin{aligned} \mp \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}_1}{\sqrt{\mu \rho_0}} \right) + \frac{1}{\mu} (\vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 &= \frac{1}{\mu} \left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \right] \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \\ &\quad - \vec{\nabla} p \\ \sqrt{\frac{\rho_0}{\mu}} (\vec{v}_A \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 + \frac{1}{\mu} (\vec{B}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}_1 &= + \frac{1}{\mu} [(\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \cdot \vec{\nabla}] \vec{B}_1 \\ &\quad - \vec{\nabla} p - \frac{1}{2\mu} \vec{\nabla} (|\vec{B}_0 + \vec{B}_1|^2) \end{aligned}$$

El primer miembro se cancela idénticamente con el primer término del segundo miembro; el 2º término del 2º miembro se anula porque hemos supuesto que el módulo de la inducción no cambia (ver 22).
 Esta condición reemplaza a la relación $\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_0 = 0$ válida para el caso linealizado y significa que \vec{B} solo

varía en dirección: al pasar la onda la inducción magnética rota.

b) Ondas de Alfvén compresionales

La otra solución de la ecuación (17) es

$$\omega^2 - k^2 v_A^2 = 0$$

o sea

$$\omega = \pm k v_A \tag{23}$$

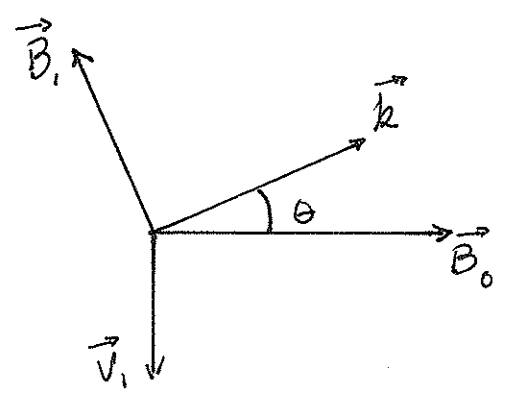
En este caso $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 \neq 0$ y por lo tanto ρ_1 y p_1 son no nulos: hay compresión.

De la ecuación (13), como el factor que multiplica a \vec{v}_1 es distinto de cero, a diferencia de lo que sucedía para las ondas de corte, resultan \vec{v}_1 , \vec{k} y \vec{B}_0 coplanares. Además, de la 3ª de las ecuaciones

(11) resulta:

$$\vec{B}_1 = -\frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)}{\omega} \vec{v}_1 + (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{B}_0 ; \tag{24}$$

por lo tanto \vec{B}_1 también está en ese plano; recordemos que, para toda onda magnética $\vec{B}_1 \perp \vec{k}$ y $\vec{v}_1 \perp \vec{B}_0$ (ecuaciones (15) y (16)) plana monocromática



El ejemplo b) que se dió al inicio de la discusión de ondas magnéticas corresponde a $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ ($\theta = \pi/2$) en cuyo caso $\vec{B}_1 \parallel \vec{B}_0$ y $\vec{v}_1 \parallel \vec{k}$; en este caso actúa sólo la presión magnética pero para un $\theta \neq \pi/2$ \vec{B}_1 tiene componente en dirección perpendicular a \vec{B}_0 por lo que las líneas de inducción se curvan y actúa también la tensión magnética.

La velocidad de fase y de grupo de estas ondas coincide:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_g = \pm v_A \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad (25)$$

Ondas magnetoacústicas

Estas ondas aparecen cuando hay que considerar tanto la fuerza de Lorentz como el gradiente de presión; la ecuación de movimiento se escribe en este caso

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mu} (\nabla \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \quad (26)$$

Tenemos además la ecuación de conservación de la masa, la ecuación de inducción, la ecuación de adiabaticidad y la ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Las ondas lineales serán en principio distintas al caso del sonido ($\vec{B} = 0$) o al de las ondas magnéticas (ρ muy pequeño). Pero recordemos que en las ondas de Alfvén de corte no había variación $\nabla \cdot \vec{v}$ de la densidad ni de la presión;

por lo tanto no se verán alteradas si en la ecuación de movimiento se agrega el término $\vec{\nabla} p$. En cambio las ondas de Alfvén compresionales y las ondas de sonido se modifican y hay que reemplazarlas por dos ondas magnetoacústicas.

Si se linealizan las ecuaciones partiendo de una situación de equilibrio con $\vec{B} = \vec{B}_0$, $p = p_0$, $f = f_0$, $\vec{v}_0 = 0$, se puede, reemplazando una en otra, obtener una ecuación diferencial únicamente para \vec{v}_1 ; si se propone una onda plana resulta

$$(\omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2 \theta) \vec{v}_1 + (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) k v_A^2 \cos \theta \vec{B}_0 - [(v_A^2 + c_s^2) (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - k v_A^2 \cos \theta (\vec{B}_0 \cdot \vec{v}_1)] \vec{k} = 0 ; \tag{27}$$

el término adicional que aparece respecto al caso magnético puro es

$$c_s^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{k}$$

y se debe al término $\vec{\nabla} p$ en la ecuación de movimiento. Recordemos que $v_A = \vec{B}_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$ y que θ es el ángulo entre \vec{B}_0 y \vec{k} ; \vec{B}_0 es un versor en la dirección del campo de inducción no perturbado.

Ahora ya no podemos concluir como en el caso puramente magnético que $\vec{v}_1 \cdot \vec{B}_0 = 0$. Para obtener la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$ de la ecuación (27) es conveniente multiplicarla escalarmente por

\vec{k} y por $\check{\vec{B}}_0$ con lo que se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} [\omega^2 - k^2 (v_A^2 + c_s^2)] (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + k^3 v_A^2 \cos \theta (\check{\vec{B}}_0 \cdot \vec{v}_1) = 0 \\ -k \cos \theta c_s^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + \omega^2 (\check{\vec{B}}_0 \cdot \vec{v}_1) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Nos queda un sistema homogéneo de ecuaciones para

$$(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \quad \text{y} \quad (\check{\vec{B}}_0 \cdot \vec{v}_1).$$

La solución trivial es

$$(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) = 0$$

$$(\check{\vec{B}}_0 \cdot \vec{v}_1) = 0$$

que corresponde a la onda de Alfvén de corte. Para que existan soluciones no triviales el determinante debe ser nulo; o sea

$$[\omega^2 - k^2 (v_A^2 + c_s^2)] \omega^2 + k^4 v_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (29)$$

cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{k^2} &= \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(v_A^2 + c_s^2)^2 - 4 v_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{v_A^4 + c_s^4 - 2 c_s^2 v_A^2 \cos 2\theta} \end{aligned} \quad (30)$$

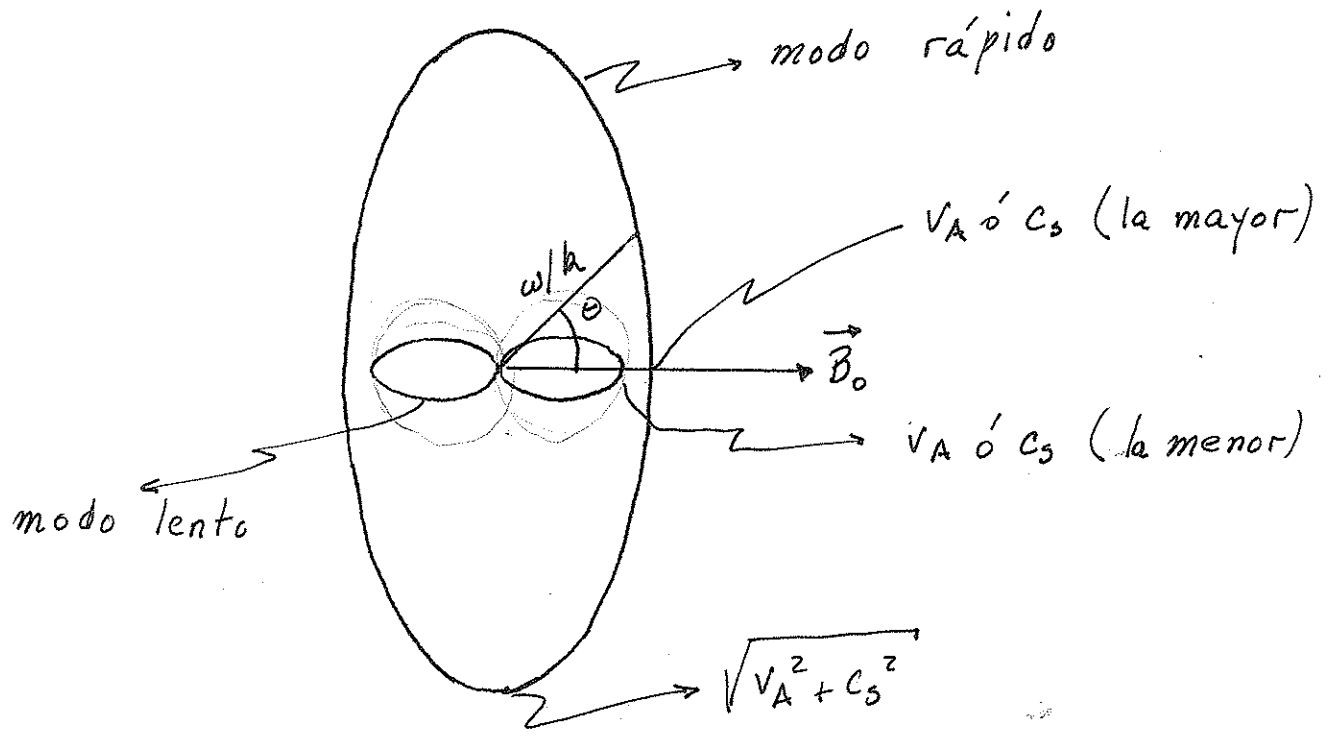
El radicando es positivo para todo θ ; para $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$:

$$\frac{\omega^2}{k^2}(0) = \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(v_A^2 - c_s^2)^2} = \frac{v_A^2 + c_s^2 \pm |v_A^2 - c_s^2|}{2}$$

= $\begin{cases} v_A^2, v_A > c_s \\ c_s^2, v_A < c_s \end{cases}$

$$\frac{\omega^2}{k^2}(\pi/2) = \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} \pm \frac{v_A^2 + c_s^2}{2} = \begin{cases} v_A^2 + c_s^2 \\ 0 \end{cases}$$

Si graficamos la velocidad de fase ω/k :



La velocidad de fase de las ondas de Alfvén está entre la de la magnetoacústica lenta y la de la rápida.

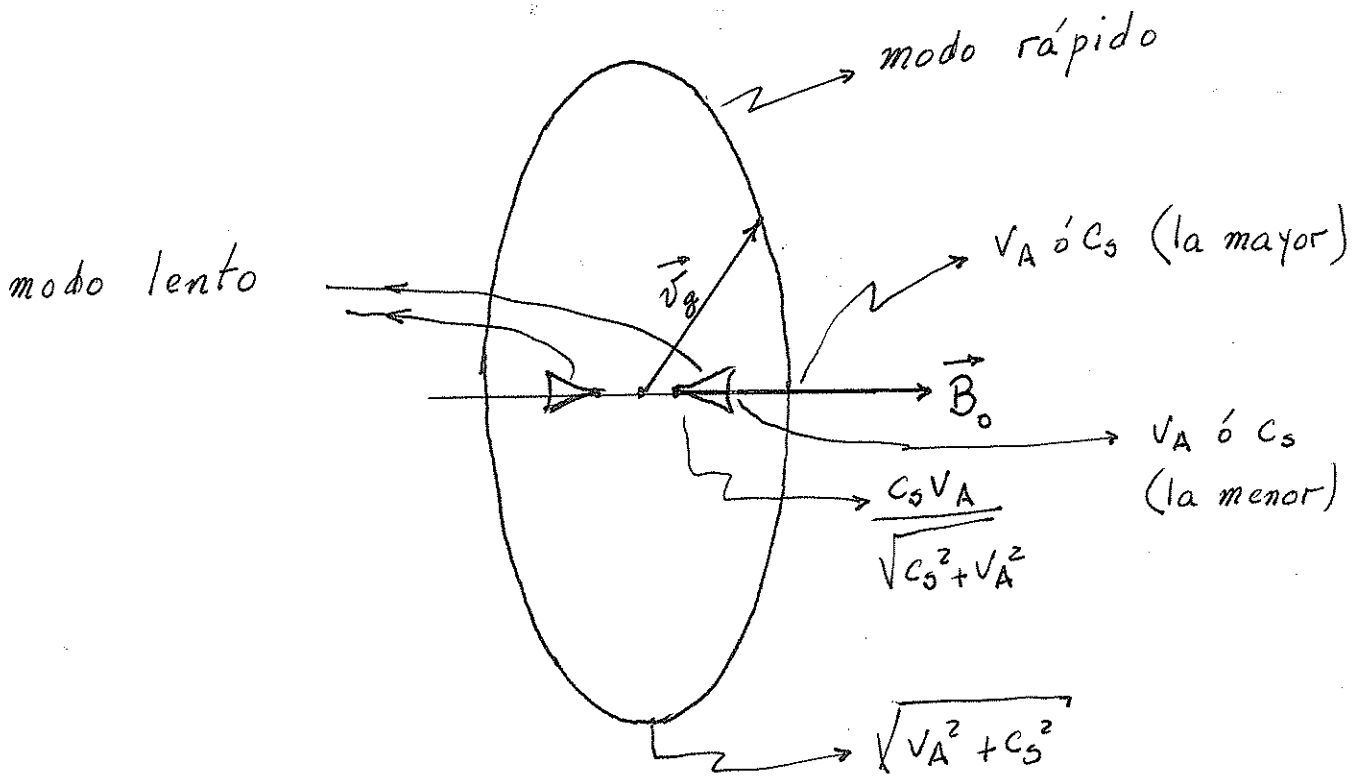
Si $v_A \ll c_s$, ^(o sea $\beta \gg 1$) que corresponde a que la fuerza de Lorentz es de menor importancia que el ∇p , la onda acústica se transforma un poco dando lugar a la magnetoacústica rápida, y se tiene además la magnetoacústica lenta en lugar de la magnética de compresión siendo totalmente distinta de ésta.

Si $v_A \gg c_s$, que corresponde a que el ∇p sea mucho menor que la fuerza de Lorentz, la onda magnética de compresión se modifica un poco

dando lugar a la magnetoacústica rápida y aparece en lugar de la onda sonora una onda totalmente distinta: la magnetoacústica lenta.

Si $v_A \sim c_s$ están la magnetoacústica rápida y la lenta sin que podamos decir que una es la de sonido modificada y la otra la de Alfvén de compresión modificada.

Si calculamos la velocidad de grupo, para lo que en (30) reemplazamos k^2 por $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ y $k^2 \cos^2 \theta$ por k_z^2 y luego derivamos ω respecto a k_x , k_y y k_z , resulta que salvo para $\theta = 0, \pi$ y $\theta = \pm \pi/2$ \vec{v}_g no está ni en la dirección de \vec{k} - como en las ondas sonoras y en las de Alfvén de compresión - ni en la de \vec{B}_0 - como en las de Alfvén de corte - sino en una dirección intermedia. Gráficamente resulta:



Si ρ es el ángulo entre la velocidad de grupo y \vec{B}_0 en el intervalo $0 < \theta < \pi/2$, para el modo rápido $\rho > \theta$ y para el lento $\rho < \theta$.
Vemos que la energía de las ondas magnetoacústicas

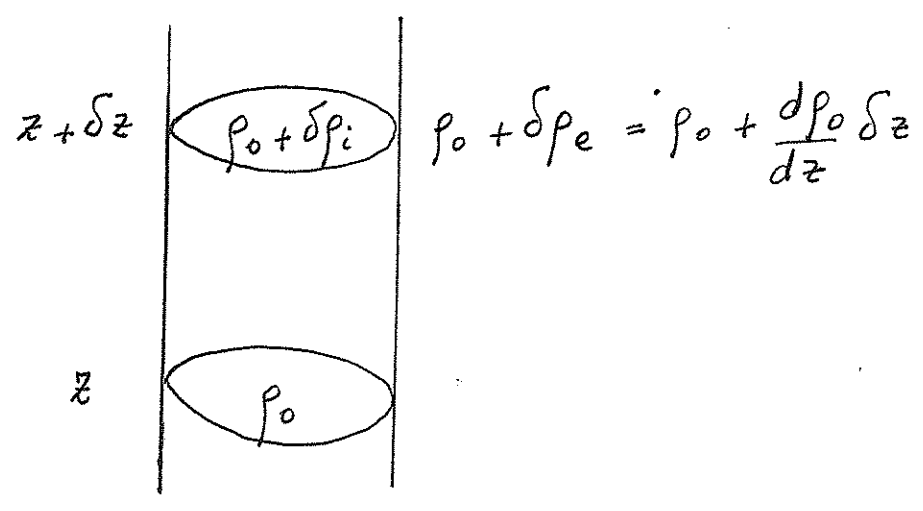
cas rápidas se puede propagar en todas las direcciones pero la de las lentas únicamente en un cono alrededor de \vec{B}_0 .

Ondas de gravedad

Este es un fenómeno que aparece en gases en presencia de un campo gravitatorio, aunque no haya campo magnético; éste hace el fenómeno más complejo. Veremos primero cualitativamente cuál es el origen de las ondas de gravedad; después analizaremos las ecuaciones linealizadas cuando actúan la gravedad y el gradiente de presión que dan lugar a las ondas acústicas - de gravedad con sus límites: baja frecuencia ondas de gravedad, alta frecuencia ondas sonoras. Finalmente veremos someramente que sucede cuando existe además campo magnético.

Cualitativamente el fenómeno se puede ver así: consideremos una burbuja de gas que es sacada de su posición de equilibrio y desplazada un δz , por ejemplo en sentido contrario a \vec{g} ; supongamos además que la burbuja mantiene un equilibrio de presiones con el gas que la rodea y que los cambios son adiabáticos (o sea que el movimiento es suficientemente lento como para que haya un equilibrio de presiones pero suficientemente rápido como para que no haya intercambio de calor). Al ocurrir esto, la burbuja cambiar su densidad en un $\delta \rho$; para equilibrar adiab.

báticamente la presión con el exterior, pero a su vez la rodea un medio de densidad diferente a la del que lo rodeaba inicialmente pues cambio la posición: habrá un δp_e ; si la densidad final de la burbuja es menor que la del medio que la rodea la burbuja seguirá subiendo, mientras que en el caso contrario aparece una fuerza que tiende a restituirla a su posición original y el gas oscila



En la situación de equilibrio $\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g$ por lo que

$$\delta p_e = -\rho_0 g \delta z ;$$

como hemos supuesto equilibrio de presiones

$$\delta p_i = \delta p_e = -\rho_0 g \delta z ;$$

de la condición de adiabaticidad, para la burbuja debe ser

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte}$$

o sea
$$\delta p_i = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \delta \rho_i = c_s^2 \delta \rho_i .$$

La fuerza de flotación (buoyancy) resultante de la diferencia de densidades es

$$g(\delta\rho^e - \delta\rho^i) = g\left(\frac{d\rho_0}{dz} + \frac{\rho_0 g}{c_s^2}\right)\delta z.$$

Cuando esta fuerza es negativa para δz positivo la burbuja oscila con frecuencia $\omega = N$, donde

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\left(\frac{d\rho_0}{dz} + \frac{\rho_0 g}{c_s^2}\right); \quad (31)$$

N se denomina frecuencia de Brünt-Väisälä. Usando la ecuación de estado podemos poner

$$\frac{d\rho_0}{dz} = \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{\rho_0}{T_0} \frac{dT_0}{dz}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_0}{dz} &= \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} - \frac{\rho_0}{T_0} \frac{dT_0}{dz} = -\frac{\rho_0^2 g}{\rho_0} - \frac{\rho_0}{T_0} \frac{dT_0}{dz} \\ &= -\frac{\gamma}{c_s^2} \rho_0 g - \frac{\rho_0}{T_0} \frac{dT_0}{dz}. \end{aligned}$$

Reemplazando en (31), la frecuencia de Brünt-Väisälä expresada en función de la temperatura queda

$$N^2 = \frac{g}{T_0} \left[\frac{dT_0}{dz} + \frac{(\gamma-1)T_0 g}{c_s^2} \right] \quad (32)$$

Es interesante observar que $\left[-\frac{(\gamma-1)T_0 g}{c_s^2} \right]$ es la variación de la temperatura de la burbuja con la altura si se mueve adiabáticamente. Luego $N^2 > 0$ si la temperatura ambiente T_0 aumenta con la altura o si disminuye más lentamente que la variación adiabática. Justamente esto da la condición de estabilidad convectiva, pues si $N^2 < 0$ la burbuja tiende a seguir subiendo.

Para el caso particular en que T_0 no es función de la altura,

$$N^2 = \frac{(\gamma-1)g^2}{c_s^2} \quad (33)$$

Este análisis cualitativo es válido para frecuencias bajas.

Ondas acústicas - de gravedad:

Consideremos ahora un

plasma en que se tienen en cuenta el $\vec{\nabla} p$ y la gravedad; en la situación de equilibrio, como $\vec{\nabla} p_0 = -\rho g \hat{z}$ p_0 no es uniforme sino que varía con la altura; suponiendo T_0 uniforme

$$p_0 \sim e^{-z/\Lambda}$$

con $\Lambda = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{c_s^2}{\gamma g}$; para T_0 uniforme resulta

además

$$\rho_0 \sim e^{-z/\Lambda}$$

Si linealizamos en este caso la ecuación de

conservación de la masa tenemos:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho_0^{(z)} + \rho_1) \vec{v}_1] = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \rho_0^{(z)} + \rho_0^{(z)} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0$$

o sea

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{\gamma g}{c_s^2} \rho_0^{(z)} v_{1z} + \rho_0^{(z)} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \tag{34}$$

En forma similar las ecuaciones de movimiento y de adiabaticidad quedan:

$$\rho_0^{(z)} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_1 - \rho_1 g \hat{z} \tag{35}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = + v_{1z} \rho_0^{(z)} g + c_s^2 \rho_0^{(z)} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 \tag{36}$$

donde se ha usado (34).

Derivando (35) respecto al tiempo y reemplazando (34) y (36) se obtiene una ecuación diferencial para \vec{v}_1 ; proponiendo una solución de la forma

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \tag{37}$$

resulta

$$\omega^2 \vec{v}_1 = c_s^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \vec{k} + i(\gamma - 1)g (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \hat{z} + i g v_{1z} \vec{k} \tag{37}$$

Tomando el producto escalar de esta ecuación con \hat{z} y con \vec{k} queda un sistema de ecuaciones

homogéneas para $(\vec{k} \cdot \vec{v}_1)$ y $v_{1,z}$; anulando el determinante se obtiene la relación:

$$\omega^4 - \omega^2 (c_s^2 k^2 + i \gamma g k_z) + g^2 (\gamma - 1) (k^2 - k_z^2) = 0 \quad (38)$$

Al aparecer el número imaginario i en esta ecuación, podemos concluir que para ω^2 real será k^2 complejo. Definiendo un \vec{k}' tal que

$$\vec{k} = \vec{k}' - i \frac{\gamma g}{2 c_s^2} \hat{z} = k' - i \frac{z}{2 \Lambda} \quad (39)$$

la ecuación (38) se puede poner

$$\omega^4 - \omega^2 \left(c_s^2 k'^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4 c_s^2} \right) + g^2 (\gamma - 1) (k'^2 - k_z'^2) = 0.$$

Finalmente la relación de dispersión resulta

$$\omega^2 (\omega^2 - N_s^2) = (\omega^2 - N^2 \text{sen}^2 \theta'_g) k'^2 c_s^2 \quad (40)$$

donde

$$N_s = \frac{\gamma g}{2 c_s} \quad (41)$$

$$N = \frac{\sqrt{\gamma - 1} g}{c_s} \quad (42)$$

$$\text{sen}^2 \theta'_g = 1 - \frac{k_z'^2}{k'^2} \quad (43)$$

Para gases ideales resulta

$$N_s \gg N$$

Al tener \vec{k} una componente imaginaria (ver (39))

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_1 e^{\frac{\delta \rho}{2c_s^2} z} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

(de la perturbación en velocidad)
la amplitud v_1 (de las ondas) aumenta con la altura \Rightarrow siendo el factor de aumento igual a e para una distancia vertical que sea el doble de la escala de alturas Δ para la presión. (La perturbación en densidad y en presión disminuye con la altura)

Analizando la relación de dispersión (40) vemos que hay dos rangos de ω^2 que permiten propagación con k' real:

$$\omega^2 < N^2 \text{ sen}^2 \theta'_g \tag{44}$$

$$\omega^2 > N_s^2 ;$$

en el primer caso ambos miembros de (40) son negativos y en el segundo ambos son positivos.

Para $\omega > N_s$ las ondas son esencialmente acústicas, y si $\omega \gg N_s$ la relación de dispersión se reduce a

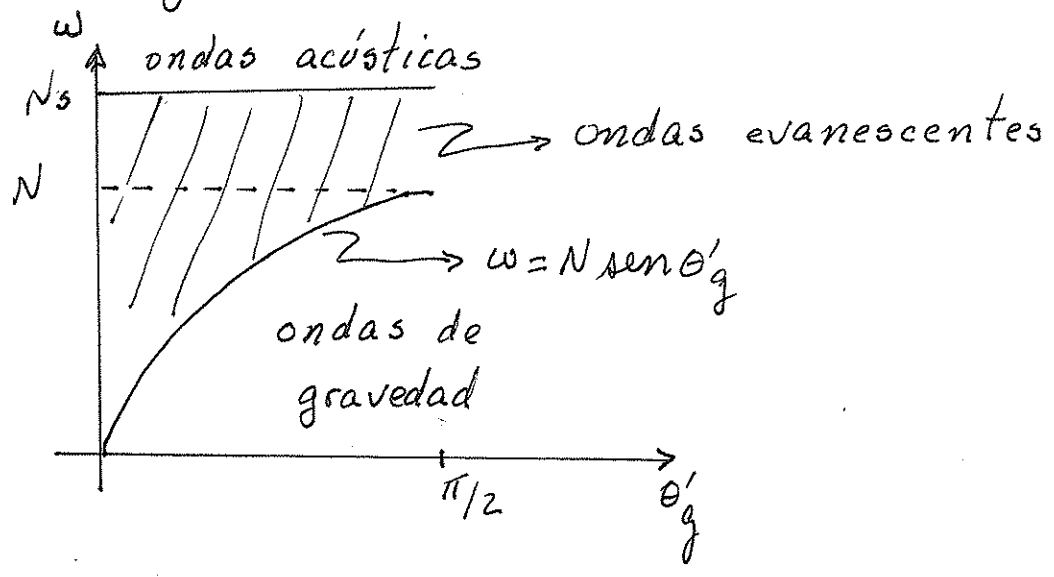
$$\omega = k' c_s \tag{45}$$

dando c_s como velocidad de fase.

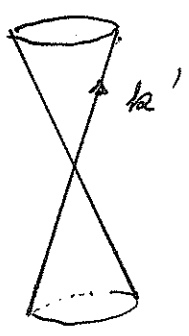
Para $\omega < N \sin \theta'_g$ las ondas son esencialmente ondas internas de gravedad, y si además $\omega \ll k'c_s$, o sea $v_g = \frac{\omega}{k'} \ll c_s$ se tiene

$$\omega \approx N \sin \theta'_g \tag{46}$$

Para la región $N \sin \theta'_g < \omega < N_s$, k'^2 es negativo y la onda es evanescente



Vemos que las ondas de gravedad no se propagan en dirección vertical. Además para un dado ω independientemente de $|\vec{k}'|$ siempre que $k'c_s \gg \omega$, las ondas de gravedad solo se pueden propagar en alguna dirección en un cono $\sin \theta'_g = \pm \omega/N$

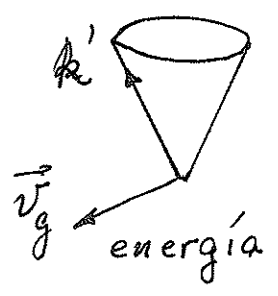


Si calculamos la velocidad de grupo en este límite, teniendo en cuenta que ω depende solo de θ'_g y no de $|\vec{k}'|$,

$$\vec{v}_g = \vec{\nabla}_{\vec{k}'} \omega = \frac{\partial \omega}{\partial |\vec{k}'|} \frac{\vec{k}'}{|\vec{k}'|} + \frac{\partial \omega}{\partial \theta'_g} \check{\theta}'_g$$

$$\vec{v}_g = N \cos \theta'_g \check{\theta}'_g \tag{47}$$

\vec{v}_g es perpendicular a \vec{k}'



O sea, ondas cuya fase se propaga con una componente hacia arriba, tienen energía propagándose hacia abajo, y viceversa.

Ondas magnetoacústicas - de gravedad

Al introducir un campo magnético el problema se complica pues aparece la fuerza de Lorentz como fuerza restauradora además del $\vec{\nabla}_p$ y de la gravedad, y habrá otra dirección preferencial además de la vertical.

Si consideramos ondas tales que $k \Omega \gg 1$ (o sea que la escala de altura en que varían ρ_0 y p_0 es mucho mayor que la longitud de onda), condición que implica

$$N_0 \ll k c_0$$

las ondas de Alfvén no se modifican con la

presencia de la gravedad y aparecen dos ondas magnetoacústicas - de gravedad (o magneto-atmosféricas); la relación de dispersión queda

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (c_s^2 + v_A^2) + k^2 c_s^2 N^2 \sin^2 \theta_g + k^4 c_s^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B = 0 \tag{48}$$

Cuando $c_s \lesssim v_A$, debido a la restricción $k c_s \gg N_g$, no hay acoplamiento con la gravedad; mientras que para $c_s \gg v_A$ resulta para los dos modos magnetoacústicos - de gravedad

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 \tag{49}$$

y

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta_g + k^2 v_A^2 \cos^2 \theta_B \tag{50}$$

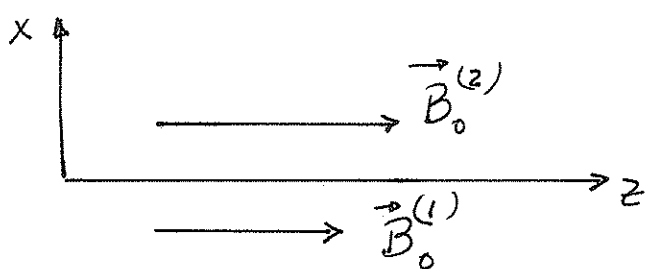
Ondas superficiales

En lo que hemos visto para ondas magneto hidrodinámicas hemos supuesto uniformidad tanto para ρ_0, p_0 como para \vec{B}_0 - o sea consideramos la longitud de onda mucho menor que la longitud característica de variación -, salvo para las ondas acústicas - de gravedad en las que hemos supuesto una dependencia de la forma $e^{-z/\Lambda}$ para ρ_0 y p_0 .

Si el medio está estratificado pueden suceder varios fenómenos:

- 1º) La amplitud de la onda puede aumentar o disminuir a medida que se propaga.
- 2º) Una onda que se propaga en una región puede convertirse en evanescente en otra y decaer exponencialmente.
- 3º) Aparición de ondas superficiales que se propagan en el plano de la interface y decaen al alejarse de la misma.

Veremos sin hacer los cálculos un caso muy simple de discontinuidad: una interface en $x=0$ separando dos medios homogéneos con inducción magnética en la dirección \hat{x} .



Teniendo en cuenta solamente el $\vec{\nabla}p$ y la fuerza de Lorentz, para que haya equilibrio debe cumplirse

$$p_0^{(1)} + \frac{B_0^{(1)2}}{2\mu} = p_0^{(2)} + \frac{B_0^{(2)2}}{2\mu} \quad (51)$$

Proponiendo una perturbación

$$v_{ix} = v_{ix}(x) e^{i(k_z z - \omega t)} \tag{52}$$

se puede ver que la dependencia en x está dada por

$$e^{\pm m_i x} \tag{53}$$

donde

$$m_i^2 = \frac{(k_z^2 c_{s_i}^2 - \omega^2)(k_z^2 v_{A_i}^2 - \omega^2)}{(c_{s_i}^2 + v_{A_i}^2)(k_z^2 c_{T_i}^2 - \omega^2)}, \quad i=1, 2 \tag{54}$$

y

$$c_T = \frac{c_s v_A}{\sqrt{c_s^2 + v_A^2}} \tag{55}$$

El tipo de soluciones depende de los signos de m_1^2 y m_2^2 . Cuando ambos sean positivos se tendría una solución

$$v_{ix} \propto \begin{cases} e^{m_2 x} & , x < 0 \\ e^{-m_1 x} & , x > 0 \end{cases} \tag{56}$$

que decae al alejarse de la interface en cualquier sentido. La relación de dispersión resulta

$$\frac{\omega^2}{k_z^2} = \frac{\rho_1 m_2 v_{A_1}^2 + \rho_2 m_1 v_{A_2}^2}{\rho_1 m_2 + \rho_2 m_1} \tag{57}$$

Límites de aplicabilidad

Los valores de la frecuencia de las ondas en los que es válida la aproximación MHD, con la forma simple de la ley de Ohm dependerán de los valores de \vec{B} , ρ , T , etc.

Por una parte se debe satisfacer que las variaciones temporales sean mucho menores que las espaciales multiplicadas por c .

$$\frac{\partial}{\partial t} \ll c \frac{\partial}{\partial x}$$

lo que, para una onda plana ^{monocromática}, significa

$$\omega \ll kc$$

En el caso de la onda de Alfvén esto implica

$$kv_A \ll kc$$

$$v_A \ll c$$

o'

$$\frac{B_0}{\sqrt{\mu \rho_0}} \ll c$$

lo que se cumple para valores típicos de v_A en el sol: en la fotosfera $v_A \sim 10 \text{ Km/seg}$ y en la corona $v_A \sim 300 \text{ Km/s}$.

Para la magnetoacústica rápida habría que agregar $c_s \ll c$, pero esta condición normalmente se cumple.

Por otro lado debe ser

$$\omega \ll v_{\text{choque}} \quad , \quad \frac{2\pi}{k} \gg \lambda_{\text{Debye}}$$

y

$$v_{\text{choque}} \gg \Omega = \frac{eB}{mc}$$

→

La primera se debe a que si las frecuencias son muy altas aparecen otro tipo de ondas como las oscilaciones de plasma en que hay separación de cargas y no es válida la aproximación MHD; esta es en general válida para frecuencias bajas. Además la longitud de onda debe ser mucho mayor que λ_{Debye} (para poder considerar el plasma como un fluido).

La segunda condición es necesaria para poder aplicar una ley de Ohm simple; para ciertos valores de \vec{B} y de dilución del gas puede haber frecuencias para las que

$$\omega \ll v_{\text{choque}} < \Omega$$

en cuyo caso se podría usar la aproximación MHD pero con el término de Hall en la ley de Ohm.

Referencias:

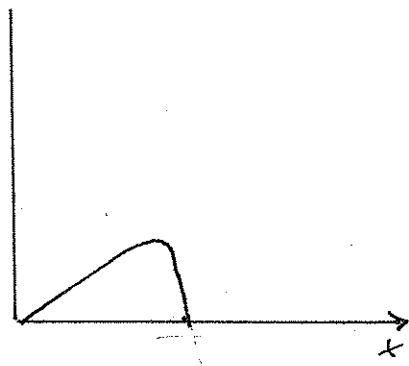
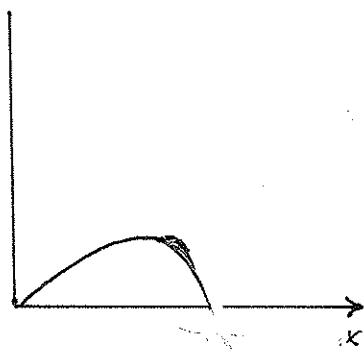
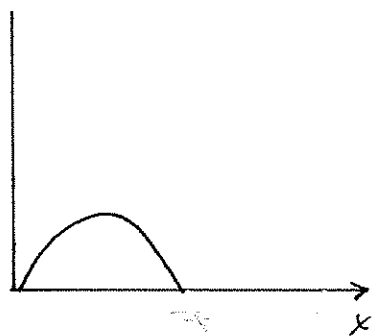
E.R. Priest - Solar Magnetohydrodynamics - Cap 4

J.D. Jackson - Classical Electrodynamics - Sec. 10.7

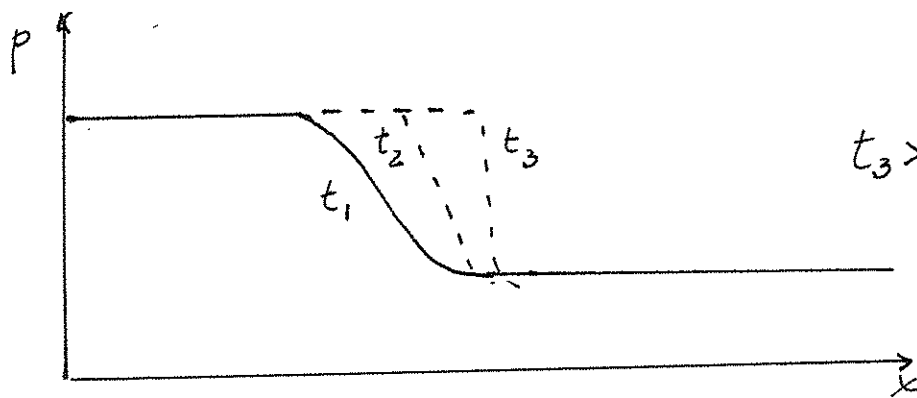
Ondas de choque

Cuando la amplitud de una onda es pequeña, ya sea una onda sonora en un fluido sin campo magnético, u ondas magnetoacústicas en un fluido conductor magnetizado, de modo de poder usar las ecuaciones linealizadas, un paquete ^{de ondas plano} ~~viaja~~ ^{con igual dirección} sin modificar su forma; el perfil no cambia dado que cada parte de la onda se mueve con la misma velocidad.

Cuando las perturbaciones son mayores se vuelven importantes los términos no lineales de las ecuaciones; el resultado es que las perturbaciones de mayor amplitud viajan más rápidamente que las de menor amplitud modificándose el perfil de la onda a medida que se propaga; la cresta de la onda se mueve más rápidamente que sus flancos ascendente y descendente, con lo que este último va empeinándose más y más a medida que la onda avanza.



Por ejemplo para la onda de compresión generada en un tubo por un pistón

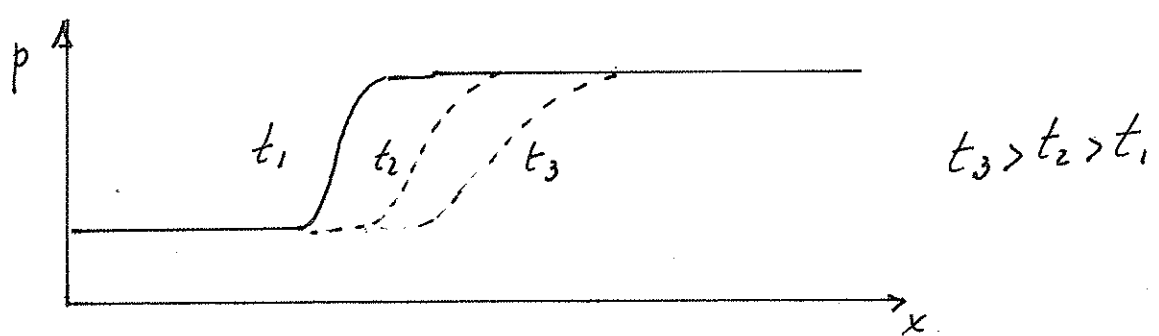


habiendo un comportamiento similar para la velocidad, densidad y temperatura de perturbación. Los gradientes de estas cantidades se vuelven tan grandes que ya no se pueden despreciar efectos disipativos tales como la viscosidad, o el término disipativo en la ecuación de inducción en el caso magnético. Se llega a un estado estacionario en el que hay un balance entre el efecto de no-linealidad y la disipación y la pendiente del perfil deja de crecer. La capa de transición en la que tiene lugar este balance es muy angosta (del orden de algunos caminos libre medios); para muchos de los cálculos se puede aproximar por una superficie de discontinuidad. Esta "superficie" constituye ~~constituye~~ la onda de choque, y las densidades, presiones, velocidades y campos magnéticos son diferentes a ambos lados de la superficie. La velocidad con que se mueve a través del fluido es mayor que la velocidad de la onda linealizada correspondiente. Al existir un gradiente de temperatura muy grande no se puede despreciar tampoco la conducción térmica.

La disipación dentro del frente de onda produce una

conversión gradual de la energía llevada por la onda en calor, y el efecto del pasaje de la onda de choque es calentar y comprimir el gas, además de modificar el campo magnético en el caso de ondas magnetoacústicas.

Observemos que si en el ejemplo del tubo, el pistón generara una onda de expansión, esta no se transformaría en una onda de choque



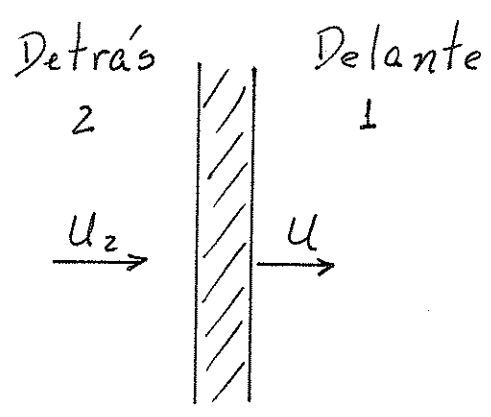
Consideraremos una geometría plana y modelaremos la onda de choque como una discontinuidad plana entre dos estados uniformes.

Ondas de choque en ausencia de campos magnéticos

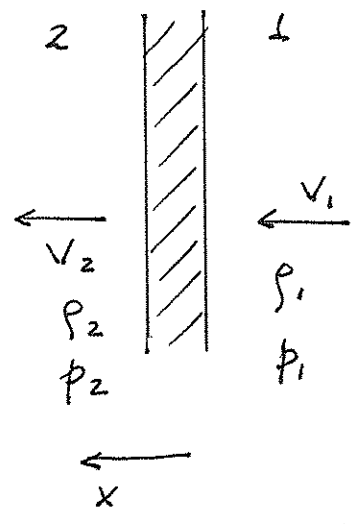
Consideremos una onda de choque plana propagándose en un fluido en ausencia de campos electromagnéticos, en estado estacionario.

Llamemos $\underline{1}$ al gas sin perturbar (por delante de la onda de choque) y $\underline{2}$ al medio perturbado (por detrás de la onda de choque); ambos se suponen uniformes. En un sistema de referencia en reposo con el medio $\underline{1}$, el frente de la onda tiene velocidad U y el gas pertu-

bado U_2 . Es conveniente usar un sistema de referencia que se mueve solidariamente con la onda de choque; en este sistema el fluido entra en el frente con velocidad $v_1 = U$ y sale con velocidad $v_2 = U - U_2 \leq v_1$.



Sistema en reposo con el medio 1



Sistema en reposo con la onda de choque.

La velocidad, presión y densidad después del pasaje de la onda, v_2, p_2, ρ_2 , pueden ser determinadas en función de v_1, p_1, ρ_1 , mediante las ecuaciones de conservación de la masa, de la energía y de movimiento. Pongamos las coordenadas de modo que el eje x sea normal al frente de la onda de choque que está en $x=0$; $x < 0$ medio 1, $x > 0$ medio 2. Como hemos supuesto simetría plana y estacionariedad todas las magnitudes dependerán únicamente de x .

Por la ecuación de conservación de la masa se debe cumplir

$$\frac{d(\rho v)}{dx} = 0 \quad (1)$$

Integrando esta ecuación entre $x = -\frac{\delta}{2}$ y $x = \frac{\delta}{2}$

obtenemos

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad ; \quad (2)$$

ρv es el flujo de masa que pasa a través de la onda de choque.

De la ecuación de movimientos tendremos la conservación de impulso

$$\rho v \frac{dv}{dx} = - \frac{dp}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\lambda_0 \frac{dv}{dx} \right) ;$$

el último término es debido a la viscosidad, y actuará solo en la zona de transición, tanto en el medio 1 como en el 2, al ser uniformes $dv/dx = 0$. Usando la ecuación (1) e integrando a través de la onda de choque

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 \quad . \quad (3)$$

$(\rho v)v$ es la cantidad de impulso transportada por unidad de área transversal al movimiento, por unidad de tiempo, mientras que p es la fuerza que actúa sobre esa área.

La ecuación de conservación de la energía se podía poner como que la variación de la entropía por unidad de masa, multiplicada por ρT , era la función pérdida de energía, que da la energía perdida por unidad de volumen y de tiempo en procesos disipativos, radiativos o de conducción térmica

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -L \quad (4)$$

Para el caso tratado, teniendo en cuenta la relación entre entropía y energía interna, queda

$$\rho T v \frac{ds}{dx} = \rho v \left[\frac{de}{dx} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right) + \frac{4}{3} \lambda_v \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (5)$$

donde se han considerado pérdidas por conducción y disipación por viscosidad (e : energía interna por unidad de masa, κ : coeficiente de conductividad térmica)

Usando las ecuaciones de continuidad y de movimiento esta ecuación se puede llevar a

$$\frac{d}{dx} \left[\rho v \left(e + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \kappa \frac{dT}{dx} - \frac{4}{3} \lambda_v v \frac{dv}{dx} \right] = 0 \quad (6)$$

Teniendo en cuenta que fuera de la zona de transición $\frac{dT}{dx} = 0$ y $\frac{dv}{dx} = 0$, integrando desde $x = -\delta/2$ a $x = \delta/2$, resulta

$$\rho_1 v_1 \left(\frac{1}{2} v_1^2 + e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \rho_2 v_2 \left(\frac{1}{2} v_2^2 + e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) \quad (7)$$

o sea

$$\left(\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 e_1 \right) v_1 + p_1 v_1 = \left(\frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + \rho_2 e_2 \right) v_2 + p_2 v_2 \quad (8)$$

$\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) v$ es la cantidad de energía cinética e interna transportada por unidad de área y unidad de tiempo y $p v$ es el trabajo por unidad de tiempo ^{por área} realizado por la presión del gas. Teniendo en cuenta que $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$,

la ecuación (7) se puede poner

$$\frac{1}{2} v_1^2 + p_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \quad (9)$$

Para un gas ideal

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} ; \quad (10)$$

reemplazando en (9)

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma p_1}{(\gamma-1) \rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma p_2}{(\gamma-1) \rho_2} \quad (11)$$

Las ecuaciones (2), (3) y (11) se llaman relaciones de Rankine-Hugoniot y permiten obtener el estado del gas en uno de los lados del frente de choque en términos del estado del gas en el otro lado:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}$$

De la 1ª resulta

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} ; \quad (12)$$

de las dos últimas podemos obtener dos ecuaciones para (ρ_1/ρ_2) y (p_1/p_2) . Dividiendo la 2ª por $\rho_1 v_1^2$ y la 3ª por v_1^2 y usando (12) se tiene

$$\frac{p_1}{p_2} = 1 + \frac{p_1}{\rho_1 v_1^2} \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) = 1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_1^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 + \frac{1}{(\gamma-1)} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{1}{M_1^2} \quad (14)$$

donde M_1 es el número de Mach en el medio 1:

$$M_1 = \frac{v_1}{c_{s1}} = \frac{v_1}{\sqrt{\gamma p_1/\rho_1}} \quad (15)$$

Despejando (ρ_2/ρ_1) de (13) y reemplazándola en (14) se obtiene una ecuación cuadrática para (ρ_1/ρ_2) :

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 (\gamma+1) M_1^2 - 2 \frac{\rho_1}{\rho_2} (M_1^2 \gamma + 1) + (\gamma-1) M_1^2 + 2 = 0. \quad (16)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones. Una de ellas es $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1$ de donde resulta $\frac{v_2}{v_1} = 1$ y $\frac{p_2}{p_1} = 1$ y por lo tanto no hay onda de choque. De la otra se tiene

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{(\gamma-1) M_1^2 + 2} \quad (17)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \quad (18)$$

Además, de acuerdo al segundo principio de la termodinámica la entropía debe aumentar

$$s_2 \geq s_1. \quad (19)$$

Teniendo en cuenta que de la misma dirección del sistema de coordenadas $v_2 \leq v_1$, de las ecuaciones 17-19 podemos concluir:

- $p_2 > p_1$: la onda de choque comprime el gas.
- $(\gamma + 1)M_1^2 > (\gamma - 1)M_1^2 + 2$, por lo que $M_1 > 1$; el fluido entra en la onda de choque con velocidad supersónica. Volviendo al sistema de referencia en el que el fluido en el medio 1 está en reposo, la velocidad de la onda de choque es supersónica.
- En forma similar se puede mostrar que $M_2 < 1$, o sea que el fluido sale de la onda de choque con velocidad subsónica (en el sist. de ref. en que el frente está quieto).
- Al ser $M_1 > 1$ resulta $2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1) > \gamma + 1$ y de (18), $p_2 > p_1$; la presión del gas aumenta al pasar la onda.

• Para un gas ideal

$$s = C_v \ln \left(\frac{p}{p_0^\gamma} \right) + cte$$

por lo que, de (19), $\frac{p_2}{p_2^\gamma} > \frac{p_1}{p_1^\gamma}$; reemplazando la ecuación de estado se obtiene:

$$\frac{T_2}{p_2^{\gamma-1}} > \frac{T_1}{p_1^{\gamma-1}}$$

o sea

$$\frac{T_2}{T_1} > \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\gamma-1} > 1;$$

la temperatura también aumenta al pasar la onda de choque.

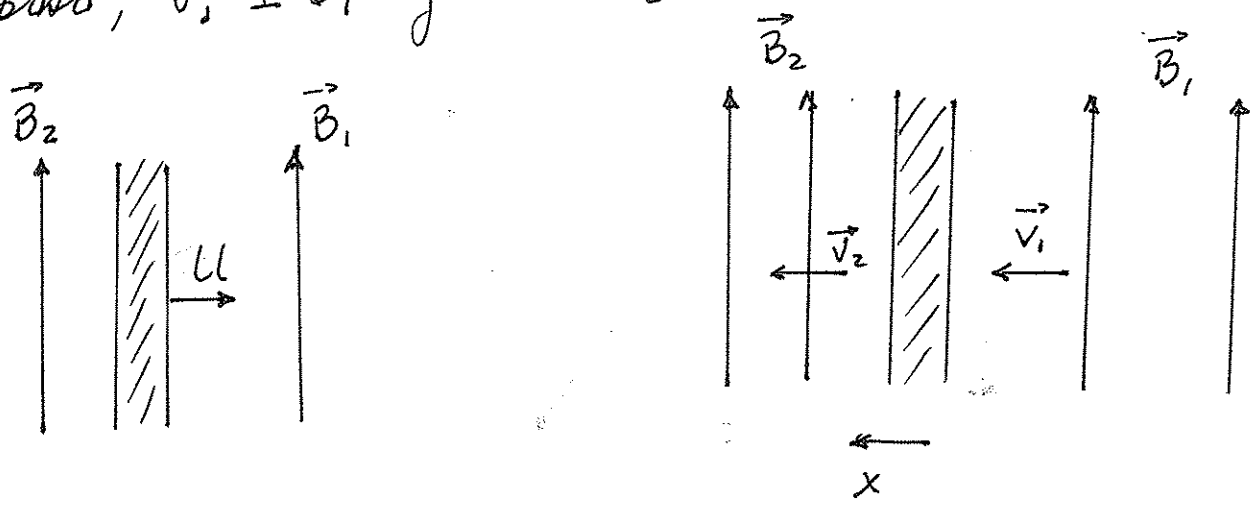
• A medida que M_1 crece de 1 a infinito, $\frac{p_2}{p_1}$ crece sin límites pero $\frac{p_2}{p_1}$ está acotado:

$$1 < \frac{p_2}{p_1} < \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

Ondas de choque magnéticas

Ondas de choque transversales: se llaman así

cuando el campo de inducción magnético, en ambos medios, es paralelo al frente de la onda de choque. En un sistema de referencia en que el frente esté en reposo, $\vec{v}_1 \perp \vec{B}_1$ y $\vec{v}_2 \perp \vec{B}_2$



Podemos relacionar p_2, ρ_2, v_2 y B_2 con p_1, ρ_1, v_1 y B_1 con las ecuaciones de conservación de la masa, movimiento y energía como antes, agregándole la ecuación de inducción. Introduzcamos la notación

$$[f] = f_2 - f_1$$

De las tres primeras ecuaciones mencionadas, en forma similar a lo que sucede con ondas de choque sonoras, tendremos:

$$[\rho v] = 0 \tag{20}$$

$$\left[\rho v^2 + p + \frac{B^2}{2\mu} \right] = 0 \tag{21}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \frac{B^2}{2\mu} \right) v + \left(p + \frac{B^2}{2\mu} \right) v \right] = 0 \tag{22}$$

donde se han agregado la presión magnética $\frac{B^2}{2\mu}$ y la densidad de energía magnética $B^2/2\mu$. \Rightarrow
La ecuación de inducción para estados estacionarios

es:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \right) = 0;$$

para la simetría actual:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} - v B \right) = 0.$$

Integrando entre $x = -\delta/2$ y $x = \delta/2$ resulta

$$[v B] = 0 \tag{23}$$

ya que tanto en el medio 1 como en el 2, B es uniforme.

Para resolver el sistema de ecuaciones (20)-(23), llame

mos

$$\xi = \rho_2 / \rho_1 \tag{24}$$

y usemos las etes

$$M_1 = \frac{v_1}{C_{s1}}$$

$$\beta_1 = \frac{2\mu \rho_1}{B_1^2} = \frac{2 C_{s1}^2}{\delta v_{A1}^2}$$

De (20) y (23) se tiene:

Otra manera: $\left(\frac{B_1^2 v_z}{\mu} - \frac{B_1 v_1}{\mu} \right)$ es el flujo neto del vector de Poynting los dos lados del frente

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} ; \vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$
$$\vec{S} = -(\vec{v} \wedge \vec{B}) \wedge \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{v} \frac{B^2}{\mu} - \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{B})}_{=0} \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{\xi} \quad (25) \quad ; \quad \frac{B_2}{B_1} = \xi \quad (26)$$

Como $v_2 < v_1$, resulta $\xi > 1$ y $B_2 > B_1$.
 Dividiendo (21) por ρ_1 y usando M_1 y ρ_1 obtenemos el cociente p_2/p_1 en función de ξ :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{1}{\rho_1} (1 - \xi^2) + \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{1}{\xi}\right). \quad (27)$$

Otra relación de (p_2/p_1) con ξ se puede obtener de (22) dividiendo por $\rho_1 v_1$ y usando que $e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{p_1} \frac{1}{\xi} - 1 \right) = \frac{2(1 - \xi)}{\rho_1} + \frac{\gamma M_1^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right). \quad (28)$$

Reemplazando (27) en (28) obtenemos la ecuación que debe satisfacer ξ .

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) + \frac{1}{\rho_1} \frac{(1 - \xi^2)}{\xi} \frac{\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\gamma^2 M_1^2}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{1}{\xi} &= \\ &= \frac{2(1 - \xi)}{\rho_1} + \frac{\gamma M_1^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

Una de las soluciones de esta ecuación cúbica es $\xi = 1$ en cuyo caso no hay onda de choque; las otras dos deben satisfacer la ecuación

$$2(2 - \gamma) \xi^2 + [2\rho_1 + 2 + \rho_1 M_1^2 (\gamma - 1)] \gamma \xi - \rho_1 \gamma (\gamma + 1) M_1^2 = 0 \quad (30)$$

El discriminante de esta ecuación es positivo:

$$[2\beta_1 + 2 + \beta_1 M_1^2 (\gamma - 1)]^2 \gamma^2 + 8(2 - \gamma)\beta_1 \gamma (\gamma + 1) M_1^2 > 0 \tag{31}$$

pues γ toma valores entre 1 y 2; por lo tanto las soluciones son reales. Una de ellas es negativa, y se descarta pues no tiene sentido físico.

Para $\beta_1 \gg 1$, o sea si la presión magnética es mucha menor que la del plasma, la ecuación (30) se reduce a:

$$[2 + M_1^2 (\gamma - 1)] \xi = (\gamma + 1) M_1^2$$

con lo que la solución tiende a la hidrodinámica (ec. 17), que llamaremos ξ_0

$$\xi_0 = \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{(\gamma - 1) M_1^2 + 2} \tag{32}$$

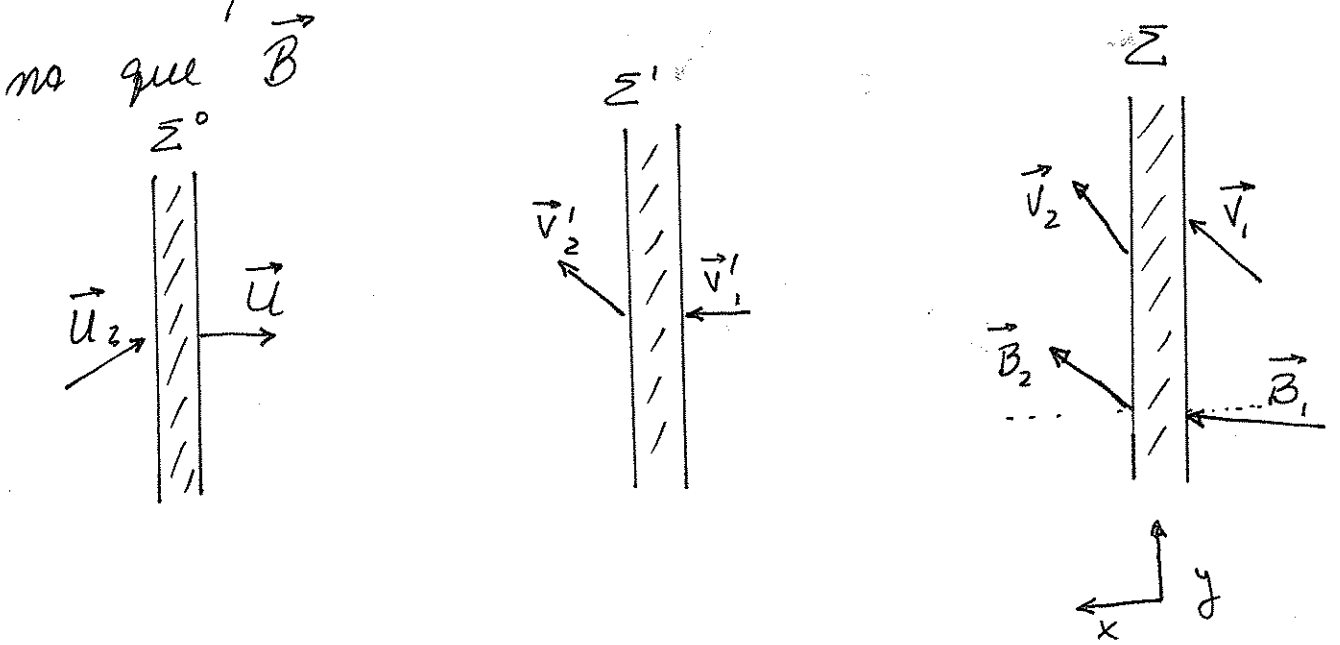
Reemplazando esta expresión, la ec. (30) la podemos poner también en la forma:

$$[M_1^2 (\gamma - 1) + 2] \gamma (\xi - \xi_0) = -\frac{2}{\beta_1} \xi [(2 - \gamma) \xi + \gamma]; \tag{33}$$

que nos permite analizar el efecto del campo magnético; si $\beta_1 \rightarrow \infty$ tenemos la solución hidrodinámica; para $B \neq 0$ de modo que β_1 sea finita el segundo miembro es negativo, ya que $\gamma < 2$; la acción del campo magnético es reducir el valor de $\xi = p_2/p_1$, respecto del valor hidrodinámico, para un mismo valor de M_1^2 .

Ondas de choque oblicuas

Cuando el campo de inducción magnética en el medio sin perturbar tiene componentes tanto en la dirección paralela como normal al frente, aparece una nueva situación; el plasma adquiere velocidad, no solo en la dirección de la onda de choque, sino también en una dirección tangente al frente, en el plano de \vec{B} ; esto se debe a que la fuerza $\vec{J} \times \vec{B}$ tiene componente en esta dirección. Por ello ya no es posible elegir un sistema de referencia en que tanto el medio \perp como el \parallel se muevan perpendiculares al frente. Es conveniente entonces considerar un sistema Σ en el que el frente esté en reposo y en el que \vec{v}_1 y \vec{v}_2 tienen componentes en dos direcciones en el mismo plano



Además de las ecuaciones de conservación de masa, movimiento, energía e inducción, en este caso debemos considerar también la ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, que para el caso de ondas transversales se satisface automáticamente a la vez de prop. del \vec{E} .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{dB_x}{dx} = 0$$

Luego

$$[B_x] = 0$$

(34)

De la conservación de la masa,

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{d}{dx} (\rho v_x) = 0,$$

resulta

$$[\rho v_x] = 0$$

(35)

De la ecuación de movimiento

$$\rho v_x \frac{d\vec{v}}{dx} = -\frac{d\rho}{dx} \vec{i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) \vec{i} + \frac{B_x}{\mu} \frac{d\vec{B}}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\lambda_v \frac{d\vec{v}}{dx} \right)$$

resultan dos ecuaciones, una para la componente x y otra para la y . (usando que $\frac{d}{dx} (\rho v_x) = 0$, $\frac{dB_x}{dx} = 0$)

$$\left[\rho v_x^2 + \rho + \frac{B^2}{2\mu} - \frac{B_x^2}{\mu} \right] = 0 \quad (36)$$

$$\left[\rho v_x v_y - \frac{B_x B_y}{\mu} \right] = 0 \quad (37)$$

En la primera la diferencia con las ondas de choque transversales es la aparición del término B_x^2/μ debido a la tensión magnética en la dirección x . La segunda era anteriormente nula y la única parte de la fuerza de Lorentz que actúa es debido a la tensión magnética.

De la ecuación de conservación de energía, utilizando las ecuaciones anteriores, resulta:

$$\left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e + \frac{B^2}{2\mu} \right) v_x + \left(p + \frac{B^2}{2\mu} \right) v_x - (\vec{B} \cdot \vec{v}) \frac{B_x}{\mu} \right] = 0, \quad (38)$$

donde el término nuevo $(\vec{B} \cdot \vec{v}) \frac{B_x}{\mu}$ es el trabajo realizado por unidad de tiempo por la tensión magnética.

De la ecuación de inducción resulta

$$[v_x B_y - v_y B_x] = 0 \quad (39)$$

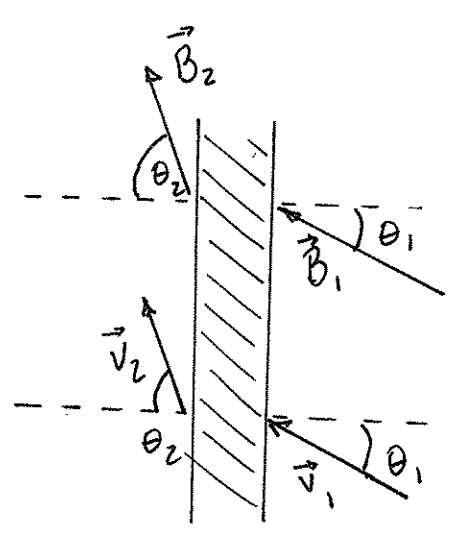
Como hemos trabajado en un sistema de referencia en que tanto \vec{v}_1, \vec{B}_1 como \vec{v}_2, \vec{B}_2 tienen componentes x e y , podemos elegir ahora un sistema especial en el que las ecuaciones se simplifican; en este sistema en el medio \perp la velocidad y el campo de inducción son paralelas, con lo que

$$v_{1x} B_{1y} - v_{1y} B_{1x} = 0 \quad (40)$$

Reemplazando en (39) resulta:

$$v_{2x} B_{2y} - v_{2y} B_{2x} = 0, \quad (41)$$

por lo que ^{también} en el medio z \vec{v} es paralelo a \vec{B} .



Ec de energía

$$\rho v_x \left[\frac{de}{dx} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left(\rho \frac{dT}{dx} \right) + \frac{4}{3} \lambda \left[\frac{dv_x}{dx} \right]^2 + \lambda \left(\frac{dv_y}{dy} \right)^2 + \frac{J^2}{\sigma} \quad (1)$$

Ec de mov. multip. escal. por \vec{v}

$$\rho v_x \frac{dv^2}{dx} + v_x \frac{dp}{dx} - \vec{v} \cdot (\vec{J} \wedge \vec{B}) - \frac{4}{3} \lambda \frac{d^2 v_x}{dx^2} v_x - \lambda \frac{d^2 v_y}{dx^2} v_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{J^2}{\sigma} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \frac{1}{\mu \sigma} = \frac{1}{\mu \sigma} \vec{\nabla} \cdot [\vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})] + \frac{1}{\mu \sigma} \vec{B} \cdot [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})] \quad (3)$$

La ec. de induc. multip. por \vec{B}

$$\vec{B} \cdot [\vec{\nabla} \wedge (\vec{J} \wedge \vec{B})] = \vec{B} \cdot \frac{1}{\mu \sigma} [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})] \quad (4)$$

Reempl. en (3)

$$\begin{aligned} \frac{J^2}{\sigma} &= \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\mu \sigma} \vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \right] + \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot [\vec{\nabla} \wedge (\vec{J} \wedge \vec{B})] = \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\mu \sigma} \vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \right] + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\mu} \vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \right] \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\mu \sigma} \vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) - \frac{1}{\mu} \vec{B} \wedge (\vec{J} \wedge \vec{B}) \right] + \frac{1}{\mu} \vec{v} \cdot [\vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})] \quad (5) \end{aligned}$$

Sumando (1) y (2) y reempl. (5) se tiene

$$\begin{aligned} \rho v_x \left[\frac{de}{dx} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dv^2}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right] - \frac{1}{\mu} \vec{v} \cdot [\vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})] - \frac{4}{3} \lambda v_x \frac{d^2 v_x}{dx^2} \\ - \lambda \frac{d^2 v_y}{dx^2} v_y = \frac{d}{dx} \left[\rho \frac{dT}{dx} \right] + \frac{4}{3} \lambda \left(\frac{dv_x}{dx} \right)^2 + \lambda \left(\frac{dv_y}{dy} \right)^2 \\ + \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\mu \sigma} \vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \right]_x + \frac{d}{dx} \frac{1}{\mu} [\vec{B} \wedge (\vec{J} \wedge \vec{B})]_x - \frac{1}{\mu} \vec{v} \cdot [\vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})] = 0 \end{aligned}$$

$$v_x \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + p e + \frac{p}{\rho} \right] - \frac{4}{3} \lambda \frac{d}{dx} \left(v_x \frac{dv_x}{dx} \right) - \eta \frac{d}{dx} \left(v_y \frac{dv_y}{dy} \right)$$

$$- \frac{d}{dx} \left[\alpha \frac{dT}{dx} \right] - \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot (\nabla \wedge \vec{B})) \right]_x + \frac{d}{dx} \left[v_x \left(\frac{B^2}{\mu} \right) - B_x (\vec{v} \cdot \vec{B}) \right] = 0$$

Integrando entre $-\delta/2$ y $\delta/2$ $[] = ()_2 - ()_1$

$$\left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p e + \frac{B^2}{2\mu} \right) v_x + \left(p + \frac{B^2}{2\mu} \right) v_x - (\vec{v} \cdot \vec{B}) B_x \right] = 0$$

En este sistema, como se supone conductor perfecta

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0 \quad (42)$$

y por lo tanto es cero el vector de Poynting:

$$0 = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu} = -(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{B^2}{\mu} \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \frac{\vec{B}}{\mu}; \quad (43)$$

por lo tanto desaparecen de la ecuación de conservación de energía (38) los términos que contienen \vec{B} , quedando la ecuación hidrodinámica

$$\left[\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (44)$$

La transformación a este sistema de referencia no es posible hacerla para ondas de choque transversales en que $\vec{v}_1 \perp \vec{B}_1$; tampoco si B_{1x}/B_{1y} es muy pequeña; es necesario que $(B_{1y}/B_{1x})v_{1x} \ll c$.

Operando en forma similar a los casos anteriores, llamando

$$\xi = \frac{p_2}{p_1} \quad (45)$$

de las ecuaciones (35) y (34) tendremos

$$\frac{v_{2x}}{v_{1x}} = \frac{1}{\xi}, \quad (46)$$

$$\frac{B_{2x}}{B_{1x}} = 1, \quad (47)$$

y de (40) y (41):

$$\frac{v_{1x}}{v_{1y}} = \frac{B_{1x}}{B_{1y}}, \quad (48)$$

$$\frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{B_{2x}}{B_{2y}}; \quad (49)$$

usando estas dos y (46) y (47) se obtiene

$$\frac{B_{2y}}{B_{1y}} = \xi \frac{v_{2y}}{v_{1y}}. \quad (50)$$

Analizamos ahora la ecuación (37); reemplazando (48) y (49) y usando (47) resulta:

$$B_{1y} \left(\rho_1 v_{1x}^2 - \frac{B_{1x}^2}{\mu} \right) = B_{2y} \left(\rho_2 v_{2x}^2 - \frac{B_{1x}^2}{\mu} \right);$$

dividiendo por ρ_1 , usando (35) y (46):

$$B_{1y} (v_{1x}^2 - v_{A1x}^2) = B_{2y} \left(\frac{v_{1x}^2}{\xi} - v_{A1x}^2 \right) \quad (51)$$

(Si no se cumple que $v_{1x} = v_{A1x}$ y $\xi = 1$)

Si $v_{1x} \neq v_{A1x}$ ^{con} $\xi \neq 1$, la ecuación (51) da la relación entre B_{2y} y B_{1y} :

$$\frac{B_{2y}}{B_{1y}} = \frac{(v_{1x}^2 - v_{A1x}^2) \xi}{v_{1x}^2 - \xi v_{A1x}^2} = \frac{(v_1^2 - v_{A1}^2) \xi}{(v_1^2 - \xi v_{A1}^2)} \quad (52)$$

Si $v_{1x} = v_{A1x}$ con $\xi = 1$, ambos miembros de (51) se anulan y no se obtiene de allí la relación B_{2y}/B_{1y}

De la ecuación (44) de conservación de la energía multiplicando por $(\gamma-1) \rho_2 / \gamma \rho_1$ se obtiene:

$$\frac{p_2}{p_1} = \xi \left[1 + \frac{(\gamma-1)v_1^2}{2C_{s1}^2} \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right) \right] \quad (53)$$

Finalmente, de la ecuación (36), usando los resulta-

dos anteriores y después de mucha álgebra se llega a una ecuación cuarta para el cociente de densidades $\xi = \rho_2 / \rho_1$, en el que intervienen v_{1x} , v_{1y} , v_{A1} y c_{s1} :

$$\left\{ (v_1^2 - \xi v_{A1}^2)^2 \left[c_{s1}^2 \xi + \frac{v_{1x}^2}{2} [\xi(\gamma-1) - (\gamma+1)] \right] + \right. \quad (54)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \xi v_{A1}^2 v_{1y}^2 \left[v_1^2 [\gamma + \xi(2-\gamma)] - \xi v_{A1}^2 [(\gamma+1) - \xi(\gamma-1)] \right] \right\} \cdot (1-\xi) = 0.$$

El factor $(1-\xi)$ corresponde a la solución $\xi=1$, del caso en que no hay discontinuidad. Eliminándolo, queda una ecuación cúbica. Cuando $v_{1x} = \pm v_{A1x}$ (o sea $v_1^2 = v_{A1}^2$), $\xi=1$ vuelve a ser solución; esta solución corresponde a una onda de Alfvén, u onda intermedia.

Hay otras dos soluciones, para rangos de v_1 que veremos más adelante, que corresponden a las ondas rápida y lenta. \rightarrow

En el límite para perturbaciones pequeñas, $\xi \rightarrow 1$, la ecuación (54) se puede mostrar que implica para las velocidades, las siguientes soluciones

$$v_1^2 = v_{A1}^2 \quad \Rightarrow$$

$$v_{1x}^2 = \frac{1}{2} \left\{ (c_{s1}^2 + v_{A1}^2) \pm \sqrt{c_{s1}^4 + v_{A1}^4 - 2c_{s1}^2 v_{A1}^2 \cos 2\theta_1} \right\};$$

la primera corresponde a la onda intermedia; las dos últimas al límite para bajas amplitudes de

Para cada rango de v_i hay una sola solución
(suponga que las otras soluciones serán no físicas)
La ec. ⁽⁵⁴⁾ también se puede pensar como una ec. para
 v_i (o v_{ix}) para un γ fijo. Para $\gamma=1$ da las 3
soluc. del caso lineal. (v_x , más rap y lenta).
Me parece que para $\gamma > 1$ hay a lo sumo dos valores
posibles de v_i (que corres. a la onda de ch rap y lenta)

Hay que usar que $v_i = v_{ix} / \cos \theta$, $v_{iy} = v_i \sin \theta$

En el caso lineal, la "onda de choque" se construye con
ondas monocromáticas con \vec{k} en la misma dirección (x) formando
ángulo con \vec{E} (θ) por lo que tienen todas la misma
veloc. de fase.

las ondas rápida y lenta; en el sistema de referencia en que el plasma en el medio \perp está en reposo, el frente viaja entonces con la velocidad de Alfvén (en la dirección de \vec{B}) o con las velocidades de las ondas linealizadas magnetoacústicas rápida o lenta.

Onda intermedia

Esta es una onda de Alfvén; vimos antes que las ondas de Alfvén no se distorsionaban aunque tuvieran amplitud grande. En este caso $\eta=1$, $\rho_2=\rho_1$, $v_{2x}=v_{1x}$, $B_{2x}=B_{1x}$, $v_{1x}=v_{Ax}$. De la ecuación (51) no resulta ninguna condición para B_{2y} pues se anulan ambos miembros. De la ecuación (50)

$$\frac{B_{2y}}{B_{1y}} = \frac{v_{2y}}{v_{1y}}$$

y usando las ecuaciones de movimiento y de energía (ecs. 36 y 44) se puede ver que

$$\rho_2 = \rho_1 \qquad B_{2y}^2 = B_{1y}^2$$

El caso $B_{2y} = B_{1y}$ es el trivial en que no hay discontinuidad. Para la onda intermedia

$$B_{2y} = -B_{1y}$$

$$v_{2y} = -v_{1y}$$

Como $B_{2x} = B_{1x}$, la acción de la onda es rotar el campo de inducción, como ya habíamos visto

De ec (44)

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2}$$

Como $\eta=1$, $\rho_1 = \rho_2$, $v_{1x} = v_{2x}$ queda

$$\frac{1}{2} v_{1y}^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_{2y}^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_1}$$

Despejando:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho_1 (v_{1y}^2 - v_{2y}^2) \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \quad (1)$$

De Ec. 36

$$\rho_1 v_{1x} + p_1 + \frac{B_{1y}^2}{2\mu} = \rho_2 v_{2x} + p_2 + \frac{B_{2y}^2}{2\mu}$$

$$p_2 - p_1 = (B_{1y}^2 - B_{2y}^2) \frac{1}{2\mu} \quad (2)$$

De (1) y (2)

$$\frac{1}{2} \rho_1 (v_{1y}^2 - v_{2y}^2) \frac{(\gamma-1)}{\gamma} = \frac{1}{2\mu} (B_{1y}^2 - B_{2y}^2)$$

$$\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 \left(1 - \frac{v_{2y}^2}{v_{1y}^2}\right) \frac{(\gamma-1)}{\gamma} = \frac{1}{2\mu} \rho_1^2 \left(1 - \frac{B_{2y}^2}{B_{1y}^2}\right)$$

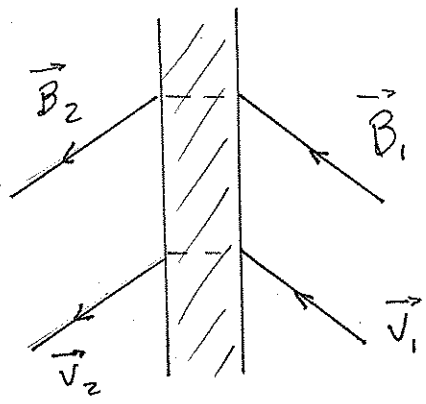
Pero $v_1 = v_{1x} \Rightarrow v_{1y} = \frac{B_{1y}}{\sqrt{\rho_1}}$ y $\frac{v_{2y}}{v_{1y}} = \frac{B_{2y}}{B_{1y}}$

$$\frac{1}{2} \frac{B_{1y}^2}{\rho_1} \left(1 - \frac{B_{2y}^2}{B_{1y}^2}\right) \frac{(\gamma-1)}{\gamma} = \frac{1}{2\mu} B_{1y}^2 \left(1 - \frac{B_{2y}^2}{B_{1y}^2}\right)$$

Como $\frac{\gamma-1}{\gamma} \neq 1$ la única solución es que $\frac{B_{2y}^2}{B_{1y}^2} = 1$

$$\Rightarrow p_2 = p_1$$

que era el efecto de las ondas de Alfvén



Al no haber cambios ni de p ni de ρ no es una onda de choque; al ser la velocidad independiente de la amplitud, no hay "empinamiento" de la onda y por lo tanto no hay competencia entre el "empinamiento" y la disipación, por lo que la zona de transición se va ensanchando. (en el frente va a haber disipación por la variac. brusca de \vec{v} y \vec{B})

Ondas de choque rápidas y lentas

Estas ondas son ondas compresivas pues tienen $\zeta > 1$ y por lo tanto $\rho_2 > \rho_1$, y de (53) se ve que $p_2 > p_1$. Para estas ondas se utiliza una "condición evolutiva" que establece que el signo de B_{2y} es el mismo que el de B_{1y} . Esta condición se puede entender usando (52) y viendo que sucede cuando la perturbación es pequeña. Para las ondas magnetoacústicas rápidas $v_{1x} > v_{A1x}$ y por lo tanto, tanto numerador como denominador en (52) son positivos resultando $(B_{2y}/B_{1y}) > 0$; para las lentas $v_{1x} < v_{A1x}$ y tanto numerador como denominador son negativos, dando nuevamente $(B_{2y}/B_{1y}) > 0$.

Al aumentar la amplitud de la perturbación irán cambiando v_{1x} y ζ pero se mantiene B_{2y}/B_{1y} posi-

hasta 3/10/11

para mostrar que $p_2 > p_1$
 \Rightarrow conviene eliminar v_1 y v_2 de las ecuaciones
 (desde el principio). Ver Boyd y Sanderson
 pág 117-118 = De (6.13b) se ve que $R = p_2/p_1$
 $\approx > 1$ si $r (= q) > 1$.

Allí además muestra que si $r > 1$.

De (52)

$$\frac{B_{21}}{B_{11}} = \frac{(v_{1x}^2 - v_{Ax}^2) [1 + (q-1)]}{[v_{1x}^2 - v_{Ax}^2] [1 + (q-1)]} = \frac{1 + (q-1)}{1 - \frac{v_{Ax}^2}{v_{1x}^2 - v_{Ax}^2} (q-1)} \approx (1 + (q-1)) \left(1 + \frac{v_{Ax}^2 (q-1)}{(v_{1x}^2 - v_{Ax}^2)} \right)$$

$$\approx 1 + \frac{v_{1x}^2}{v_{1x}^2 - v_{Ax}^2} (q-1)$$

$$v_{1x} > v_{Ax} \quad , \quad B_{21} > B_{11}$$

$$v_{1x} < v_{Ax} \quad , \quad B_{21} < B_{11}$$

Para que $\frac{B_{21}}{B_{11}}$ cambie de signo al
 aumentar q , debería anularse el deno-
 minador lo que daría B_{21}/B_{11} infinito
 lo que no es físicam. posible salvo
 que $B_{11} = 0$

tivo. Usando nuevamente (52) se obtienen los siguientes rangos

$$\underline{v_1^2 < v_{A_1}^2}$$
 por lo que $v_1^2 < \xi v_{A_1}^2$ y

$$\frac{B_{2y}}{B_{1y}} = \frac{v_{A_1}^2 \xi - v_1^2 \xi}{v_{A_1}^2 \xi - v_1^2} = 1 - \frac{(\xi - 1) v_1^2}{v_{A_1}^2 \xi - v_1^2} < 1;$$

como $B_{2x} = B_{1x}$, entonces

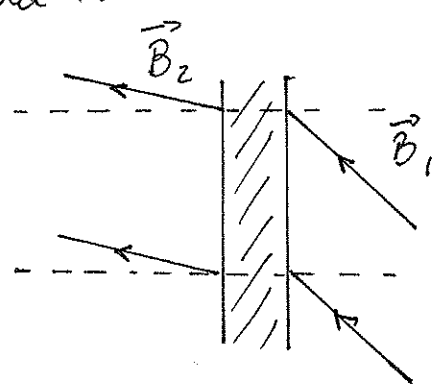
$$|\vec{B}_2| < |\vec{B}_1|.$$

Esta es la onda de choque lenta, su velocidad supera siempre la de la magnetoacústica lenta y es menor que la de Alfvén (en el sistema de referencia en el que el medio \perp está en reposo).

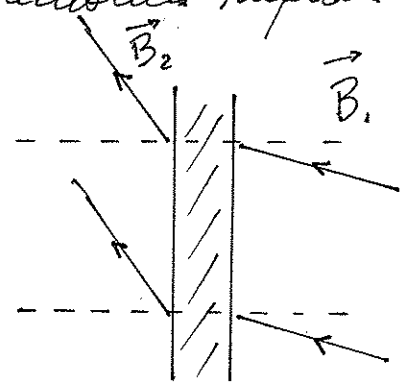
$$\underline{v_1^2 > \xi v_{A_1}^2}$$
 por lo que $v_1^2 > v_{A_1}^2$,

$$B_{2y} > B_{1y} \quad \text{y} \quad B_2 > B_1;$$

se tiene la onda de choque rápida, cuya velocidad en el sistema en el que medio \perp está en reposo supera la velocidad de la magnetoacústica rápida.



Onda lenta

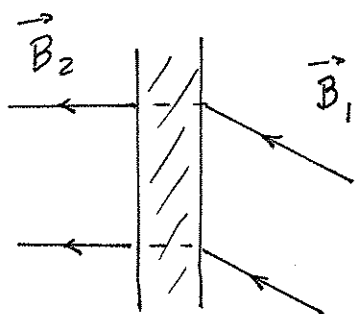


Onda rápida

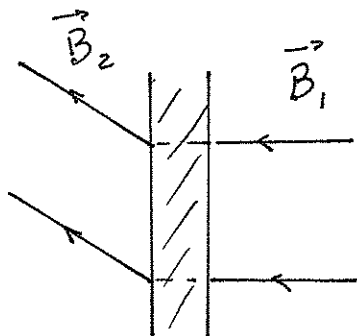
Casos límite de las ondas rápida y lenta son la "switch off" y "switch on" en la que en alguno

de los dos medios $B_y = 0$.

Ondas de choque switch off : $B_{2y} = 0$



Ondas de choque switch on : $B_{1y} = 0$

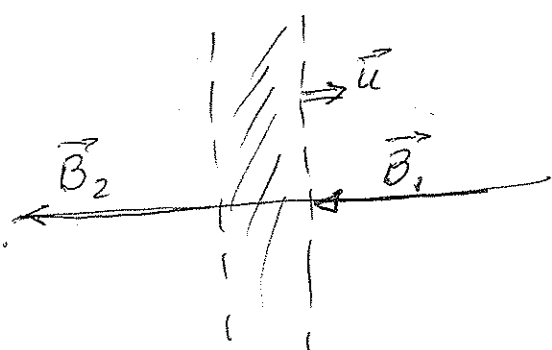


Referencias

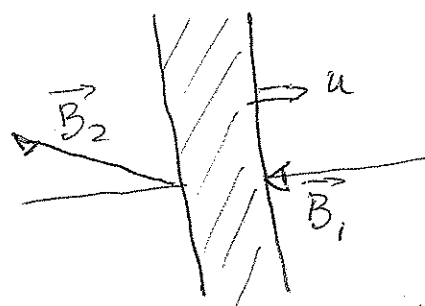
Pruist, E. R., "Solar Magnetohydrodynamics", Cap 5.
 Venero, R., "Ondas de choque planas" - Monografía.
 Cattela, M., "Ondas de choque" - Monografía.

Nota sobre los casos límites de las ondas de choque lenta y rápida

si $v_A > c_s$, con $\vec{u} \parallel \vec{B}$ de fondo la magnetoacústica lenta viaja con c_s y la magnetoacústica rápida con v_A . El límite de la onda de choque si hago $B_{1y} = 0$ será

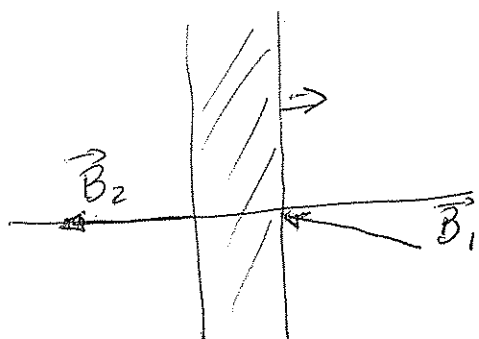


$B_2 = B_1$
 Onda lenta
 (= onda de choque hidrodinámica)
 $c_s < u < v_{A1}$

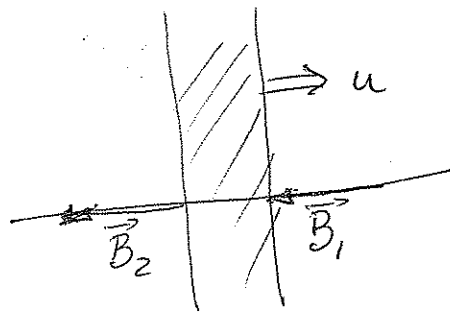


onda rápida
 (onda switch on)
 $u > v_{A1}$

si $v_A < c_s$, la magnetoacústica lenta tiene una velocidad menor que v_A y la rápida entre v_A y c_s . El límite de la onda de choque si hago $B_{2y} = 0$ será



onda lenta
 switch off
 $u = v_{A1}$



Onda rápida
 (= onda de choque hidrodinámica)
 $u > c_s$

(25)

Si $B_{1y} = 0 \xrightarrow{(40)} v_{1y} = 0$

\Rightarrow
De (37)

$\rho_2 v_{2x} v_{2y} = \frac{B_{2x} B_{2y}}{\mu}$; como $B_{2x} = B_{1x}$
 $\rho_2 v_{2x} = \rho_1 v_{1x}$

$\Rightarrow \rho_1 v_{1x} v_{2y} = \frac{B_{1x} B_{2y}}{\mu} \Rightarrow v_{2y} = \frac{B_{1x} B_{2y}}{\rho_1 \mu v_{1x}} \quad (*)$

De (41)

$\frac{\rho_1 v_{1x}}{\rho_2} B_{2y} = v_{2y} B_{2x} = v_{2y} B_{1x}$

Reempl. (*) $\Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} v_{1x} B_{2y} = \frac{B_{1x}^2 B_{2y}}{\rho_1 \mu v_{1x}}$

$B_{2y} = 0$
onda hidrod.

$v_{1x}^2 = \frac{1}{\gamma} v_{1Ax}^2$
onda rápida
"switch on"

$B_{2y} \neq 0$

Si $B_{2y} = 0 \xrightarrow{(41)} v_{2y} = 0$

De (37) : $\rho_1 v_{1x} v_{1y} = \frac{B_{1x} B_{1y}}{\mu} \Rightarrow v_{1y} = \frac{B_{1x} B_{1y}}{\rho_1 \mu v_{1x}}$

De (40) $v_{1x} B_{1y} = v_{1y} B_{1x} \Rightarrow v_{1x} B_{1y} = \frac{B_{1x}^2 B_{1y}}{\rho_1 \mu v_{1x}}$

$B_{1y} = 0$ onda hidrodinámica

$v_{1x}^2 = \frac{B_{1x}^2}{\rho_1 \mu} = v_{1Ax}^2$

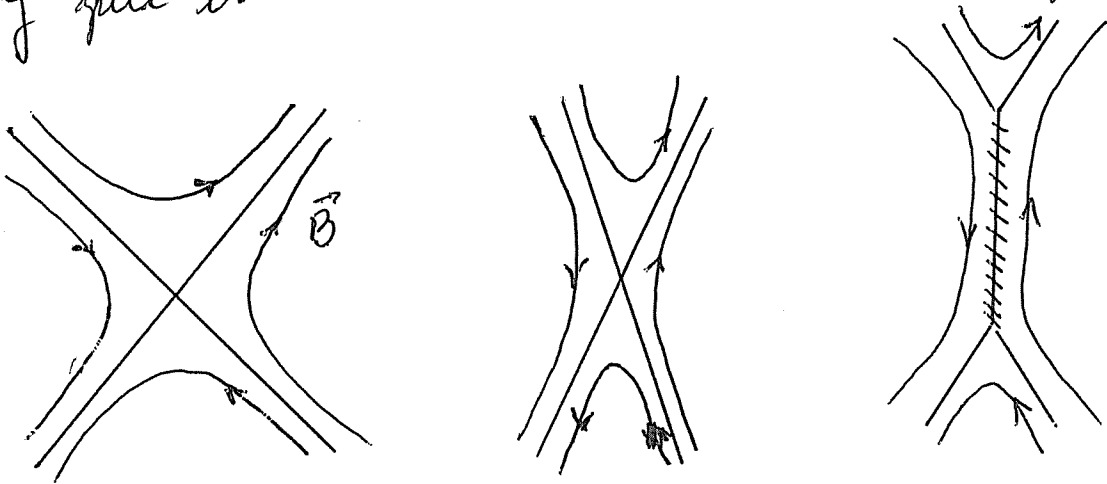
límite de onda lenta ($\gamma > 1$)

$B_{1y} \neq 0$: switch off.

Cap VIII - Calentamientos y reconexión magnética ^{VIII-1}

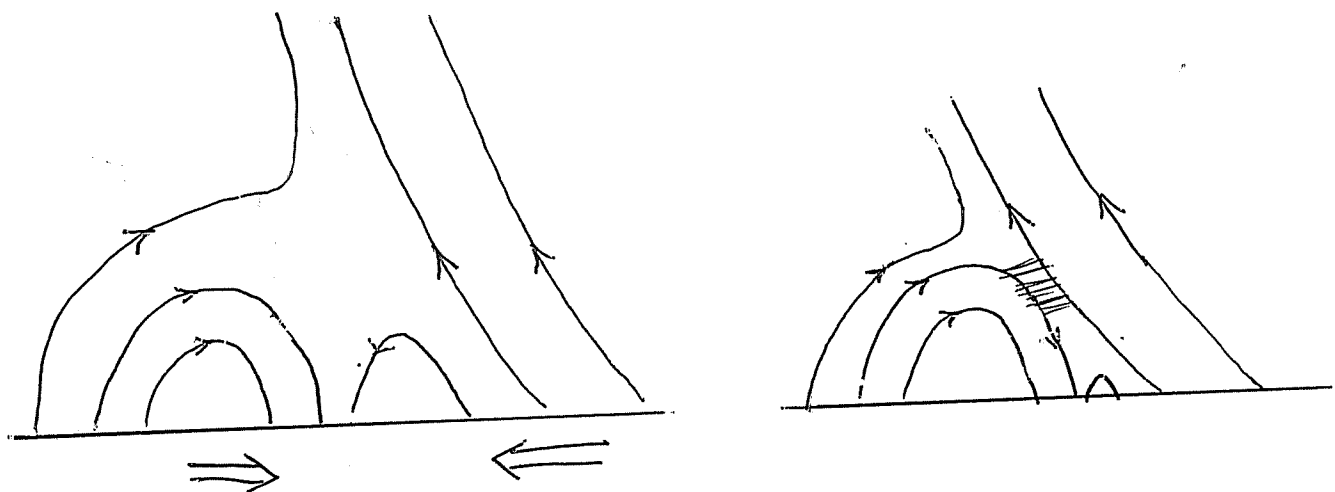
En el sol y en muchas otras estrellas se producen fenómenos como las fulguraciones (flares) en los que se libera una gran cantidad de energía en tiempos breves. La magnitud de la energía involucrada indica que ésta sólo puede ser almacenada en el campo magnético coronal. Pero surge el problema de cómo es liberada y transmitida al plasma en forma de calor y energía iónica. Si se considera para un flare una escala de longitud $L \sim 10^4 \text{ km}$ y una difusividad en la corona $\eta = \frac{L}{5\mu} \sim 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$ se obtiene un tiempo de difusión $\tau_d = \mu L^2 \sim 10^{14} \text{ sec}$, pero en realidad la fase de fulguración dura menos que 10^3 sec . Por lo tanto hay que buscar un mecanismo alternativo a la difusión en un plasma estático con escalas características tan grandes. Es necesaria la generación de regiones donde el campo magnético ^{varie} muy rápidamente en el espacio, de modo que la densidad de corriente eléctrica sea muy alta; estas regiones pueden ser hojas de corriente, vainas o filamentos, según su estructura. Se pueden formar por ines-

tabilidades en un plasma en equilibrio estático, o por un movimiento del plasma que ponga en contacto regiones que sean topológicamente diferentes. Un ejemplo del primer caso es un punto neutro X , que es un equilibrio inestable y que evoluciona de la siguiente forma.



La zona sombreada es una región de alta densidad de corriente, ya que en una pequeña distancia hay una variación muy grande de la componente tangencial de \vec{B} .

La segunda situación mencionada aparece, por ejemplo, si se tienen dos estructuras magnéticas topológicamente distintas y cuyas líneas de campo surgen de la fotosfera (los "footpoints" están anclados en la fotosfera). Movimientos que se produzcan en ésta, pueden inducir movimientos de acercamiento de las dos estructuras formando una hoja de corriente en la región de contacto.



En las hojas de corriente, al ser la densidad de corriente muy grande, no se puede despreciar el término difusivo en la ecuación de inducción, y por lo tanto no se tendrá congelamiento de las líneas en el plasma; el plasma se puede mover perpendicularmente a las líneas sin arrastrar a las mismas, y aparece el fenómeno de reconexión magnética, que analizaremos después con más detalle. Por otra parte, parte de la energía magnética se transforma en energía cinética y térmica, y también puede aparecer aceleración de algunas partículas cargadas a velocidades no térmicas. Al ser la longitud característica de la zona de difusión en la hoja de corriente mucho menor que la escala de longitud global de la estructura, el tiempo de difusión es mucho menor (~ 1 sec), aunque la dinámica general está limitada por la velocidad con que el campo magnético es

transportado por el plasma en su movimiento hacia la hoja. Hacia 1960 aparecieron los primeros modelos de aniquilación de campo magnético (Parker) y de reconexión magnética bidimensional (Sweet-Parker). Este último da un tiempo final del orden de 10^7 sec, que sigue siendo mucho mayor que el observado. Después surgieron otros modelos bidimensionales y posteriormente se estudió la reconexión tridimensional. Nosotros consideraremos solo la reconexión bidimensional estacionaria, dentro de la aproximación MHD (reconexión resistiva). También puede haber reconexión (llamada no-colisional) si los términos de Hall e inercial en la ley de Ohm son más importantes que el resistivo.

Además de los fenómenos eruptivos altamente energéticos, en las atmósferas del sol y muchas estrellas la temperatura exhibe un comportamiento creciente con el radio, en contradicción con los mecanismos de conducción térmica, pues es necesario el transporte de energía de regiones más frías a más calientes. En la actualidad se considera que los mecanismos de radiación térmica no pueden dar lugar a este calentamiento "anómalo", aunque hay que hacer la salvedad de que los argumentos utilizados para descartar este mecanismo se basan en el equilibrio termodinámico

local, condición que podría no cumplirse. Una posibilidad de explicación de las altas temperaturas coronales es el calentamiento magnético y éste tiene dos vertientes: la disipación en hojas o vainas de corriente, y las ondas magnéticas. En el primero se considera que el campo magnético se origina en capas más internas, es transportado hacia afuera por el plasma, y luego su energía es transformada en energía térmica y cinética por medio de fenómenos de reconexión, que se pueden originar por ejemplo por turbulencias. En el segundo se supone que en regiones más internas se generan ondas de Alfvén, que viajan hacia afuera y llevan lejos su energía; después, al entrar en regiones de campos no uniformes, aparecerían fenómenos de resonancia, en los que las densidades de corriente eléctrica ~~serían~~ ^{serían} altas, y habría difusión de las ondas. Otro mecanismo considerado es la interacción ^{no lineal} de las ondas de Alfvén con otras ondas, por ejemplo magnetoacústicas; por medio de esta interacción entregarían su energía a estas últimas, que a diferencia de las ondas de Alfvén, se pueden transformar en ondas de choque y disipar su energía.

Sin embargo el mecanismo de calentamiento por medio de las ondas no parece ser suficiente, y yo en particular tengo mis reservas respecto al fenómeno de resonancia. No avanzaremos sobre este tema.

Hoja de corriente

Analizaremos un modelo muy simple de hoja de corriente. Consideremos que la densidad de corriente tiene solo componente \hat{z} la que depende solo de la coordenada x , y que tiene la forma:

$$\vec{J} = \frac{K}{\sqrt{\pi} a} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \hat{k};$$

a es una constante que es una medida del ancho de la región en la que la corriente es significativa. Para obtener el campo de inducción \vec{B} en todo el espacio, vemos primero que por simetría de traslación en dirección y ó z , \vec{B} solo puede depender de x . Aplicando la ley de Biot y Savart concluimos que \vec{B} solo tiene componente \hat{y} , que además satisface que

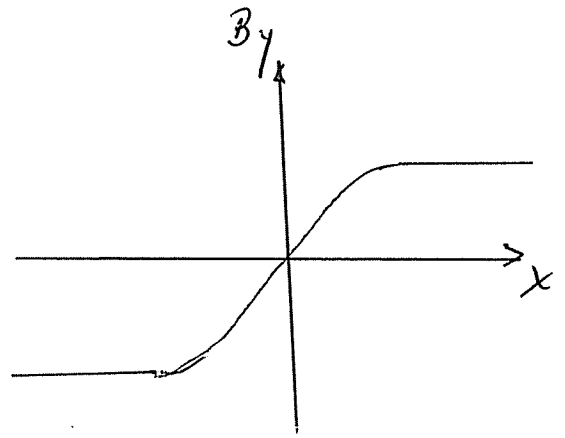
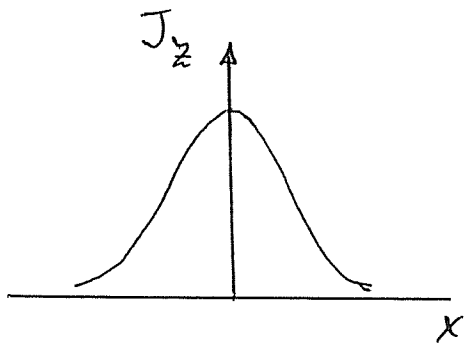
$$B_y(-x) = -B_y(x)$$

Finalmente de la ley de Ampere resulta

$$\vec{B} = \mu \frac{K}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{|x|}{a}\right) \operatorname{sgn}(x) \hat{y}$$

donde la función error es

$$\operatorname{erf} \xi = \int_0^{\xi} e^{-u^2} du$$



Si la región donde la corriente es significativa es mucho menor que las demás longitudes características de nuestro problema, podemos aproximar por los valores límite para $a \rightarrow 0$ y tendremos una hoja de corriente

$$\lim_{a \rightarrow 0} \vec{J} = K \delta(x) \vec{k}$$

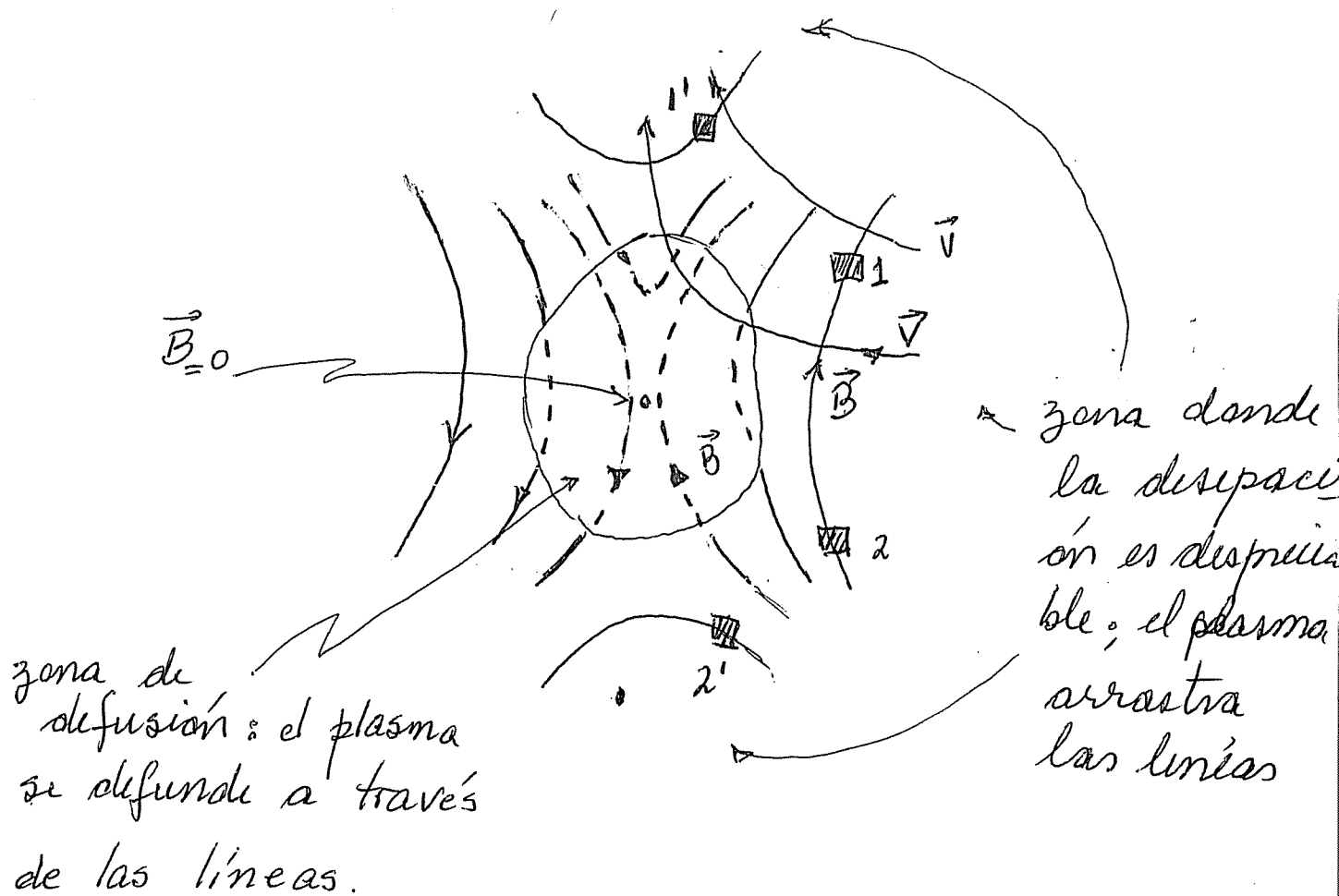
$$\lim_{a \rightarrow 0} \vec{B} = \frac{\mu K}{2} \text{sgn}(x) \vec{j}$$

Reconexión magnética

Ocurre un proceso de reconexión magnética cuando dos elementos de plasma que están originalmente en una misma línea de campo de inducción, aparecen después del proceso en dos líneas diferentes; y, a su vez, elementos de plasma que están originalmente en líneas diferentes aparecen en la misma línea. Para que esto ocurra una parte del plasma sobre las líneas originales debe pasar por una zona de alta difusión, para que deje de valer el congelamiento.

Supongamos una situación bidimensional estacionaria como indica la figura. Fuera de la región central vale el congelamiento, y suponga-

mos que el plasma se va acercando a la zona de difusión arrastrando las líneas. Para que pueda haber resonancia en el caso bidimensional, en la zona de difusión tendrá que existir un punto en el que la proyección en el plano de \vec{B} sea nula (un punto neutro tipo X). La estructura más simple de las líneas es entonces la de la figura:

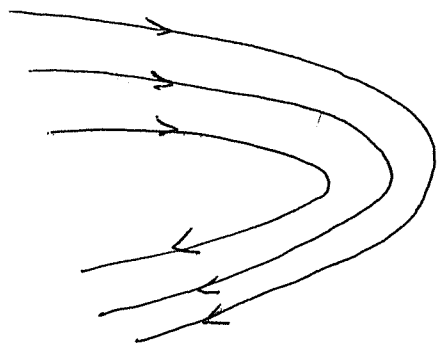


Los elementos 1 y 2 están originalmente sobre la misma línea, y después están sobre líneas diferentes

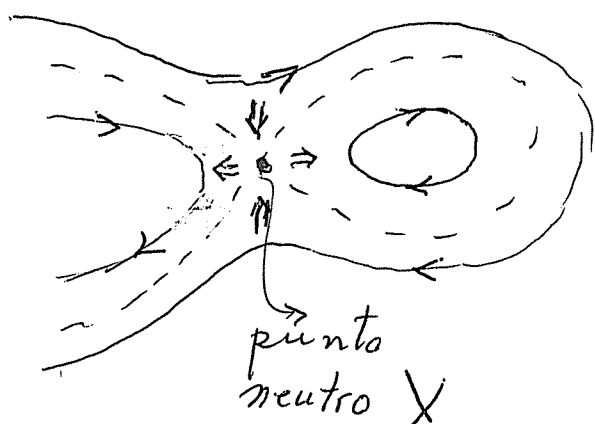
En la zona de difusión el plasma se difunde a través de las líneas; al salir vuelve a estar congelado, pero parte del plasma que estaba sobre una misma línea antes de entrar sale en una dirección, y parte en otra, quedando así en líneas

de campo distintas.

Una de las posibles consecuencias de que se produzca una reconexión magnética es el desprendimiento de plasmoides. Estas son "burbujas" de plasma con líneas cerradas. Si se tiene una estructura magnética como la siguiente,



al haber una región donde las líneas magnéticas cambian bruscamente de dirección, hay una alta densidad de corriente y se pueden producir inestabilidades que llevan a que aparezcan puntos de campo nulo y líneas cerradas. Finalmente a través de la separatrix que pasa por el punto neutro X fluye plasma con lo que crece el plasmóide y se termina desprendiéndose de la estructura original. Esto sucede por ejemplo en la magnetósfera terrestre.



Modelos bidimensionales de reconexión magnética

Hay algunas elementos comunes a todos los modelos bidimensionales ^{estacionarios} de reconexión magnética.

Supongamos que la dirección invariante es la dirección z , y que la velocidad \vec{v} y el campo de inducción magnética \vec{B} tienen solamente componentes x e y . Las ecuaciones de la MHD quedan

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \vec{B} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (5)$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (6)$$

De la ecuación (5), teniendo en cuenta que \vec{B} solo tiene componentes x e y , y no depende de z se obtiene que

$$\vec{J} = J_z \check{k} \quad (7)$$

Usando este resultado, y que \vec{v} y \vec{B} solo tienen componentes x e y , resulta ^{de (6)} que \vec{E} solo tiene componente z , y de (4) ésta es constante

$$\vec{E} = E_z^0 \check{k} \quad (8)$$

Fuera de la zona de difusión $\vec{E} = -\vec{V} \wedge \vec{B}$, mientras que en la zona de difusión $\frac{\vec{J}}{J}$ es importante y $|\vec{V} \wedge \vec{B}|$ disminuye de tal manera que E_z tenga siempre el mismo valor.

En muchos modelos de reconexión bidimensional se suponen condiciones adicionales de simetría.

$$v_x(-x, y) = -v_x(x, y), \quad v_x(x, -y) = v_x(x, y)$$

$$v_y(-x, y) = v_y(x, y), \quad v_y(x, -y) = -v_y(x, y)$$

$$B_x(-x, y) = B_x(x, y), \quad B_x(x, -y) = -B_x(x, y)$$

$$B_y(-x, y) = -B_y(x, y), \quad B_y(x, -y) = B_y(x, y)$$

$$J_x(-x, y) = J_x(x, y), \quad J_x(x, -y) = J_x(x, y)$$

$$f(-x, y) = f(x, y), \quad f(x, -y) = f(x, y)$$

$$P(-x, y) = P(x, y), \quad P(x, -y) = P(x, y)$$

Tasa de reconexión

La tasa de reconexión es una medida de la magnitud del flujo magnético que se reconecta por unidad de tiempo. El tiempo de duración del fenómeno es inversamente proporcional a esta tasa.

Consideremos el caso bidimensional y supongamos que el plasma que se acerca a la región de difusión, cuando está aún lejos, tiene la velocidad en la dirección x y el campo magnético en la direc. y .

$$\vec{B}^{(e)} = B_y^e \hat{j} = B^e \hat{j}$$

$$\vec{v}^e = v_x^e \hat{i} = -v^e \hat{i}$$

(Las líneas que pasan por esta zona terminan reconectándose, y en esta región es más fácil el flujo magnético que se reconecta por unidad de tiempo y por unidad de longitud transversal (en la dirección invariante) será (en realidad así se obtiene la mitad)

$$v^e B_y^e = |v_x^e| |B_y^e| = |\vec{v}^e \wedge \vec{B}^e| = |E_z^0| \quad (9)$$

Si se adimensionalizan las velocidades con la velocidad de Alfvén externa: v_A^e , y los campos magnéticos con B^e , se obtiene una magnitud que se toma como una medida adimensionalizada de la tasa de reconexión, y que es igual al n° de Mach-Alfvén externo:

$$\left(\frac{|v_x^e|}{v_A^e} \right) \cdot \frac{B_y^e}{B^e} = \frac{|v_x^e|}{v_A^e} = \frac{v^e}{v_A^e} = M_A^e \quad (10) \text{ tasa de reconexión adimensionalizada}$$

Resulta igual al n° de Mach Alfvén del plasma entrante \Rightarrow

Modelo de aniquilación de Parker

En este modelo se considera la formación de una hoja de corriente extensa, al ponerse en contacto dos plasmas con campos magnéticos opuestos. Supongamos que la hoja de corriente se forma en los alrededores del plano $y-z$, que los plasmas son incompresibles y de densidad etc ρ_0 , y que todo el sistema está limitado entre dos planos paralelos a distancias grandes

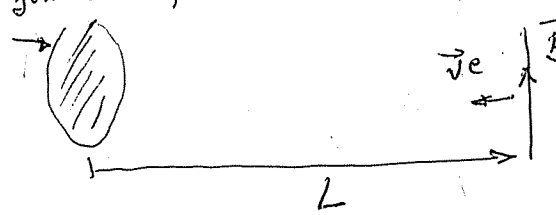
Otra forma de calcular el flujo magnético que se reconecta es la siguiente

Consideremos la curva formada por dos segmentos de longitud unitaria, en la dirección invariante (z), uno que pase por el punto neutro X, y otro que pase por un determinado elemento de plasma fuera de la zona de difusión. Cierran el circuito dos segmentos perpendiculares a los anteriores. El área encerrada va disminuyendo en el tiempo a medida que el elemento de plasma se acerca a la zona de difusión. De la ley de Faraday:

$$\frac{d\phi}{dt} = - \oint (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

El segmento en la dirección invariante que pasa por el elemento de plasma fuera de la zona de difusión no contribuye porque allí $\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = 0$. Los laterales tampoco porque allí \vec{E} y $\vec{v} \wedge \vec{B}$ son perpendiculares a $d\vec{l}$. En el punto X, $\vec{v} = 0$ por lo que el flujo magnético que se reconecta por unidad de tiempo y de longitud transversal (en la direc. inv.) es $|\vec{E}_z|$.

Si la dimensión de la región es $2L$, el flujo total (de un lado) por unidad de long. transversal es aprox. $B^e L$; el tiempo de reconexión será



$$\tau_{rec} = \frac{\text{Flujo total}}{\text{Fl. recon por un. det}} = \frac{B^e L}{|\vec{E}_z|} = \frac{B^e L}{v^e B^e} = \frac{L}{M_A^e v_A^e}$$

Por otro lado el tiempo de difusión (si no hubiese reconexión) es $\tau_d = \mu \sigma L^2$. Para ver si la reconexión es lenta o rápida, comparamos τ_{rec} con τ_d

$$\frac{\tau_{rec}}{\tau_d} = \frac{L}{M_A^e v_A^e \mu \sigma L^2} = \frac{1}{M_A^e (\mu \sigma L v_A^e)}$$

Llamando $R_{me} = \mu \sigma v_A^e L$ al nº de Reynolds en la que se pone v_A^e en lugar de una velocidad característica (designado también con S, nº de Lundquist) resulta $\frac{\tau_{rec}}{\tau_d} = \frac{1}{M_A^e R_{me}}$; la reconexión se dice

-superlenta si $M_A^e < R_{me}^{-1}$, -lenta si $R_{me}^{-1} < M_A^e < R_{me}^{-1/2}$; rápida si $M_A^e > R_{me}^{-1/2}$

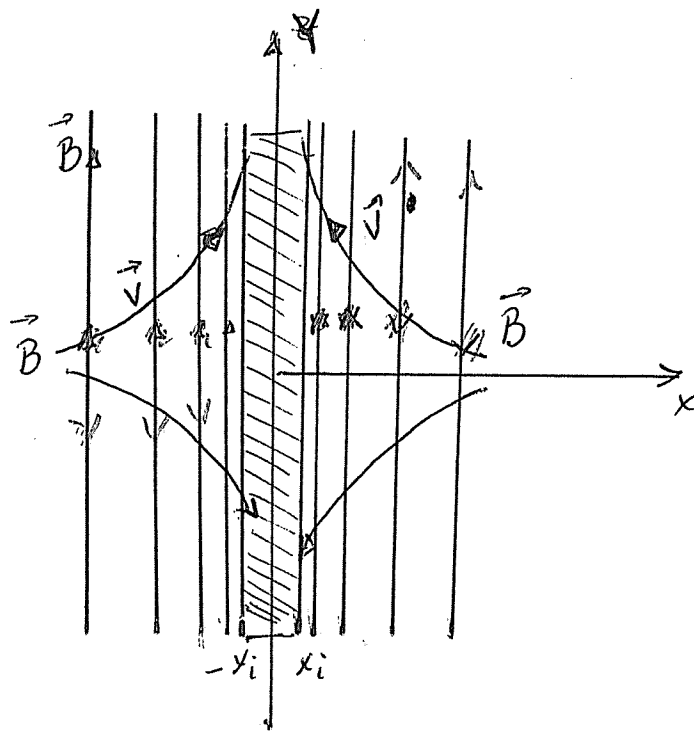
de la hoja en las posiciones $\pm x_e$. Se impone una ley de velocidades

$$\vec{v}(x, y) = (a_0 x, a_0 y) \quad (11)$$

(donde a_0 es una cte) que cumple con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

El plasma se puede considerar sin disipación en una región externa a planos paralelos al $y-z$ en posiciones $\pm x_i$. En la región interna habrá una densidad de corriente grande y una fuerte disipación



Supondremos que en los límites exteriores ($x = \pm x_e$) el campo magnético tiene solo componente y .

Debido a que el campo de velocidades es tal que su componente x solo depende de x , el congelamiento del campo en la región externa lleva a que en toda esa región \vec{B} tenga solo

componente y , que depende solo de x , siendo entonces las líneas de campo líneas rectas. Las líneas de inducción se acercan a la hoja de corriente con ~~velocidad~~ ^{rapidez} $|v_x|$ cada vez menor por lo que la distancia entre líneas disminuye al acercarse a la hoja.

En las regiones externas, recordando que en el caso bidimensional el campo eléctrico es etc, se tiene

$$\vec{v} \wedge \vec{B}(x) = -\vec{E} = \vec{v}(x_e, 0) \wedge \vec{B}(x_e, 0),$$

de donde, teniendo en cuenta (11), resulta

$$\vec{B}_y(x) = \frac{x_e}{x} \cdot B_y(x_e) \quad (1.2)$$

para $|x| > x_e$.

De la ecuación de movimiento en el caso estacionario

$$\rho_0 (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}{\mu},$$

usando que $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$, y que de (11) $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$, considerando que $\vec{B} = B_y \hat{y}$ resulta

$$\vec{\nabla} \left(\rho_0 \frac{v^2}{2} \right) = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu} \right)$$

o sea

$$\vec{\nabla} \left(p + \rho_0 \frac{v^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu} \right) = 0 \quad (12')$$

Integrando y reemplazando las expresiones de \vec{v} y \vec{B} (eqs (11) y (12))

$$p = p_0 - \frac{\rho_0}{2} a_0^2 (x^2 + y^2) - \frac{1}{2\mu} \frac{[x_e B_y(x_e)]^2}{|x|} \quad (13) \Rightarrow$$

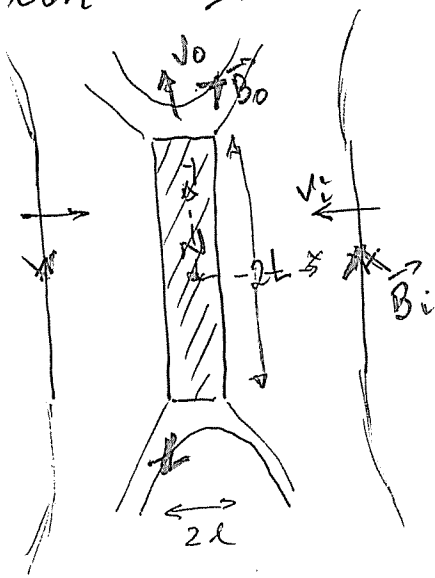
que es válida fuera de la zona de difusión ($v_1 \times x_2$)
 Acá queda claro que se debe limitar la hoja
 en la dirección y , pues sino, para z suficientemente grandes la presión resultaría negativa

Modelo de reconexión de Sweet-Parker

En este modelo la zona de difusión se limita tanto en la dirección x como en la y

$$\text{zona de difusión } -l < x < l \\ -L < y < L$$

con $L \gg l$. El plasma ingresa a la región por sus lados mayores y sale por los menores



Llamando v_i y v_o a las velocidades características de entrada y de salida, suponiendo incompresibilidad,

de igualar los caudales de entrada y salida (por ser estacionario) tenemos

$$Q_i = 4\rho L A v_i = Q_o = 4\rho l A v_o$$

donde A es una long. arbitraria en dirección z .

Se obtiene

$$\frac{v_i}{v_o} = \frac{l}{L} \quad (14)$$

Luego

$$v_i \ll v_o \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que fuera de la zona de difusión $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$, y que \vec{E} es cte por ser un modelo bidimensional

$$\vec{E} = -v_i B_i \hat{z} = -v_0 B_0 \hat{z}$$

se obtiene

$$\frac{B_0}{B_i} = \frac{v_i}{v_0} \quad (16)$$

y de (15)

$$B_0 \ll B_i \quad (17)$$

De (15) y (17) vemos que disminuye la energía magnética y aumenta la cinética.

Podemos estimar el valor de la velocidad saliente v_0 integrando la ec. de movimiento primero sobre el eje x desde un punto exterior a la zona de difusión y el centro (punto N) y después sobre el eje y desde N hasta fuera de la zona de difusión. Teniendo en cuenta que sobre el eje x , $v_y = 0$, $B_x = 0$ y al ser $L \gg l$ podemos considerar $\partial B_x / \partial y \approx 0$, la comp x de la ec. de mov queda

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} - \rho (\vec{J} \times \vec{\omega})_x = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial B^2}{\partial x} + \frac{1}{\mu} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{1}{\mu} B_y \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

$$\frac{\rho}{2} \frac{\partial (v^2)}{\partial x} - \rho v_y \omega_z \approx -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial B^2}{\partial x}$$

donde se usó la suposición de incompresibilidad

Integrando

$$p_N = p_i + \frac{B_i^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \rho v_i^2 \quad (18)$$

ya que en N, $\vec{J} = 0$ y $\vec{B} = 0$

Sobre el eje y, que es la mitad de la zona de difusión, $v_x = 0$, $B_y = 0$ y suponiendo que al ser el campo magnético muy chico también lo es la fuerza de Lorentz (suposición arriesgada pues los campos allí tienen mucha curvatura) de integrar la componente y de la ec. de mov

$$p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 = p_N \quad (19)$$

Suponiendo además que $p_i \approx p_0$, de (18) \nearrow p_i es mucho menor que la presión en N que p_0 o que p_N y la presión en N es mucho mayor que p_0 y la presión en N es mucho mayor que p_0 .

(19) se obtiene

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 \approx \frac{B_i^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \rho v_i^2$$

Como $v_i \ll v_0 \Rightarrow$

$$v_0^2 \approx \frac{B_i^2}{\mu \rho} = v_{Ai}^2 \quad (20)$$

De la ley de Ohm en el punto N y afuera, teniendo en cuenta que \vec{E} es cte

$$\frac{J}{\sigma} = v_i B_i \quad (20')$$

De la ley de Ampère, suponiendo que J es cte en la zona de difusión $4L B_i \approx \mu J 4lL$

o sea

$$B_i \approx \mu J l$$

Reemplazando B_i en (20)

$$v_i \mu J l = \frac{J}{J}$$

o sea

$$v_i = \frac{1}{\mu \sigma l} \quad (21)$$

es del orden del tiempo en que el plasma que viene reemplaza al que

se va $e^2 \mu \sigma \sim \frac{l}{v_i}$

(o sea el tiempo en que se difunde el campo)

Si tomamos como tasa de reconexión adimensional (o sea aproximando $v_e \approx v_i$, $B_e \approx B_i$)

$$M_A = \frac{v_i}{v_{A_i}}$$

v_e, B_e campos entrantes lejos

se tiene (usando 20, y 14)

$$M_A^2 = \frac{v_i^2}{v_{A_i}^2} = \frac{v_i^2}{v_{A_i} v_0} = \frac{v_i}{v_{A_i}} \frac{v_i}{v_0} = \frac{1}{\mu \sigma l v_{A_i} L} = \frac{1}{\mu \sigma L v_{A_i}}$$

$$= \frac{1}{S}$$

$$M_A \sim \left(\frac{L_{\text{rec}}}{L} \right)^{-1}$$

donde S se conoce como n° de Lundquist
 (n° de Reynolds magn. en que se toma v_e en lugar de v_i)
 En el modelo de Sweet-Parker la tasa de reconexión magnética adimensionalizada es

$$M_A \approx S^{-1/2} = (\mu \sigma v_{A_i} L)^{-1/2}$$

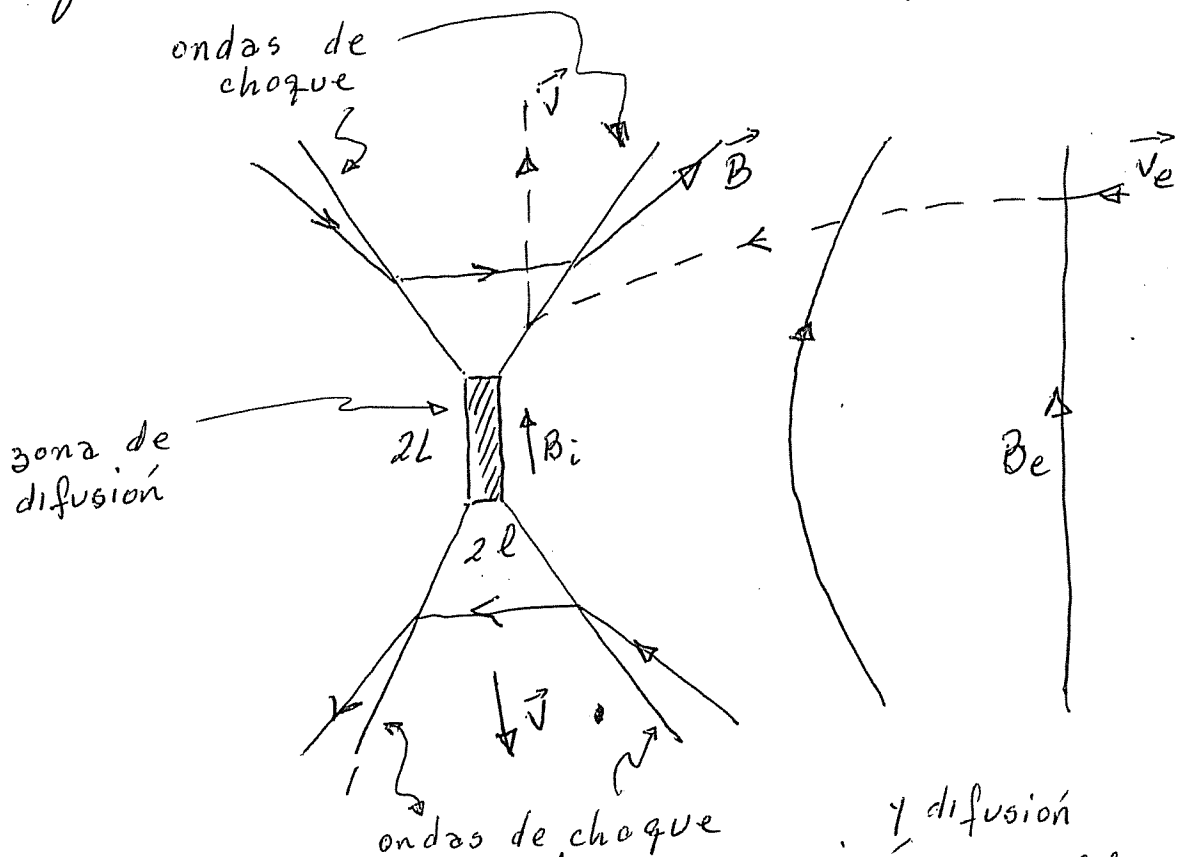
El modelo de Sweet-Parker es un modelo muy simplificado en el que se considera $v_e = v_i$, $B_e = B_i$

En general el n° de Lundquist en astrofísica es muy grande con lo que la tasa de reconexión resultante (*) es muy chica. Solo podría funcionar si en una región extensa hay muchas microestructuras magnéticas

(*) Si L es igual a la escala de longitud global,

Modelo de Petschek

En este modelo la longitud L de la región de difusión es mucho menor que la escala de longitudes global L_e . Como en el modelo aparecen ondas de choque lentas estacionarias, la difusión ocurre no solo en la zona de difusión propiamente dicha, sino también en los frentes de las ondas de choque.



Del mismo modo, la reconexión ocurre parcialmente en la zona de difusión, y parcialmente en las ondas de choque. Una onda de choque cambia la dirección del campo magnético.

Con este modelo, haciendo suposiciones simplificativas (por ej. campo potencial fuera de la zona de difusión y frentes), Petschek (1964) obtuvo una tasa de reconexión adimensional proporcional a $(\ln 5)^{-1}$, que resulta mucho mayor que la del modelo de Sweet-Parker.

Zona de difusión

Una teoría consistente requiere que también se tenga en cuenta la zona de difusión

Hay algunos pocos trabajos que ~~tienen en~~ ^{analizan} ~~cuanta~~ que es lo que sucede en la zona de difusión. Por ejemplo Priest y Cowley, J. Plasma Physics 14, 271-282 (1975) [artículo comentado en "Magnetic Reconnection" Priest E. R y Forbes T, p. 143-], en el que se supone incompresibilidad

Otro trabajo es el realizado por C.A. Pado, M.F. Montero y A.M. Platzek (AFA 2001) En el mismo se supone un flujo de masa dado ($\rho \vec{v}$ especificado) y politropía. Se hace un desarrollo en serie de Taylor en x e y de todas las magnitudes; reemplazando estos desarrollos en las ecuaciones se obtienen relaciones entre los coeficientes. Se obtiene la forma de las líneas de \vec{B} en la zona de difusión y en sus alrededores. Variando los parámetros se obtienen distintos tipos de estructuras de líneas - El trabajo no está totalmente desarrollado y falta, entre otras cosas, conectar la solución interna con la externa y calcular

la tasa de reconexión. Se ve que la estructura de la zona de difusión es muy compleja.

También hay simulaciones numéricas que tienen en cuenta la región de difusión ("Magnetic Reconnection in Plasmas"

D. Biskamp, p. 70 y 79)

Curso Introducción a la Magnetohidrodinámica

IX Inestabilidades

Introducción.-Linealización de las ecuaciones de la MHD.-Ecuación diferencial para el desplazamiento ξ .-Método de los modos normales. Ejemplo: inestabilidad de Rayleigh-Taylor magnética.

-Introducción:

Supongamos que tenemos una estructura y queremos estudiar bajo qué condiciones será estable o no. El procedimiento que seguiremos será analizar la estabilidad de la estructura cuando la perturbamos apartándola de la posición de equilibrio. Los métodos que se emplean para estudiar la estabilidad de un sistema en magnetohidrodinámica son una generalización de los usados para estudiar el movimiento unidimensional de una partícula sometida a una fuerza proveniente de un potencial $U(x)$. La fuerza actuante sobre la partícula es:

$$F(x)\check{x} = -dU/dx \check{x} \quad (1)$$

La ecuación de movimiento de la partícula es:

$$m d^2x/dt^2 = -dU/dx \check{x} \quad (2)$$

Si tomamos la posición de equilibrio como $x=0$, podemos desarrollar el potencial alrededor de esta posición de equilibrio:

$$U(x) = U(x=0) + x (dU/dx|_{x=0}) + (d^2U/dx^2|_{x=0}) x^2/2! + \dots \quad (3)$$

tomando $U(x=0) = 0$ y teniendo en cuenta que como $x=0$ es la posición de equilibrio $(dU/dx|_{x=0})=0$, entonces la ecuación de movimiento queda:

$$m d^2x/dt^2 = -x (d^2U/dx^2|_{x=0}) \check{x} = F_1 \quad (4)$$

F_1 es la aproximación a primer orden en las perturba-

ciones de la fuerza actuante.

Una manera de atacar el problema es buscando la solución de los modos normales para un desplazamiento del tipo $x = x_0 e^{-i\omega t}$, entonces la ecuación de movimiento queda de la forma:

$$\omega^2 = (d^2U/dx^2|_{x=0}) 1/m \quad (5)$$

a) Si $U(x)$ tiene un mínimo en $x=0$, entonces $(d^2U/dx^2|_{x=0}) > 0$, por lo tanto $\omega^2 > 0$, por lo tanto las frecuencias son reales. La partícula oscila alrededor de la posición de equilibrio, la fuerza actuante sobre la partícula tiende a restaurar su equilibrio, el cual se dice que es estable. (Figura 1).

b) Si $U(x)$ tiene un máximo en $x=0$, entonces $(d^2U/dx^2|_{x=0}) < 0$, entonces $\omega^2 < 0$, por lo tanto las frecuencias son imaginarias. Como el desplazamiento es del tipo $x = x_0 e^{-i\omega t}$, éste crece con el tiempo a partir de la posición de equilibrio, el cual se dice que es inestable. (Figura 2).

c) Si $(d^2U/dx^2|_{x=0}) = 0$, entonces la frecuencia es nula y $x=0$ es un punto de equilibrio indiferente y se dice que tiene equilibrio neutro. (Figura 3).

Figura 1

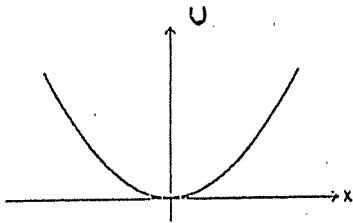


Figura 2

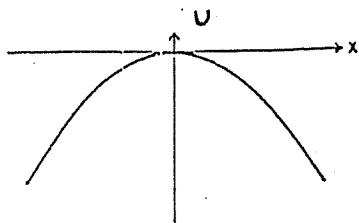
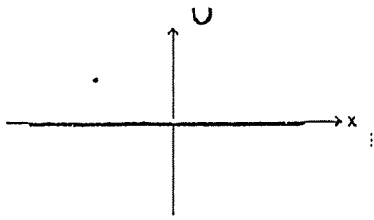


Figura 3



Si consideramos apartamientos del equilibrio que no sean pequeños será posible analizar el equilibrio no lineal del sistema. La partícula puede tener equilibrio linealmente estable pero no linealmente, inestable; esta inestabilidad está promovida por los términos no lineales, se dice que la inestabilidad es explosiva, (Figura 4). Puede ser linealmente inestable pero, para apartamientos mayores, no linealmente estable, (Figura 5), o puede tener equilibrio neutro para pequeños apartamientos pero ser no linealmente inestable, estos últimos estados se llaman metastables, (Figura 6). La terminología utilizada en la descripción de los estados de equilibrio es la utilizada en el análisis de los estados de equilibrio de los plasmas.

Figura 4

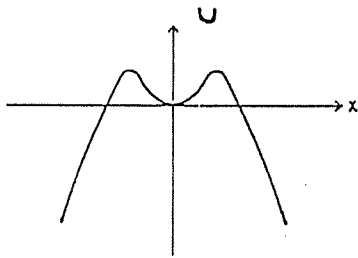


Figura 5

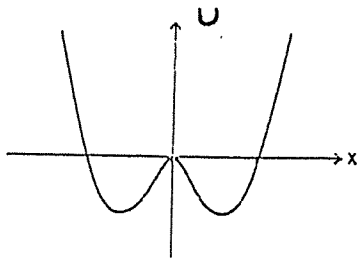
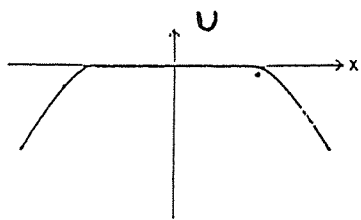


Figura 6



Otra manera de estudiar la estabilidad es considerar el cambio en la energía potencial debido a un desplazamiento x desde la posición de equilibrio, (en magnetohidrodinámica corresponde al método variacional). A primer orden en x , el cambio en energía potencial es:

$$\delta U = U(x) - U_0 = (dU/dx|_{x=0}) x = 0 \quad (6)$$

A segundo orden en x , usando (3):

$$\delta U = U(x) - U_0 = (d^2U/dx^2|_{x=0}) x^2/2! \quad (7)$$

Para desplazamientos pequeños desde $x=0$, la partícula tiene equilibrio estable si $\delta U > 0$ y tiene equilibrio inestable si $\delta U < 0$.

La frecuencia puede escribirse en función de la variación de la energía potencial debido a un desplazamiento desde la posición de equilibrio, para desplazamientos del tipo $x = x_0 e^{-i\omega t}$, reemplazando (5) en (7),:

$$\delta U = m x^2 \omega^2 / 2 \quad (8)$$

La estabilidad en magnetohidrodinámica se estudia de la misma manera, ya sea utilizando el método de los modos normales o el variacional. Cada uno tiene sus ventajas, el método de los modos normales nos permite encontrar la relación de dispersión entre la frecuencia ω y k , el número de onda de la perturbación, mientras que el método variacional puede ser aplicado a situaciones de equilibrio complicadas. Independientemente del método utilizado, primero debemos linealizar las ecuaciones de la magnetohidrodinámica.

- Linealización de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica:

Supongamos que el sistema a analizar es uno ideal, no disipativo; en el límite de conductividad infinita, el cual se encuentra gobernado por:

la ecuación de inducción:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (9)$$

la ecuación de continuidad:

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (10)$$

la ecuación de movimiento:

$$\rho \, DV/Dt = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} \quad (11)$$

donde

$$\mathbf{J} = (\nabla \times \mathbf{B}) / \mu \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

y alguna consideración sobre la energía.

Vamos a identificar las variables en equilibrio con el subíndice 0, supongamos que tenemos equilibrio estático $\mathbf{V}_0=0$, y tengamos en cuenta que las variables en equilibrio son independientes del tiempo. Las ecuaciones de inducción y de continuidad se cumplen idénticamente, las otras quedan:

$$-\nabla p_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 + \rho_0 \mathbf{g} = 0 \quad (14)$$

donde

$$\mathbf{J}_0 = (\nabla \times \mathbf{B}_0) / \mu \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (16)$$

Si perturbamos el estado de equilibrio de manera que: $\mathbf{V}=\mathbf{V}_1$, $\rho=\rho_0+\rho_1$, $p=p_0+p_1$, $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1$, $\mathbf{J}=\mathbf{J}_0+\mathbf{J}_1$, donde las perturbaciones se identifican con el subíndice 1. Las ecuaciones quedan:

la ecuación de inducción:

$$\partial(B_0+B_1)/\partial t = \nabla \times \{V_1 \times (B_0+B_1)\},$$

el primer término del miembro izquierdo se anula por ser las variables en equilibrio independientes del tiempo, el segundo término del miembro derecho lo despreciamos por ser de orden superior en las perturbaciones; por tanto, la ecuación de inducción queda:

$$\partial B_1/\partial t = \nabla \times (V_1 \times B_0) \quad (17)$$

la ecuación de continuidad:

$$\partial(\rho_0+\rho_1)/\partial t + \nabla \cdot \{(\rho_0+\rho_1)V_1\} = 0 ,$$

el primer término se anula por ser las variables en equilibrio independientes del tiempo, mientras que el cuarto lo despreciamos por ser de orden superior en las perturbaciones, por lo tanto la ecuación de continuidad queda:

$$\partial \rho_1/\partial t + \nabla \cdot (\rho_0 V_1) = 0 \quad (18)$$

la ecuación de movimiento:

$$(\rho_0+\rho_1) DV_1/Dt = -\nabla(p_0+p_1) + (J_0+J_1) \times (B_0+B_1) + (\rho_0+\rho_1)g ,$$

luego de eliminar los términos de orden superior en las perturbaciones y usando (14), la ecuación de movimiento linealizada queda:

$$\rho_0 \partial V_1/\partial t = -\nabla p_1 + J_0 \times B_1 + J_1 \times B_0 + \rho_1 g \quad (19)$$

donde

$$J_1 = (\nabla \times B_1) / \mu \quad (20)$$

$$\nabla \cdot B_1 = 0 \quad (21)$$

El sistema de ecuaciones de la magnetohidrodinámica linealizadas a primer orden en las perturbaciones queda constituido por (17), (18), (19), (20) y (21), además de una ecuación de estado y alguna consideración sobre la energía.

-Ecuación diferencial para el desplazamiento ξ

Si un elemento del plasma en equilibrio tiene la posición r_0 , al ser perturbado el plasma pasará a la posición r en el tiempo t , (Figura 7) por lo tanto respecto de la posición de equilibrio la posición del elemento de plasma en el tiempo t será:

$$\xi = r - r_0 \quad (22)$$

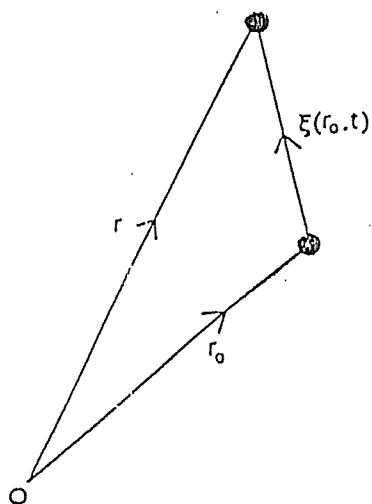


Figura 7

Si el movimiento del elemento de plasma lo describimos en forma euleriana, las variables lagrangianas estarán relacionadas de la siguiente manera:

$$r(t) = r_0 + \xi(r_0, t) \quad (23)$$

El campo de velocidades alrededor de la posición de equilibrio r_0 es:

$$V_1(r, t) = V_1(r_0, t) + (\xi \cdot \nabla) V_1(r_0, t) + \dots \quad (24)$$

pero $(\xi \cdot \nabla) V_1(r_0, t)$ es de orden dos en las perturbaciones, por lo tanto a primer orden en las perturbaciones:

$$V_1(r, t) = V_1(r_0, t) \quad (25)$$

esto es:

$$V_1(r, t) = dr(t)/dt = \partial r_0 / \partial t + \partial \xi(r_0, t) / \partial t = \partial \xi / \partial t \quad (26)$$

Entonces a primer orden en las perturbaciones es

indistinto usar las variables (r, t) o (r_0, t) . Reemplacemos $V_1 = \partial \xi / \partial t$ en las ecuaciones linealizadas:

la ecuación de inducción:

$$\partial B_1 / \partial t = \nabla \times (\partial \xi / \partial t \times B_0)$$

Integramos teniendo en cuenta que tanto B_1 como ξ son nulos en $t=0$, entonces la perturbación en el campo de inducción magnética queda:

$$B_1 = \nabla \times (\xi \times B_0) \quad (27)$$

la ecuación de continuidad:

$$\partial \rho_1 / \partial t + \nabla \cdot (\rho_0 \partial \xi / \partial t) = 0,$$

con argumentos similares, integramos y la perturbación en densidad queda:

$$\rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = 0 \quad (28)$$

Si por ejemplo la consideración energética fuera adiabaticidad,

$$D(p/\rho^\gamma) / Dt = 0,$$

linealizando quedaría:

$$\partial \{p_1 / (\rho_0)^\gamma\} / \partial t - \partial \{ \rho_1 \gamma p_0 / (\rho_0)^{\gamma+1} / \partial t + (\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \{p_0 / (\rho_0)^\gamma\} = 0,$$

reemplazando $V_1 = \partial \xi / \partial t$ y la ecuación (28), e integrando con argumentos similares a los usados más arriba, la perturbación en presión queda:

$$p_1 + c_s^2 \nabla \cdot (\rho_0 \xi) + (\xi \cdot \nabla) p_0 - c_s^2 (\xi \cdot \nabla) \rho_0 = 0,$$

donde $c_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$; reemplazando (27), (28) y p_1 en la ecuación de movimiento:

$$\rho_0 \partial^2 \xi / \partial t^2 = \nabla \left\{ c_s^2 \nabla \cdot (\rho_0 \xi) + (\xi \cdot \nabla) p_0 - c_s^2 (\xi \cdot \nabla) \rho_0 \right\} + \mathbf{J}_0 \times \left\{ \nabla \times (\xi \times B_0) \right\} + \left\{ \nabla \times [\nabla \times (\xi \times B_0)] \right\} \times B_0 / \mu - \nabla \cdot (\rho_0 \xi) \mathbf{g}$$

o lo que es lo mismo :

$$\rho_0 \partial^2 \xi / \partial t^2 = F [\xi], \quad (29)$$

donde F es un operador vectorial, y (29) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden a derivadas parciales. Si la perturbación es del tipo $\xi = \xi_0 e^{-i\omega t}$, la ecuación de movimiento queda:

$$F [\xi] = -\omega^2 \rho_0 \xi . \quad (30)$$

El problema de las perturbaciones queda reducido a una sola ecuación diferencial para el desplazamiento ξ . Tanto el método de los modos normales como el método variacional parten de esta ecuación diferencial. Si las variables en equilibrio son uniformes el operador F se simplifica y si la perturbación es del tipo incompresible, de la ecuación de continuidad obtendremos que la perturbación en densidad es nula y la condición de adiabaticidad no será aplicable.

-Método de los modos normales:

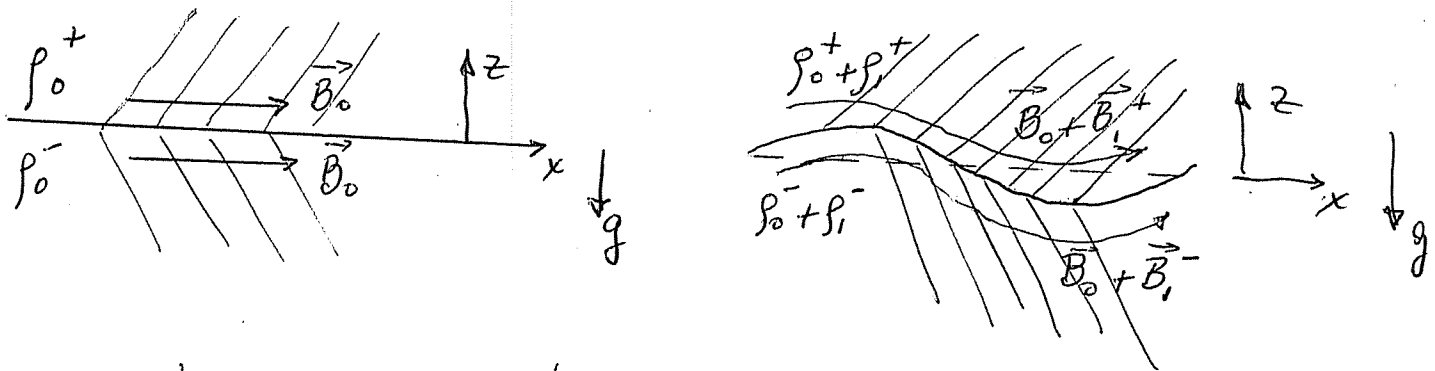
Si contamos con la configuración de equilibrio y las condiciones de contorno podemos determinar las variables perturbadas ya sea resolviendo la ecuación diferencial a segundo orden en derivadas parciales para el desplazamiento ξ (ecuación 29) y deduciendo las variables de partida usando las ecuaciones (26), (27) y (28), o usando el conjunto de ecuaciones linealizadas (17), (18), (19), (20) y (21).

Vamos a descomponer las variables en un espectro de componentes de Fourier y resolviendo las ecuaciones de los modos normales resultantes para estas perturbaciones se podrán determinar los valores de frecuencias permitidas bajo las condiciones de contorno consideradas.

Si todos los modos normales son tales que $\omega^2 > 0$, el sistema oscila alrededor de su posición de equilibrio el cual es estable. Si al menos una frecuencia es imaginaria, $\omega^2 < 0$, el sistema es inestable ya que la perturbación crece en forma exponencial.

Metodo de los modos normales - Ejemplo: inestabilidad de Raleigh-Taylor magnética.

Supongamos que tenemos un plano horizontal de separación entre dos medios, de densidades ρ_0^+ y ρ_0^- bajo la acción de la gravedad. Si la densidad del medio de arriba ρ_0^+ , es mayor que el de abajo habrá inestabilidad. Si además hay un campo magnético uniforme \vec{B}_0 , tangente a la interface, ante una perturbación en los alrededores de la misma aparecerá una fuerza de Lorentz que tenderá a estabilizar el sistema.



Suponemos la interface en $z=0$ y $\vec{B}_0 = B_0 \hat{x}$ (con $B_0^+ = B_0^-$); además consideraremos perturb. incompresibles.

En el método de los modos normales se busca una solución linealizada de las ecuaciones de la MHD válida en cada medio y condiciones de contorno. Esto lleva a que los k y ω propuestos para la perturbación deben satisfacer una relación de dispersión. Si de allí resulta que para k real, ω es imaginario, entonces habrá inestabilidad.

Ponemos $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $p = p_0 + p_1$, $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$, $\vec{v} = \vec{v}_1$ y una depend. en c/medio $\vec{v}_1 = \vec{v}_1(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ (1)

La ecuación de movimiento, despreciando los términos cuadráticos y teniendo en cuenta que $v_0 = 0$ es Ral-Taylor (2)

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left(p + \frac{B_0 B_{1x}}{\mu} \right) + \frac{B_0}{\mu} \frac{\partial B_{1x}}{\partial x} + \rho_0 \vec{g} \quad (2)$$

Derivando con respecto a t , reemplazando ^{de} la ec. de continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, y considerando una depend. temporal $e^{-i\omega t}$, para la componente z queda

$$-\rho_0 \omega^2 v_{1z} = i\omega \frac{\partial}{\partial z} \left(p_1 + \frac{B_0 B_{1x}}{\mu} \right) - i\omega \frac{B_0}{\mu} \frac{\partial B_{1z}}{\partial x} + g \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) \quad (3)$$

Integrando entre dos puntos, uno a ϵ lado de la interfase (como la perturb. es pequeña integraremos sobre z), y haremos el intervalo de integración tendiendo a cero; solo sobrevivan los términos que contienen $\frac{\partial}{\partial z}$; usando la notación del cap de ondas de choque resulta

$$\left[p_1 + \frac{B_0 B_{1x}}{\mu} + \frac{g}{i\omega} \rho_0 v_{1z} \right] = 0 \quad (4) \text{ Condición de contorno}$$

De la misma forma, de la cond. de incompresib. y la ec. de continuidad, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0$ y

$$[v_{1z}] = 0 \quad (5)$$

y de $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$

$$[B_{1z}] = 0 \quad (6)$$

Trabajaremos ahora en uno de los medios ("arriba" o "abajo") - En ellos ρ_0 es uniforme, y de la ec. de continuidad resulta $p_1 = 0$ (o sea $p_1^+ = p_1^- = 0$) (7)

Buscaremos expresiones para p_1 y B_{1x} en función

de v_{1z} , de modo que de la condición de contorno (4) se obtenga una relación de dispersión.

De la ecuación de inducción linealizada se tiene

$$-i\omega \vec{B}_1 = B_{0x} \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial x} \quad (8)$$

y reemplazandola en la ec. de mov: linealiz. (conf. = 0)

$$-i\omega \rho_0 \vec{V}_1 = -\vec{\nabla} \left[p_1 + \frac{i}{\omega} \frac{B_{0x}^2}{\mu} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} \right] + \frac{B_{0x}^2}{\mu} \frac{i}{\omega} \frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial x^2} \quad (9)$$

Como $\vec{\nabla}_\perp (\vec{\nabla}_\perp \cdot) = 0$, al tomar rotor de (9) resulta

$$\left(i\omega \rho_0 + \frac{i}{\omega} \frac{B_{0x}^2}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\vec{\nabla}_\perp \vec{V}_1) = 0$$

ó

$$\frac{i}{\omega} \left(\omega^2 \rho_0 - \frac{B_{0x}^2}{\mu} k_x^2 \right) (\vec{\nabla}_\perp \vec{V}_1) = 0 \quad (10)$$

Como ω y k_x deben ser iguales en ambos medios y ρ_0 no lo es, la expresión entre paréntesis no se anula y por lo tanto

$$\vec{\nabla}_\perp \vec{V}_1 = 0 \quad (11)$$

Como además $\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{V}_1 = 0$ se tiene la ecuación

$$\nabla_\perp^2 \vec{V}_1 = 0 \quad (12)$$

Para una dependencia en x e y como en (1) resulta

$$-(k_x^2 + k_y^2) \vec{V}_1(z) + \frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial z^2} = 0; \quad (13)$$

proponiendo una dependencia en z de la forma e^{-kz} queda

$$K^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (14)$$

Teniendo en cuenta que la perturbación no puede crecer al alejarse de la interfase, resulta

$$\vec{v}_1(z) \propto \begin{cases} e^{-Kz} & , z > 0 \\ e^{+Kz} & , z < 0 \end{cases} , K > 0 \quad (15)$$

Tomando ahora la componente x de la ecuación de movimiento

$$-i\omega \rho_0 v_{1,x} = -ik_x \left(p_1 - \frac{k_x B_0^2}{\omega \mu} v_{1,x} \right) - \frac{B_0^2 k_x^2}{\mu} \frac{i}{\omega} v_{1,x}$$

con lo que

$$p_1 = \frac{\omega}{k_x} \rho_0 v_{1,x} \quad (16)$$

Para poder poner $v_{1,x}$ en función de $v_{1,z}$ utilizaremos

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x v_{1,y} = k_y v_{1,x} \quad (17)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_{1,z}}{\partial z} = -ik_x v_x - ik_y v_y = -i \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x} \right) v_{1,x} \quad (18)$$

Reemplazando (18) en (16)

$$p_1 = - \frac{i\omega \rho_0}{k_x + k_y} \frac{\partial v_{1,z}}{\partial z} = \frac{i\omega \rho_0}{K^2} \frac{\partial v_{1,z}}{\partial z} \quad (19)$$

De la ec. de inducción (8):

$$B_{1,x} = - \frac{B_0 k_x}{\omega} v_{1,x} = -i \frac{k_x^2}{\omega K^2} B_0 \frac{\partial v_{1,z}}{\partial z} \quad (20)$$

Reemplazando estas dos últimas expresiones en la condición de contorno (4) queda:

$$\left[\frac{i\omega\rho_0}{K^2} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - \frac{ik_x^2}{\omega K^2} \frac{B_0^2}{\mu} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} + \frac{g}{i\omega} \rho_0 v_{1z} \right] = 0$$

O sea

$$-\frac{\omega\rho_0^+}{K} + \frac{k_x^2}{\omega K} \frac{B_0^2}{\mu} - \frac{g}{\omega} \rho_0^+ = \frac{\omega\rho_0^-}{K} - \frac{k_x^2}{\omega K} \frac{B_0^2}{\mu} - \frac{g}{\omega} \rho_0^-$$

Resulta entonces la relación de dispersión

$$\omega^2 = \left(-gK(\rho_0^+ - \rho_0^-) + \frac{2B_0^2 k_x^2}{\mu} \right) / (\rho_0^+ + \rho_0^-) \quad (21)$$

Cuando no hay campo magnético $\omega^2 < 0$ siempre que $\rho_0^+ > \rho_0^-$, y habrá inestabilidad.

Si hay campo magnético tg a la interfase, $\omega^2 > 0$ si $B_0^2 > \frac{gK(\rho_0^+ - \rho_0^-)\mu}{2k_x^2}$; por lo tanto el campo magnético tiene un efecto estabilizante.

De (8) y (11) resulta

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1 = 0$$

en c/u de los medios (no en la interfase); por lo tanto $\vec{J}_1 = 0$ y no habrá allí fuerza de Lorentz. Pero de (20), (15) y (5) resulta que B_{1x} es discontinuo en la interfase, por lo que debe haber una corriente eléctrica superficial en la dirección y que es la que produce una fuerza restitutiva en la dirección z .

Inestabilidades - Cap IX (Cont.)

Método de la energía o variacional

El método de los modos normales o de auto-funciones permite obtener un criterio adecuado de estabilidad de configuraciones de plasma en equilibrio solo en casos simples debido a la dificultad de resolver las ecuaciones diferenciales con determinadas condiciones de contorno. Pero nos podemos proponer un problema más modesto: si en lugar de buscar las expresiones concretas de las frecuencias propias de las oscilaciones buscamos solo las condiciones para la estabilidad podemos encontrar soluciones en situaciones más complicadas. Para esto se usa el método de energía o método variacional. Este método, debido a Bernstein, está basado en el análisis del comportamiento del cambio de la energía potencial δW del sistema cuando los elementos de plasma pasan de sus posiciones de equilibrio \vec{r}_0 a $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\xi}(\vec{r}_0, t)$ con $\vec{\xi}(\vec{r}_0, t)$ pequeño; el cálculo de δW se hace en 2º orden en $\vec{\xi}$ ya que los términos de 1º orden se anulan pues partimos de una situación de equilibrio.

Si

i) $\delta W > 0$ para todo campo de desplazamientos $\vec{\xi}$ entonces la configuración de equilibrio original es estable

ii) $\delta W < 0$ para algún campo de desplazamientos, entonces el equilibrio es inestable.

Para obtener una expresión de la variación de la energía potencial ante una perturbación deberemos que también habrá una variación δT de la energía cinética, y que, como suponemos que no hay efectos disipativos

$$\delta T + \delta W = \text{cte} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\delta T + \delta W) = 0$$

por lo que calcularemos δT . Para un plasma encerrado en un volumen Ω la energía cinética

es

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho v^2 dV \quad (2)$$

y la energía potencial:

$$W = \int_{\Omega} \left[\frac{B^2}{2\mu} + \frac{p}{\gamma-1} + \rho \Phi \right] dV \quad (3)$$

donde Φ es el potencial gravitatorio externo.

Ante un campo de desplazamientos $\vec{\xi}(\vec{r}_0, t)$

de la posición de equilibrio, como

$$\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}(\vec{r}_0, t) \quad (4)$$

podemos poner en 2do orden

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 \left| \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right|^2 dV \quad (5)$$

donde Ω es el volumen ocupado por el plasma en el equilibrio. Si hallamos la variación temporal

$$\frac{d(\delta T)}{dt} = \int_{\Omega} \rho_0 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} dV \quad (6)$$

Pero $\vec{\xi}$ obedece a la ecuación diferencial

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F} \{ \vec{\xi} \} \quad (7)$$

con lo que

$$\frac{d(\delta T)}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \vec{F} \{ \vec{\xi} \} dV \quad (8)$$

Bernstein demostró que el operador \vec{F} es hermitico, o sea

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \vec{F} \{ \vec{\xi} \} dV = \int_{\Omega} \vec{\xi} \cdot \vec{F} \left\{ \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right\} dV$$

si $\vec{\xi}$ es real. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta T) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \vec{F} \{ \vec{\xi} \} + \vec{\xi} \cdot \vec{F} \left\{ \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right\} \right] dV = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{\xi} \cdot \vec{F} \{ \vec{\xi} \} dV \end{aligned} \quad (9)$$

Teniendo en cuenta (1) podemos poner

$$\frac{d}{dt}(\delta W) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{\xi} \cdot \vec{F} \{ \vec{\xi} \} dV \quad (10)$$

por lo que

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{\xi} \cdot \vec{F} \{ \vec{\xi} \} dV \quad (11)$$

ya que $\delta W = 0$ si $\vec{\xi} = 0$. Reemplazando la expresión de \vec{F} podemos poner

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} p_1 + (\vec{\xi} \cdot \vec{g}) \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) - \vec{\xi} \cdot \left\{ \vec{J}_0 \wedge [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\xi} \wedge \vec{B}_0)] \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\mu} \vec{\xi} \cdot \left\{ [\vec{\nabla} \wedge [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\xi} \wedge \vec{B}_0)]] \wedge \vec{B}_0 \right\} \right\} dV \end{aligned} \quad (12)$$

Para una perturbación con dependencia temporal $\cos \omega t$, se ve de (7) y (11) que

$$\delta W = \frac{\omega^2}{2} \int_{\Omega} |\vec{\xi}|^2 \rho_0 dV \quad (13)$$

por lo que el signo de δW coincide con el de ω^2 . En el método de los modos normales se proce-

de a obtener los w y luego se ve si son reales o imaginarios. En el método de la energía se analiza solo el signo de δW ; una forma para ver si δW es positivo es calcular el mínimo ante diferentes campos de desplazamientos mediante un método variacional, con alguna condición de normalización para $\vec{\eta}$; si este mínimo es positivo entonces todos los δW son positivos y el equilibrio es estable.

Ejemplo del método variacional: Inestabilidad de kink.

Esta es una inestabilidad que se produce en configuraciones de inducción magnética con simetría cilíndrica, ya sea en situaciones en que habiendo gradiente de presión y la fuerza gravitatoria las perturbaciones no modifican ni la densidad ni la presión pero si el campo de inducción o en situaciones en las que se considere que la única fuerza importante es la fuerza de Lorentz. Se vio cualitativamente esta inestabilidad en los pinches cilíndricos.

Consideremos un caso en el que no se tenga en cuenta ni el \vec{J}_p ni la fuerza gravitatoria. Supongamos que en la configuración de equilibrio el campo de inducción tiene solo componentes ϕ y z y depende solo de r (r, ϕ, z coordenadas cilíndricas):

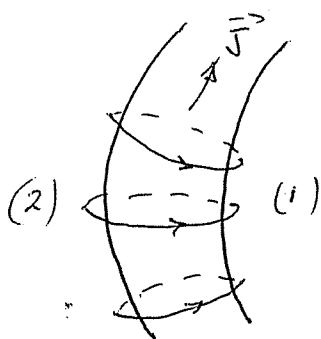
Algunas Inestabilidades

- Punto neutro tipo X - Se analizó anteriormente
- Inestabilidades de columnas de plasma con efecto pinch

Vimos al principio del curso que una columna de plasma puede confinarse con un campo magnético de origen externo, o generando una corriente eléctrica axial dentro del plasma; dijimos también que los equilibrios que se obtienen están sujetos a inestabilidades

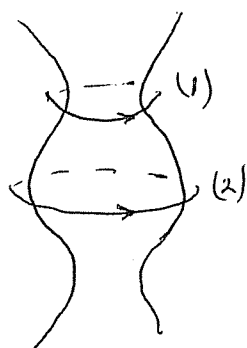
Vimos el caso en que tenemos una corriente axial J_z en el plasma y analicemos cualitativamente dos inestabilidades: la de flexión (kink) y la de garganta (sausage)

Kink: si se perturba la columna en la forma,



del lado (1) se producen valores de B mayores y por lo tanto mayor presión magnética que en (2), y esto hace crecer la inestabilidad.

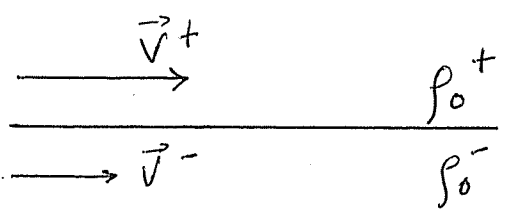
Si se perturba así
(sausage,
garganta)



En la zona del estrangulamiento (1) el campo \vec{B} es mayor y las líneas de campo tienen más curvatura que en (2), por lo que hay mayor presión magnética y tensión magnética, lo que hace crecer la inestabilidad. Esta ^(inest. de garganta) se logra estabilizar agregando un campo \vec{B} axial. Se puede mostrar que se estabiliza se $B_z^2 > B\theta^2/2$. El campo axial al curvarse produce tensión magnética que estabiliza. En cambio la inestabilidad de flexión no se puede estabilizar por agregado de campo axial porque hay perturbaciones de flexión helicoidales que siempre serán inestables

- Inestabilidad de Raleigh - Taylor magnética
El campo magnético tiene efecto estabilizante

- Inestabilidad de Kelvin - Helmholtz - Esta inestabilidad aparece cuando dos fluidos que están bajo la acción de la gravedad, el más denso abajo, se mueven uno relativo al otro horizontalmente



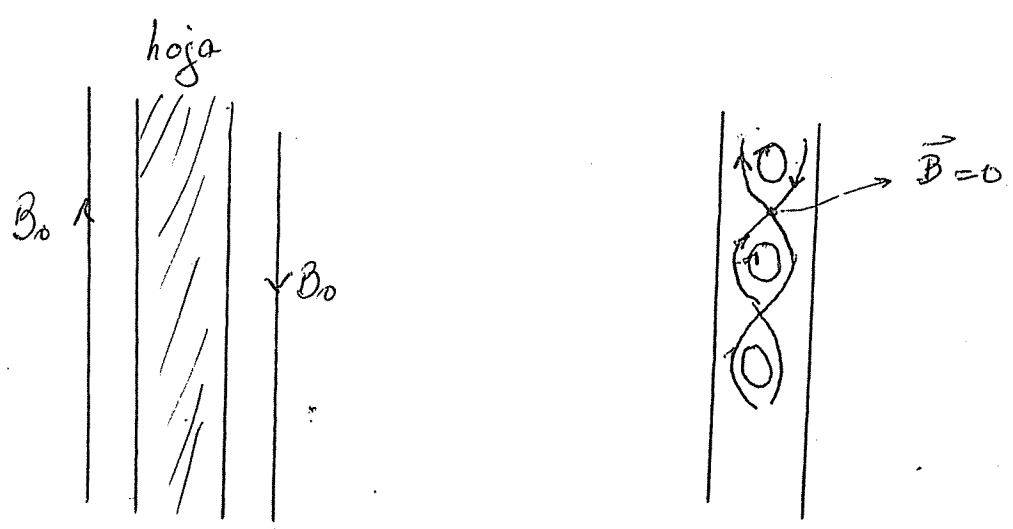
Un campo de inducción magnética es estabilizante si $\vec{B} \parallel \vec{v}$.

- Inestabilidad convectiva: esta inestabilidad aparece en presencia de un campo gravitatorio

cuando la temperatura disminuye suficientemente con la altura; aquí también, el campo magnético introduce modificaciones pudiendo tener efectos estabilizantes

- Inestabilidades resistivas

Estas inestabilidades aparecen en regiones de alta densidad de corriente, por ejemplo hojas de corriente. El modo más importante es el "tearing" (to tear: desgarrar, romper); como dentro de la hoja de corriente no hay congelamiento de las líneas de \vec{B} , estas se difunden y la inestabilidad hace que aparezcan "islas magnéticas". Es uno de los posibles orígenes del fenómeno de reconexión.



Origen de los campos magnéticos - Efecto dinamoCampos fósiles y campos generados por efecto dinamo; intensificación de campos magnéticos por colapso gravitacional

Para interpretar la presencia de campos magnéticos en astrofísica y geofísica podemos dar en líneas generales dos orígenes diferentes: campos fósiles y campos producidos por efecto dinamo.

El campo fósil es una reliquia de un campo primitivo que aún no ha sido disipado. El campo generado por efecto dinamo resulta de la amplificación de un pequeño campo magnético por conversión de energía cinética en magnética. Para poder explicar un campo magnético simplemente como un vestigio de uno antiguo es necesario que el tiempo de disipación, aproximadamente dado por $\tau = L^2 / \eta$ sea más grande que la edad del objeto en cuestión. Pero el tiempo de disipación es difícil de estimar porque:

- i) la conductividad del fluido es difícil de conocer
- ii) el porcentaje de flujo magnético realmente conservado a través de las diferentes fases de la vida del objeto es difícil de calcular
- iii) el movimiento del fluido puede distorsionar fuertemente las líneas magnéticas y provocar una disipación magnética importante por procesos de reconexión disminuyendo drásticamente el tiempo de disipación.

(2)

iv) Las edades y tamaños característicos de los objetos son frecuentemente poco conocidos.

Parte de los modelos disponibles para estrellas magnéticas Ap, enanas blancas magnéticas, pulsars, medios interestelar e intergaláctico sugieren un origen fósil para su campo magnético.

Una forma de intensificación de campos magnéticos proviene del colapso gravitacional; si se considera el campo magnético congelado durante la contracción, la intensidad del mismo aumenta de modo que el flujo magnético a través de una sección se mantenga constante.

En el caso de un cuerpo esférico de radio R que colapsa uniformemente se tendría aproximadamente

$$B_{\text{final}} \cong B_{\text{inicial}} (R_{\text{inicial}} / R_{\text{final}})^2.$$

Esta descripción es extremadamente idealizada; los colapsos pueden ser eventos muy violentos que envuelven varios fenómenos como eyección de materia o formación de ondas de choque. También pueden aparecer turbulencia y difusión "ambipolar". La difusión "ambipolar" se produce cuando el gas de iones adquiere una velocidad distinta que el gas neutro en una nube formada principalmente por átomos neutros; el campo magnético está congelado a las partículas cargadas y entonces se difunde a través del gas neutro.

Se ha propuesto que los enormes valores de los

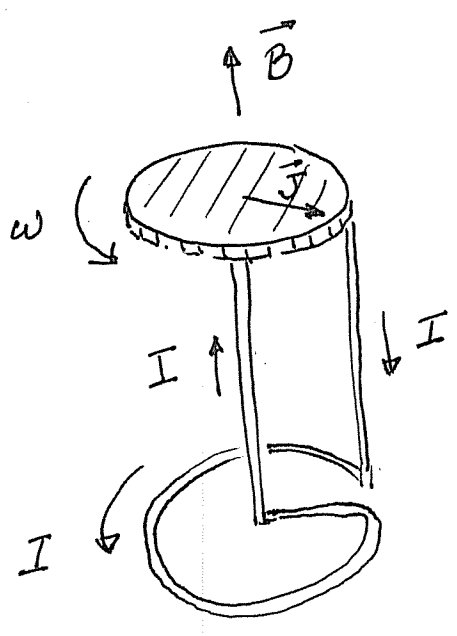
campos magnéticos en estrellas magnéticas, particularmente en enanas blancas y pulsars se han alcanzado por contracción de estrellas progenitoras mayores. Por otro lado para dar cuenta del campo interestelar de $(2-3)10^{-6} G$, es suficiente admitir que el gas difuso del cual se formó la galaxia estaba penetrado por un campo magnético de alrededor de $10^{-9} G$. De la misma forma se puede explicar la intensificación del campo magnético en nubes galácticas o intergalácticas más densas que sus alrededores. Argumentos inversos se usan para explicar una disminución de campo magnético por medio de una expansión.

En una estrella pueden coexistir un campo fósil y uno proveniente de efecto dinámico: en el núcleo radiativo el campo puede ser fósil, proveniente de la amplificación del campo de la nube progenitora y cerca de la superficie puede haber una zona turbulenta que genere un campo por efecto dinámico.

Generación de campos magnéticos por efecto dinámico

En un dinamo, a partir de un campo pequeño se produce un campo mayor transformando energía cinética en magnética. Por ejemplo, en el dinamo de discos, el disco gira en presencia de un campo \vec{B} inicial; si $\vec{\omega}$ está en el sentido de \vec{B} se produce un movimiento de los electrones hacia el centro del disco debido a la

fuerza de Lorentz, o sea una corriente eléctrica hacia el borde, que es recogida por un cepillo que está unido al resto del circuito que forma una espira antes de volver a ponerse en contacto con el eje; la corriente a través de la espira genera un campo magnético.



Se vio en los procesos de reconexión en MHD como la energía magnética se transforma en cinética (y térmica), el proceso inverso es el que ocurre en el efecto dínamo cuando un campo magnético es mantenido, a pesar de la difusión, por movimiento del fluido en un medio conductor.

La teoría de dínamo se divide en dos tipos de problema: los dínamos cinemáticos en los que el campo de velocidades se considera dado y los dínamos MHD en los que el campo de velocidades está determinado por ecuaciones de movimiento que incluyen fuerzas de origen magnético. El tratamiento cinemático es apropiado para tratar los primeros estados del problema de dínamo; pero si el dínamo es eficiente el campo magnético crece, y, debi-

do a la mayor importancia que adquiere la fuerza de Lorentz, hay que tener en cuenta su reacción sobre el movimiento. La mayoría de los estudios son sobre dinamos cinemáticos y se dedican a ver si un tipo dado de movimiento puede generar un campo magnético considerable a partir de un campo "semilla" pequeño.

El dinamo cinemático se puede considerar como un problema de autovalores. En un plasma el campo de inducción \vec{B} satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) - \vec{\nabla} \wedge (\eta \vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \\ &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{B} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\eta = \frac{1}{\mu \sigma}$$

si η es constante; en adelante supondremos $\eta = cte$ para simplificar las ecuaciones; la variación de η en sí no es importante en la generación de campo.

Para un dado campo de velocidades se buscan soluciones de (1) de la forma $B \propto e^{\gamma t}$ con apropiadas condiciones de contorno, y se hallan los autovalores γ , que en general son complejos. Un autovalor $\underline{\gamma = 0}$ corresponde a un dinamo estacionario (DC), un autovalor imaginario $\underline{\gamma = i\omega}$ a un campo periódico ondulatorio (AC); en ambos casos se tiene un dinamo neutro pues la amplitud de \vec{B} no cambia. Para valores pequeños de la velocidad \vec{v} todos los

autovalores q tienen una parte real negativa, que corresponde a un campo que decae; recordemos que con $\vec{v}=0$, la ecuación (1) se transforma en una ecuación de difusión. Se aumenta \vec{v} en parte o en todos los puntos, para ver si se puede obtener un dinamo neutro; si se lo logra, esa distribución de velocidades da mantenimiento del campo por efecto dinamo. Si se aumenta más el valor de \vec{v} se pueden obtener soluciones que indiquen un crecimiento exponencial del campo de inducción; en la práctica el campo no crece sin límite debido a la reacción del mismo en el movimiento; se entra en el dominio de los dinamos MHD.

Teorema de Cowling

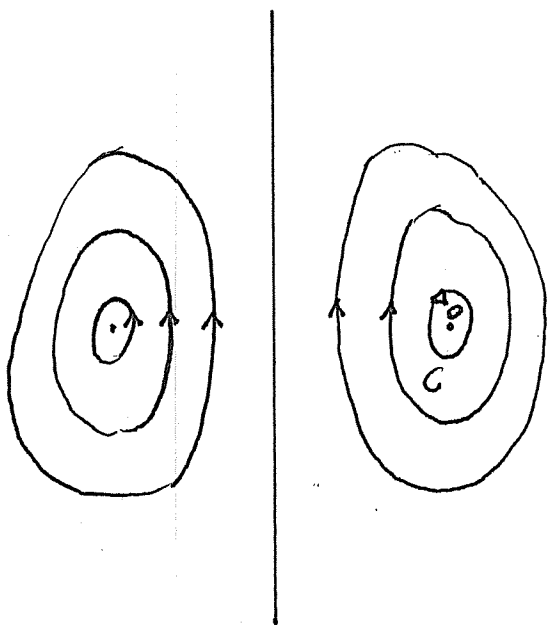
Antes de empezar a analizar los dinamos cinemáticos vamos a mencionar el Teorema de Cowling o teorema antidinamo que establece que no es posible la existencia en un plasma con conductividad finita y simetría axial de campos magnéticos estacionarios, si no hay fuentes externas al plasma. (Cowling, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 94, 39, 1934)

Dividamos el campo de inducción \vec{B} y la velocidad \vec{v} en sus partes poloidal \vec{B}_p , \vec{v}_p y toroidal (o azimutal) $B_\varphi \check{\varphi}$ y $v_\varphi \check{\varphi}$:

$$\vec{B} = \vec{B}_p + B_\varphi \check{\varphi} \quad (2)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_p + v_\varphi \check{\varphi}$$

De $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, como \vec{B} no depende de φ , resulta $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_p = 0$, y por lo tanto las líneas de \vec{B}_p serán cerradas; teniendo en cuenta la simetría azimutal, en un plano meridiano las líneas de \vec{B}_p serán del tipo



Habrá un punto, punto neutro O , en el que $\vec{B}_p = 0$ y solo habrá campo de inducción B_φ ; por el punto neutro pasa entonces una línea de \vec{B} que es circular.

Como suponemos que el problema es estacionario

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \int E \cdot dl = \int \nabla \wedge E \cdot dS = 0$$

En coordenadas cilíndricas

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right); \quad E_\varphi = 0$$

como hay simetría axial, para que se anule $(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_z$
 $(\partial E_r / \partial \varphi) = 0$ y por lo tanto

debe ser $(\nabla E)_\varphi$ independiente de r por lo que

$$E_\varphi = 0 \quad (4)$$

Luego

$$J_\varphi = \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B})_\varphi = \sigma (\vec{v}_p \wedge \vec{B}_p)_\varphi \quad (5)$$

Como $\vec{B}_p = 0$ en O , también $J_\varphi = 0$ en O y va creciendo a medida que crece B_p al alejarse del punto neutro. Sea C una línea de \vec{B}_p cercana a O ; se tiene

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_A (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu \iint_A J_\varphi dA ; \quad (6)$$

llamando s a la longitud de C , S al área de A , \overline{B}_p al valor medio de B_p sobre C y v_0 al valor máximo de $|\vec{v}|$ dentro de C se cumple

$$\overline{B}_p s < \mu v_0 \overline{B}_p S \quad (7)$$

donde hemos usado (5); la desigualdad proviene de que se toma el valor máximo de $|\vec{v}|$ y de que B_p dentro de C es menor que sobre C , ya que B_p se anula en O . Pero si S es finito se entra en una contradicción pues para curvas muy cercanas a O la desigualdad (7) no se puede seguir cumpliendo

ya que S disminuye más rápidamente que s al acercar C a O . Luego no se puede tener un campo magnético axialmente simétrico estacionario en un plasma. La corriente generada por $\vec{v} \times \vec{B}$ no alcanza para mantener el campo.

Esto se puede ver mejor analizando la ecuación de inducción en el caso axialmente simétrico. Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_p = 0$ podemos poner

$$\vec{B}_p = \vec{\nabla} \wedge (A_p \hat{\phi}) \quad ; \quad (8)$$

separando en componente azimutal y poloidal la ecuación de inducción, y eliminando el rotor en esta última, en coordenadas cilíndricas se tiene (Deducción al final del capítulo)

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\phi}{\partial t} + B_\phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_p) + r(\vec{v}_p \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{B_\phi}{r} \right) = \\ = r(\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \eta (\nabla^2 - r^{-2}) B_\phi \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} + \frac{\vec{v}_p}{r} \cdot \vec{\nabla} (r A_p) = \eta (\nabla^2 - r^{-2}) A_p \quad (10)$$

donde la componente ϕ de un gradiente que habría que agregar en (10) se anula debido a la simetría axial. Los términos $\eta (\nabla^2 - r^{-2}) B_\phi$ y $\eta (\nabla^2 - r^{-2}) A_p$ son difusivos y tienden a disminuir el campo; mientras que de la ecuación

(9) vemos que un campo poloidal \vec{B}_p puede producir campo azimutal si hay una adecuada variación de la velocidad angular (v_ϕ/r) o sea una rotación diferencial, de la ecuación (10) vemos que no hay generación de campo poloidal a partir de uno azimutal, con lo que A_p decae y por lo tanto \vec{B}_p y con él B_ϕ .

El teorema de Cowling llevó a temer que ningún dinamo podría trabajar, pero 25 años después se mostró rigurosamente el funcionamiento de un dinamo cinemático y a partir de allí han aparecido muchos modelos - El teorema de Cowling vale para simetría axial total y estacionariedad. Pequeños apartamientos de la simetría pueden permitir trabajar a un dinamo, pero con dificultad. Otra posibilidad es tener en cuenta la no estacionariedad, como en la Electrodinámica de campo medio, que veremos enseguida.

Electrodinámica de campo medio (MFE)

Los movimientos en objetos astronómicos no son estacionarios; generalmente el problema de dinamo en astrofísica es el del mantenimiento de un campo magnético por movimientos que son estacionarios a lo sumo en un sentido estadístico, en cuerpo en rotación; el campo tiene simetría general de rotación alrededor de un eje pero hay considerables apartamientos

de esa simetría; puede ser estadísticamente estacionario sobre largos períodos (Tierra), o mostrar variaciones cíclicas (Sol). La MFE se basa en una idea de Parker (Astroph. J. 122, 293, 1955) y le dieron base formal Steenbeck, Krause y Rädler (Naturforsch. 1966, 21a, 369) y otros. La MFE expresa la velocidad \vec{v} y el campo \vec{B} , como suma de sus partes medias, lentamente variables \vec{v}_0 y \vec{B}_0 , y partes fluctuantes \vec{v}' y \vec{B}' . Supondremos además $\vec{v}_0 = 0$; después se verá que términos hay que agregar a las ecuaciones si $\vec{v}_0 \neq 0$. La escala de longitudes para la variación de \vec{B}_0 es L , y para \vec{v}' y \vec{B}' es $l \ll L$. El tiempo de correlación del movimiento turbulento, o sea el tiempo medio después del cual \vec{v}' deja de estar relacionado con su valor inicial, es τ . Indicaremos con una barra el promedio espacial en una escala intermedia entre l y L ; se tendrá $\overline{\vec{v}'} = 0$ y $\overline{\vec{B}'} = 0$. De la ecuación de inducción (1), poniendo $\vec{v} = \vec{v}'$ y $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$ se tiene

$$\frac{\partial(\vec{B}_0 + \vec{B}')}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge [\vec{v}' \wedge \vec{B}_0] + \vec{\nabla} \wedge [\vec{v}' \wedge \vec{B}'] + \eta \nabla^2 \vec{B}_0 + \eta \nabla^2 \vec{B}' \quad (11)$$

Promediando se obtienen dos ecuaciones:

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge [\overline{\vec{v}' \wedge \vec{B}'}] + \eta \nabla^2 \vec{B}_0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge [\vec{v}' \wedge \vec{B}_0 + \overline{\vec{v}' \wedge \vec{B}'} - \vec{v}' \wedge \vec{B}'] + \eta \nabla^2 \vec{B}' \quad (13)$$

Para simplificar un poco estas ecuaciones se hace una aproximación "cuasi-lineal" o "aliviamiento" de primer orden que consiste en anular

$$\vec{v}' \wedge \vec{B}' = \overline{\vec{v}' \wedge \vec{B}'} \quad ; \quad (14)$$

esta aproximación se puede justificar si $B' \ll B_0$ ya que sería despreciar el 2º y 3º términos del 2º miembro de (13) frente al 1º; para que $B' \ll B_0$ debemos estar en uno de los siguientes casos:

1) El número ^{de Reynolds,} magnético de la turbulencia es mucho menor que 1: $R_m \ll 1$, con $R_m = v l / \eta$ siendo $v^2 = \overline{v'^2}$; en este caso puede resultar $\partial \vec{B}' / \partial t$ pequeños (por balance entre los términos $\nabla \wedge [\vec{v}' \wedge \vec{B}_0]$ y $\eta \nabla^2 \vec{B}'$ en (13)).

2) Las fluctuaciones son rápidas: $\tau \ll l/v$; (en este caso ^{aunque R_m no sea $\ll 1$,} $\nabla \wedge [\vec{v}' \wedge \vec{B}_0]$ se balancea con $\partial \vec{B}' / \partial t$); el valor de $\partial \vec{B}' / \partial t$ puede ser grande sin serlo \vec{B}' .

De estos dos casos el primero se puede aplicar a la tierra, pero ninguno al sol, para el cual $R_m \gg 1$ y $\tau \approx l/v$.

Si se introduce el aliviamiento de 1º orden (ec (14)), la ecuación (13) queda

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} - \eta \nabla^2 \vec{B}' = \nabla \wedge (\vec{v}' \wedge \vec{B}_0) \quad (15)$$

A partir de esta ecuación debemos obtener una expresión para \vec{B}' y con ella una para $\overline{\vec{v}' \wedge \vec{B}'}$ para reemplazarla en (12) y obtener \vec{B}_0 que es el campo que nos interesa. Teniendo en cuenta que $\nabla \wedge (\vec{v}' \wedge \vec{B}_0)$ es proporcional a las componentes ^{cartesianas} B_{0i} y a las derivadas $\partial B_{0i} / \partial x_j$ con factores que dependen de \vec{v}' , y que durante el tiempo de correlación \vec{B}_0 se puede considerar constante, resulta ^{(de (15))} que \vec{B}' también será proporcional a B_{0i} y $\partial B_{0i} / \partial x_j$ y lo mismo es válido para $\overline{\vec{v}' \wedge \vec{B}'}$:

$$\left(\overline{\vec{v}' \wedge \vec{B}'} \right)_i = \alpha_{ij} B_{0j} + \beta_{ijk} \frac{\partial B_{0j}}{\partial x_k} \quad (16)$$

Si el campo de velocidades de la turbulencia es isotrópico, entonces $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ y $\beta_{ijk} = \beta \epsilon_{ijk}$ y podemos poner

$$\overline{\vec{v}' \wedge \vec{B}'} = \alpha \vec{B}_0 - \beta \nabla \wedge \vec{B}_0 \quad (17)$$

Llamando

$$\zeta_c = \left(\zeta^{-1} + \zeta_d^{-1} \right)^{-1} \quad (18)$$

donde $\zeta_d = l^2 / \eta$ es el tiempo de decaimiento de \vec{B}' en un remolino, ^{usando (15)} se puede mostrar que

$$\alpha = -\frac{1}{3} \zeta_c \overline{(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{v}')}$$

(19)

$$\beta = \frac{1}{3} \zeta_c v^2$$

La cantidad $\vec{v}' \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{v}'$ representa la componente de la vorticidad a lo largo de la velocidad y se llama helicidad de \vec{v}' ; una helicidad media no nula indica que las burbujas de plasma tienden a rotar predominantemente en el sentido de las agujas del reloj (o en el contrario) respecto a la dirección de la velocidad.

Reemplazando (17) en (12) se obtiene una ecuación para el campo medio \vec{B}_0

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\alpha \vec{B}_0) + (\eta + \beta) \nabla^2 \vec{B}_0 \quad (20)$$

Vemos que el efecto de la turbulencia es agregar una "fuerza electromotriz" $\alpha \vec{B}_0$ y aumentar la difusión de larga escala a través de $\beta \nabla^2 \vec{B}_0$. De ahora en adelante sacaremos el subíndice 0. El término $\alpha \vec{B}$ es el que permite escapar del teorema antidinámico: si el campo \vec{B} es de simetría axial, las ecuaciones para B_φ y A_p quedan

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \left[\vec{\nabla} \wedge (\alpha \vec{B}_p) \right]_\varphi + (\eta + \beta) (\nabla^2 - r^{-2}) B_\varphi \quad (21)$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} = \alpha B_\varphi + (\eta + \beta) (\nabla^2 - r^{-2}) A_p \quad (22)$$

Comparemos estas ecuaciones con la (9) y (10) que se tenían para un campo axialmente simétrico sin movimientos turbulentos y haciendo $\vec{v} = 0$ en estas últimas (recordemos que tomamos $\vec{v}_0 = 0$); se ve que en la ecuación (22) para la componente poloidal aparece el término αB_φ que permite crear un campo poloidal a partir de uno azimutal lo que antes, con movimientos no turbulentos, no se podía hacer. Esto se conoce como efecto α . Este efecto también influye en la formación de campo azimutal a través del término $[\vec{\nabla} \wedge (\alpha \vec{B}_p)]_\varphi$ en la ecuación (21).

Vimos que se tiene $\alpha \neq 0$ en movimientos turbulentos con helicidad media distinta de cero. En su sugerencia original Parker razonó que una burbuja de plasma que sube y se expande tiende a rotar debido a la fuerza de Coriolis; si lleva tubos de flujo con ella, la rotación convierte un campo azimutal en uno poloidal.

Si la velocidad media es distinta de cero, las ecuaciones (21) y (22) se transforman en

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} + B_\varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_p) + r (\vec{v}_p \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{B_\varphi}{r} \right) = r (\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + [\vec{\nabla} \wedge (\alpha \vec{B}_p)]_\varphi + (\eta + \beta) (\nabla^2 - r^{-2}) B_\varphi \tag{23}$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} + \frac{\vec{v}_p \cdot \vec{\nabla}}{r} (r A_p) = \alpha B_\varphi + (\eta + \beta) (\nabla^2 - r^{-2}) A_p \tag{24}$$

La generación de un campo azimutal a partir de

uno poloidal puede provenir de un término que depende de α y de otro que está si hay rotación diferencial. De los dos términos fuente, el que proviene de rotación no uniforme es en muchos casos más grande que el término en α . Hay evidencia de rotación diferencial en el núcleo de la tierra y también en el sol y en la galaxia. Para el sol $\partial\omega/\partial\theta \neq 0$: las zonas ecuatoriales rotan más rápidamente que las polares; el signo de $\partial\omega/\partial r$ está discutido; si se tiene en cuenta que las manchas solares rotan más rápidamente que el plasma fotosférico y que están posiblemente ancladas en el interior se concluye que $\partial\omega/\partial r < 0$; pero según otras consideraciones sería $\partial\omega/\partial r > 0$. En la mayoría de los modelos de dinamo aplicados al sol, para obtener cierta similitud con el campo magnético del sol es necesario que $\partial\omega/\partial r < 0$.

Un modelo de dinamo en que se desprece α frente a $\vec{\tau}\omega$ en (23), pero manteniendo αB_{ϕ} en (24), se llama dinamo $\alpha-\omega$; una en que se desprece $\vec{\tau}\omega$ frente al término α en (23) se llama dinamo α^2 . En problemas cósmicos es razonable confinar la atención a dinamos $\alpha-\omega$; los dinamos α^2 también pueden mantener un campo magnético, pero éste tiende a ser estacionario más que oscilatorio y tienen por lo tanto más importancia para el dinamo terrestre.

Ondas de dínamo

Las ecuaciones para un dínamo cinemático que se obtienen en la MFE son más simples en coordenadas cartesianas. Esto se puede aplicar al sol únicamente en el límite de una capa esférica muy fina. Parker puso el eje z normal a la superficie, el eje y hacia el este y el x hacia el sur. Se puso invariancia en y y una velocidad $v = v_y(z) \hat{y}$. El campo de inducción se puede poner $(A \Rightarrow A_y)$

$$\vec{B} = \left[-\frac{\partial A}{\partial z}, B_y, \frac{\partial A}{\partial x} \right] \quad (25)$$

Las ecuaciones para un dínamo α - ω , (cf. (23) y (24)) en cartesianas son

$$\frac{\alpha = \omega}{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) B_y = \frac{dv_y}{dz} \frac{\partial A}{\partial x}} \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) A = \alpha B_y \quad (27)$$

Si dv_y/dz es uniforme, estas ecuaciones tienen solución de onda plana. Si proponemos

$$B_y = B_0 \exp[\gamma t + i(k_x x + k_z z)] \quad (28)$$

y reemplazamos en el sistema de ecuaciones se tiene

$$(q + \eta k^2) B_y = \frac{dv_y}{dz} i k_x A$$

$$(q + \eta k^2) A = \alpha B_y$$

de donde

$$(q + \eta k^2)^2 = \alpha \frac{dv_y}{dz} i k_x$$

o sea

$$q = -\eta k^2 \pm (1+i) \sqrt{\frac{\alpha k_x}{2} \frac{dv_y}{dz}} \quad (29)$$

Si el "número de dinámica"

$$N_D = \frac{\alpha k_x}{2 \eta^2 k^4} \frac{dv_y}{dz} \quad (30)$$

es tal que $|N_D| > 1$, entonces hay una solución con $\text{Re} q > 0$ lo que significa que el efecto α , combinado con el $\frac{dv_y}{dz}$, supera la disipación y hay generación de campo por efecto dinámico, con soluciones crecientes en forma de ondas de dinámica migratorias; si $N_D/k_x > 0$ viajan hacia el norte (x negativo) y si $N_D/k_x < 0$ viajan hacia el sur (x positivo).

Para el sol α cambia su signo en el ecuador ($\alpha > 0$ en el hemisferio Norte y $\alpha < 0$ en el hemisferio Sur) y las ondas se acercan o alejan del ecuador según el signo de dv_y/dz . En particular las ondas migran hacia

el ecuador como las manchas solares si la velocidad aumenta con la profundidad ($dv_y/dz < 0$)

Referencias

E. R. Priest : "Solar Magnetohydrodynamics"
Cap. 9.

T. G. Cowling - "The present status of dynamo theory". Annual Rev. of Astron. and Astroph. (1981) 19, 115.

E. Asseo and H. Sol - "Extragalactic magnetic fields" Phys. Reports (1987) 148, N° 6, 307. Sec. 3.3.

Reducción de las ecuaciones (9) y (10) del cap X (dínamo) ⁽¹⁾

En coord. cilíndricas $\vec{B}_p = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$

Dado que hay simetría azimutal, $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{z}$$

Luego

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})]_\phi &= \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \wedge B)_r - \frac{\partial}{\partial r} (\vec{\nabla} \wedge B)_z = -\frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \right] \\ &= -\frac{\partial^2 B_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \left[B_\phi + r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[B_\phi + r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} \right] \\ &= -\nabla^2 B_\phi + \frac{B_\phi}{r^2} = -(\nabla^2 - r^{-2}) B_\phi \quad (1) \end{aligned}$$

si $\vec{B}_p = \vec{\nabla} \wedge (A_p \hat{\phi})$

$$[\vec{\nabla} \wedge \vec{B}]_\phi = (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_p)_\phi = [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (A_p \hat{\phi}))]_\phi = -[\nabla^2 - r^{-2}] A_p \quad (2)$$

La componente ϕ de la ecuación de inducción es

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})]_\phi - \eta [\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})]_\phi \quad (3)$$

Usando la relación vectorial

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla}_\perp (\vec{v}_\perp \wedge \vec{B}) \right]_\varphi &= \left[\left(\vec{B}_p + \vec{\nabla} + \frac{1}{r} B_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (v_r \check{r} + v_\varphi \check{\varphi}) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\vec{v}_p \cdot \vec{\nabla} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (B_r \check{r} + B_\varphi \check{\varphi}) \right]_\varphi - B_\varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

donde se pusieron los términos que pueden dar componente $\check{\varphi}$, ya que $\frac{\partial \check{r}}{\partial \varphi} = \check{\varphi}$; $\frac{\partial \check{\varphi}}{\partial \varphi} = -\check{r}$

$$\begin{aligned} \left[\vec{\nabla}_\perp (\vec{v}_\perp \wedge \vec{B}) \right]_\varphi &= \underbrace{(\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla})}_{(1)} v_\varphi + \frac{1}{r} \cdot \underbrace{B_\varphi v_r}_{(2)} - \underbrace{(\vec{v}_p \cdot \vec{\nabla})}_{(2)} B_\varphi - \underbrace{\frac{v_\varphi B_r}{r}}_{(1)} \\ &\quad - B_\varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_p) \\ &= \underbrace{r (\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla})}_{(1)} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) - \underbrace{r (\vec{v}_p \cdot \vec{\nabla})}_{(2)} \left(\frac{B_\varphi}{r} \right) - B_\varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_p) \quad (4) \end{aligned}$$

Reemplazando (1) y (4) en (3) queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= r (\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) - r (\vec{v}_p \cdot \vec{\nabla}) \left(\frac{B_\varphi}{r} \right) - B_\varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_p) + \\ &\quad + \eta (\nabla^2 - r^{-2}) B_\varphi \quad (\text{ec. (9) del cap X}) \end{aligned}$$

La ~~componente~~ ^{parte} poloidal de la ecuación de inducción es

$$\frac{\partial \vec{B}_p}{\partial t} = \left[\vec{\nabla}_\perp (\vec{v}_\perp \wedge \vec{B}) \right]_p - \left[\vec{\nabla}_\perp (\eta \vec{\nabla}_\perp \vec{B}) \right]_p$$

Debido a la simetría azimutal

$$[\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{B})]_{\phi} = \vec{\nabla} \wedge [(\vec{v} \wedge \vec{B})_{\phi} \check{\psi}]$$

$$\oint [\vec{\nabla} \wedge (\eta \vec{\nabla} \wedge \vec{B})]_{\phi} = \vec{\nabla} \wedge [\eta (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})_{\phi} \check{\psi}]$$

Luego la ~~parte~~ poloidal de la ec. de induc queda

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial A_p}{\partial t} \check{\psi} \right) = \vec{\nabla} \wedge [(\vec{v} \wedge \vec{B})_{\phi} \check{\psi}] - \vec{\nabla} \wedge [\eta (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})_{\phi} \check{\psi}] ;$$

vectores que tienen igual rotor difieren en un gradiente que en este caso sería en ϕ , pero que se anula pues $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$

Luego

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} = (\vec{v} \wedge \vec{B})_{\phi} - \eta (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})_{\phi} \tag{5}$$

$$(\vec{v} \wedge \vec{B})_{\phi} = [\vec{v}_p \wedge (\vec{\nabla} \wedge (A_p \check{\psi}))]_{\phi} = \vec{v}_p \wedge (A_p \vec{\nabla} \wedge \check{\psi} + \vec{\nabla} A_p \wedge \check{\psi})$$

Como $\vec{\nabla} \wedge \check{\psi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot 1) \check{z} = \frac{1}{r} \check{z}$

$$[\vec{v} \wedge \vec{B}]_{\phi} = \left[\frac{A_p}{r} \vec{v}_p \wedge \check{z} + \vec{\nabla} A_p \cdot \check{\psi} - \check{\psi} (\vec{v}_p \cdot \vec{\nabla} A_p) \right]_{\phi} = -\frac{\vec{v}_p}{r} \cdot \vec{\nabla} (A_p r) \tag{6}$$

Reemplazando (2) y (6) en (5), la ~~parte~~ poloidal de la ec. de induc queda

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} = -\frac{\vec{v}_p}{r} \cdot \vec{\nabla} (r A_p) + \eta (\nabla^2 - r^{-2}) A_p \text{ (ec. (10) del cap X)}$$