Introducción a la Astrofísica Relativista 2020

Práctica 4: ecuación de transporte

1. Consideremos la siguiente versión sencilla de la ecuación de transporte en estado estacionario,
$$\frac{d}{dE}\left[b(E)N(E)\right] + \frac{N(E)}{T_{\rm esc}} = Q(E). \tag{1}$$
Aquí $N(E)$ es el número de partículas con energía en el intervalo $(E, E + dE)$, $b(E) = dE/dt$ es la tasa total de pérdida de energía, y $T_{\rm esc}$ es el tiempo típico de escape de las partículas de la región. La función inyección es una ley de potencias, $Q(E) = Q_0\ E^{-\alpha}$ con $\alpha > 1$. Supondremos que el tiempo de escape es independiente de la energía y que $b(E) \propto E^p$ (¿a qué mecanismos de enfriamiento podría corresponder?).

   a) ¿Cuál es la forma funcional de $N(E)$ en el rango de energías donde domina el enfriamiento? ¿Y donde domina el escape? ¿Cómo se podría estimar la energía de transición entre los dos regímenes?

   b) La solución analítica de la Ec. 1 es
$$N(E) = \frac{1}{|b(E)|}\int_E^{E_{\rm max}} dE'\, Q(E')\ \exp\left(-\frac{\tau(E,E')}{T_{\rm esc}}\right) \tag{2}$$
   donde
$$\tau(E,E') = \int_E^{E'} dE''\, \frac{1}{|b(E'')|}. \tag{3}$$
   Calcular numéricamente $N(E)$ para una distribución de electrones con energías entre $E_{\rm min} = 2m_ec^2$ y $E_{\rm max} = 10$ TeV, y comprobar las estimaciones del ítem anterior. Adoptar $\alpha = 2$, $T_{\rm esc} = 0.1$ s y $L_{\rm iny} = 10^{36}$ erg s^{-1} para la potencia de inyección. Considerar únicamente pérdidas por radiación sincrotrón en un campo magnético $B = 10^4$ G.

2. *a*) Explique brevemente qué es el proceso de difusión, en qué se diferencia de la convección y cómo se puede estimar el tiempo de difusión de una partícula.

   b) Supongamos que en un instante t_0 dos partículas de energía E_1 y E_2 comienzan a difundir desde un origen común. Al cabo de un intervalo de tiempo Δt, ¿qué distancia se espera que haya recorrido cada partícula con respecto al origen? Si las energías son $E_2 = 100\, E_1$ y el coeficiente de difusión es $D(E) = D_0E^\delta$, con $\delta = 1/3$, ¿cómo se relacionan los radios de difusión (i.e., la distancia recorrida) R_1 y R_2?

c) Supongamos que en una fuente astrofísica se inyecta una distribución de electrones de la forma $Q(E) \propto E^{-p}$, y que las partículas en ese medio difunden con un coeficiente de difusión como el del inciso anterior. ¿Cuál es la forma funcional de la distribución de partículas $N(E)$? El espectro de partículas resultante, ¿es más "suave" o más "duro" que el original?

3. En la superficie de estrellas de tipo solar pueden ocurrir eventos violentos de reconexión magnética conocidos como *flares* (fulguraciones), que implican una conversión súbita de energía magnética que es transferida a las partículas de la atmósfera estelar. La inyección de partículas (electrones) en función del tiempo y de su energía puede modelarse como $Q(E,t) = KE^{-p}\delta(t)$ para energías de electrones entre 1 MeV y 100 GeV, donde $p = 2.3$ y se fijó el instante del evento de reconexión en $t = 0$. Obtener y graficar la distribución de electrones $N(E,t)$ para $t = 10^2$ s, $t = 10^4$ s y $t = 10^6$ s. Suponer que la energía total en partículas no térmicas en el instante inicial es $E_{NT} = \int E\, N(E, t = 0)\, dE = 10^{30}$ erg y que los electrones se enfrían por radiación sincrotrón en un campo magnético ambiente de 10 G.

4. Durante una explosión de supernova se libera una gran cantidad de energía en forma de neutrinos.

   a) Calcular el camino libre medio para neutrinos de energía 25 MeV durante el colapso que precede a una supernova de tipo II si la densidad del medio es $\rho = 10^{14}$ g cm^{-3}. Para neutrinos con energía $E_\nu \gg m_e c^2$, la sección eficaz para el scattering elástico $\nu + e^- \to \nu + e^-$ puede aproximarse como

   $$\sigma_{\nu e} \approx C_X\, 9.5 \times 10^{-45} \left(\frac{E_\nu}{\text{MeV}}\right) \text{cm}^2, \tag{4}$$

   donde C_X depende del sabor del neutrino y vale $C_e = 1$ para ν_e .

   b) ¿Pueden estos neutrinos escapar libremente de la estrella? Estimar el tiempo de escape.

   c) El experimento Kamiokande, en Japón, consistía en un enorme tanque lleno de agua para detectar neutrinos solares. Los neutrinos sufren dispersiones elásticas con los electrones en el agua, y lo que se detecta es la emisión Cherenkov de los electrones dispersados. Para que la detección sea posible, los electrones tienen que adquirir una energía de ~ 5 MeV, lo que corresponde a un umbral de detección de $E_\nu \sim 10$ MeV para los neutrinos. En estas condiciones, la sección eficaz vale $\sim 10\,\%$ de la dada en la Ec. 4, mientras que el flujo de neutrinos solares esperado es $\phi_\nu \approx 6.5 \times 10^6$ cm^{-2} s^{-1}. ¿Cuál es la masa mínima de agua necesaria para detectar un neutrino por día?