Introducción a la Astrofísica Relativista

Integración con paso logarítmico

Contexto: La mayoría de los problemas astrofísicos no tienen soluciones que puedan hallarse de manera analítica, motivo por el cual recurrimos a cálculos numéricos. Dichos cálculos pueden tener diferentes grados de dificultad dependiendo de la geometrıía de nuestros sistemas, de la linealidad de la ecuaciones, etc. En particular, en muchos problemas astrofísicos es necesario resolver integrales numéricas en las que el dominio de intergración de la variable recorre muchos órdenes de magnitud.

Métodos numéricos: Supongamos que queremos resolver numéricamente una integral por el método de rectángulos, esto es

$$S = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} f(E)dE \approx \sum_{i=1}^{N} f(E_i)\Delta E_i \tag{1}$$

donde $E_1 = E_{\min}$ y $E_N = E_{\max}$. La pregunta ahora es: ¿cómo elegir los valores E_i?

- Una propuesta común consiste en utilizar un paso constante, $\Delta E_i = E_i - E_{i-1} = h$, de modo que

  $$h = \frac{E_N - E_1}{N-1}, \qquad S \approx \sum_{i=1}^{N} f(E_i)\, h, \tag{2}$$

  con $E_i = E_{i-1} + h$. Nos referiremos a este h como un paso *lineal*. Notar que cuanto más chico sea h, mayor resolución se tendrá. No obstante, veremos que este paso tiene una enorme desventaja en nuestros contextos.

- Otra posibilidad es tomar un paso que sea constante en escala logarítmica, es decir, que cumpla: $\Delta \log(E_i) = \log(E_i) - \log(E_{i-1}) = \log(h)$. Esto implica que $E_{i+1} = h\,E_i$, y por lo tanto $\Delta E = E_{i+1} - E_i = h\,E_i - E_i = E_i\,(h-1)$. Por otro lado, h puede obtenerse de la condición

  $$\log(h) = \frac{\log(E_{\max}) - \log(E_{\min})}{(N-1)} \tag{3}$$

  Despejando y reemplazando en la Ec. 1 obtenemos

  $$h = \left[\frac{E_{\max}}{E_{\min}}\right]^{1/(N-1)}, \qquad S \approx \sum_{i=1}^{N} f(E_i)\, E_i\,(h-1), \tag{4}$$

  Notar que en este caso el paso $\Delta E_i = E_i\,(h-1)$ no es fijo, sino que es un paso variable[1] que crece con E_i. Nos referiremos a este como un paso *logarítmico*. Notar que $h > 1$; cuanto más chico (cercano a 1) sea h, mayor resolución se tendrá.

[1]Por este motivo métodos de integración como el de Simpson no son válidos y nos limitamos al uso del método de los rectángulos

Muestreo: En la Fig. 1 ilustramos las diferencias entre los distintos pasos y cómo muestrean la función $E^{-1.1}$ en el intervalo $[1, 10^4]$. Notar que el paso lineal sub-muestrea a bajas energías (donde la contribución a la integral puede ser muy importante) y sobre-muestrea a altas energías. Para compensar esto, si el paso avanza linealmente debemos utilizar una mayor cantidad de puntos para mejorar la precisión de la integral, lo que implica un tiempo de cómputo mucho mayor. Por este motivo **no** utilizaremos un paso lineal.

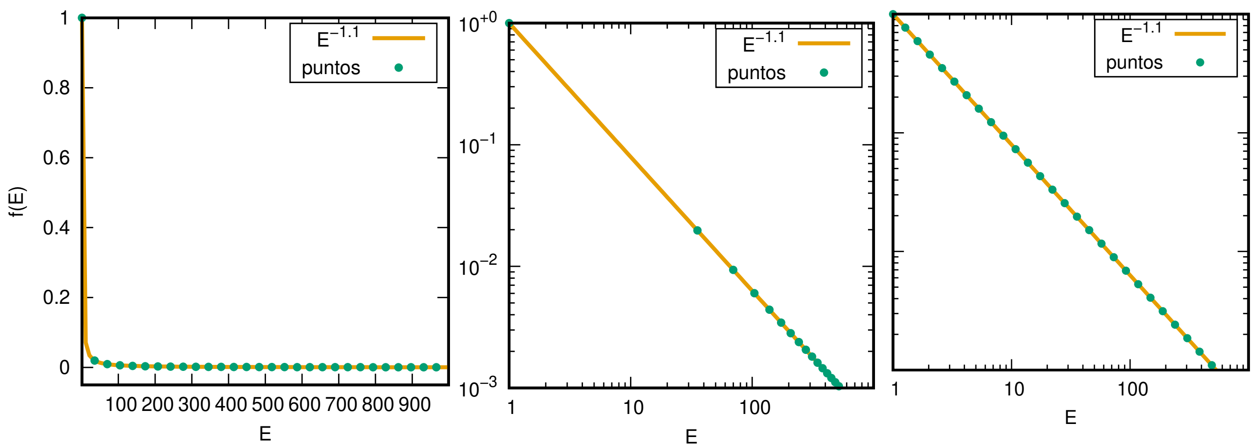

Figura 1: Izquierda: paso lineal en escala lineal. Centro: paso lineal en escala logarítmica. Derecha: paso logarítmico en escala logarítmica.

Ejercicio: Resuelva la integral

$$S = \int_1^{10^4} E^{-1.1} dE \tag{5}$$

utilizando los dos métodos vistos. Utilice $N = 30$ y $N = 100$ puntos. Discuta los resultados obtenidos.

Código numérico: Para programar la resolución de una integral como la de la Ec. 4 pueden guiarse con el siguiente código:

```
h = (Emax/Emin)**(1.d0/(N-1))
E = Emin
integral = 0.d0
DO i = 1,N
    arg = f(E)
    dE = E*(h-1.d0)
    integral = integral + arg*dE
    E = E*h
END DO
```