DIFUSIÓN

DIFUSIÓN

Cuando una distribución de partículas $N = N(E, \vec{r}, t)$

es inyectada en una región del espacio donde hay campos magnéticos, campos de radiación y campos de materia, las partículas sufrirán diversos tipos de pérdidas modificando su distribución.

Las partículas, además, se difundirán en el medio con una cierta escala temporal típica dada por:

$$\tau_0 \approx \frac{R^2}{D}$$

- R Distancia que recorre
- $D = D(E, \vec{r})$ Coeficiente de difusión

$$D = \frac{1}{3} \lambda v$$

- λ Camino libre medio de las partículas (depende de las características del medio)
- $v \cong c$

$$[D] = \mathrm{cm}^2\,\mathrm{s}^{-1}$$

DIFUSIÓN

Estudiando la composición química de los rayos cósmicos es posible hacer inferencias sobre el valor medio del coeficiente de difusión en la Galaxia (Guinzburg & Syrovatskii 1964):

$$D \approx 0.5 - 1 \times 10^{29}\ \mathrm{cm^2\,s^{-1}}$$

Estudios más recientes (Berezinskii et al. 1990) indican:

$$D(10^9 - 10^{10}\ \mathrm{eV}) \approx 10^{28} - 10^{29}\ \mathrm{cm^2\,s^{-1}}$$
$$D(10^{12} - 10^{13}\ \mathrm{eV}) \approx 10^{29} - 10^{30}\ \mathrm{cm^2\,s^{-1}}$$

Dependencia del coeficiente de difusión con la *energía*

Se difunden más rápido los más energéticos

Si el medio es uniforme → $D = D(E)$

En general, se supone que esta relación viene dada por una ley de potencias

$$D(E) = D_0\, E^{\mu}$$

DIFUSIÓN

La evolución de una población de partículas relativistas está determinada por la ecuación de difusión, cuya forma más general es:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} - D\nabla^2 n + \frac{\partial}{\partial E}[bn] + \frac{n}{T} = Q$$

Mide pérdidas de partículas por difusión espacial.

Donde:

$n = n(E, \vec{r}, t)$

$D = D(E)$

$b = b(E) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$

$T = T(E)$

$Q = Q(E, \vec{r}, t)$

Describe la difusión espacial de partículas con coeficiente de difusión *D:* El transporte difusivo es multidireccional.

- Razón de pérdida de energía de las partículas debida a los distintos procesos involucrados
- Escala temporal de escape de las partículas
- Inyección de partículas nuevas con energías E en $\vec{r}$ al instante t → Término "fuente".

Ecuación diferencial de derivadas parciales de tipo inhomogéneo.
Puede resolverse utilizando el método de la función de Green.

ECUACION DE DIFUSIÓN EN DOS DIMENSIONES

Antes de discutir la solución general de la ecuación de difusión, presentamos una deducción sencilla de la ecuación en dos dimensiones.

Las **pérdidas radiativas** sufridas por las partículas relativistas *modifican su espectro*.

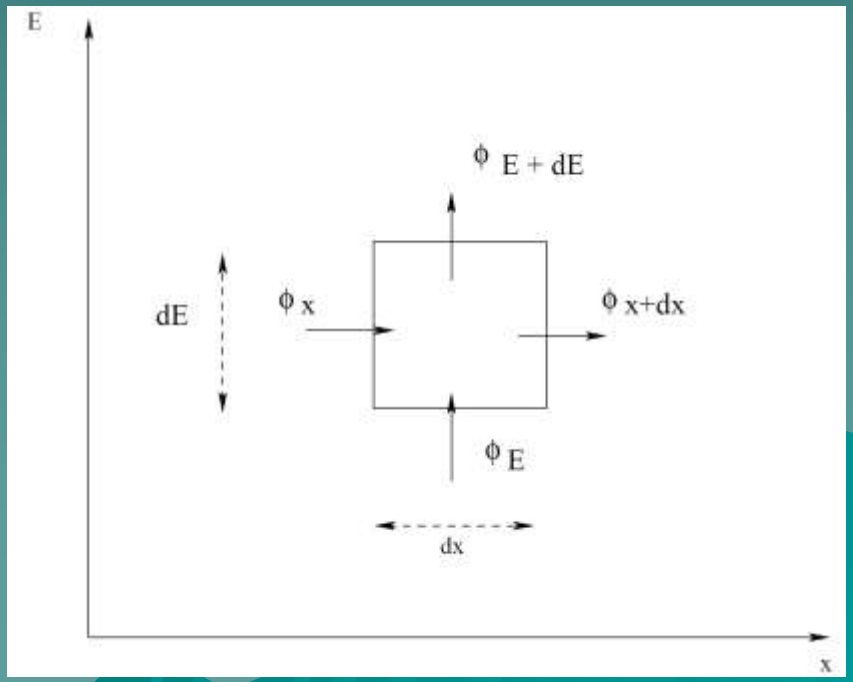
Para establecer cómo:
Se considera un espacio de 2 dimensiones

- **Una dimensión espacial**
  (se adopta el eje de las abcisas)
- **Energía**
  (se adopta el eje de las ordenadas)

ϕ **Flujo de partículas** a través de superficies en este espacio.

Las partículas se mueven en la dirección:

- **x: por difusión espacial**
- **y: por ganancia o pérdida de energía**



Ecuación de difusión en dos dimensiones (cont.)

Número de partículas
entre x y $x+\mathrm{d}x$ con energías entre E y $E+\mathrm{d}E$ ➡ $dN = n(E,x,t)\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}x$

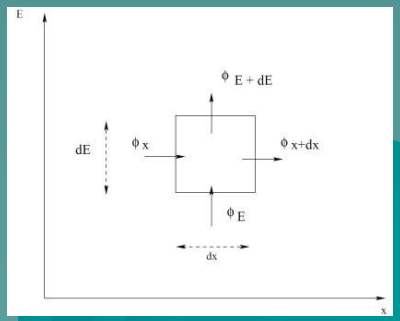
Razón de cambio en la densidad de partículas en el elemento $\mathrm{d}E\,\mathrm{d}x$:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(E,x,t)\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}x = \left[\phi_x(E,x,t) - \phi_{x+\mathrm{d}x}(E,x+\mathrm{d}x,t)\right]\mathrm{d}E + \left[\phi_E(E,x,t) - \phi_{E+\mathrm{d}E}(E+dE,x,t)\right]\mathrm{d}x + Q(E,x,t)\,\mathrm{d}E\,\mathrm{d}x$$

ϕ_x Flujo de partículas a través del intervalo de energía dE en el punto x del espacio

ϕ_E Flujo de partículas a través del intervalo de dx que tiene energía E en algún tiempo en el intervalo dt.

$Q(E,x,t)$ Tasa de producción de partículas relativistas por unidad de volumen en el espacio E-x.



Realizando expansión de Taylor y simplificando la notación:

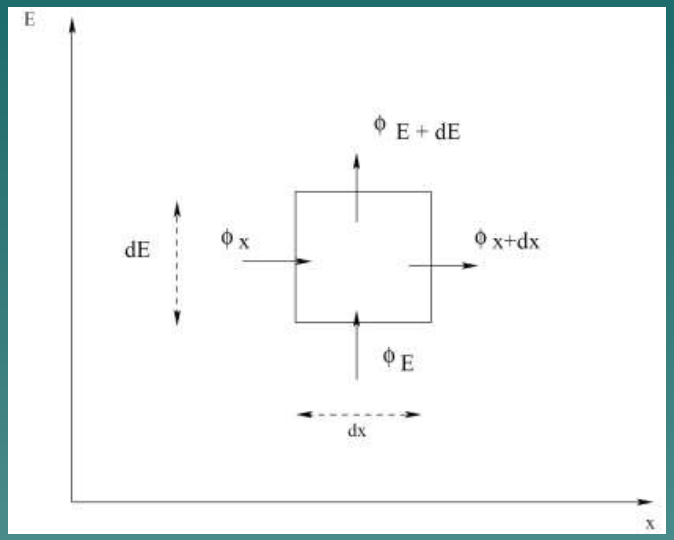
➡ $$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_E}{\partial E} + Q$$

Ecuación de difusión en dos dimensiones (cont.)

ϕ_x Flujo de partículas a través del intervalo de energía dE en el punto x del espacio

$$\phi_x = -D\frac{\partial n}{\partial x}$$ por definición

D Coeficiente de difusión



$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_E}{\partial E} + Q$$

ϕ_E Flujo de partículas a través del intervalo de dx que tiene energía E en algún tiempo en el intervalo dt.

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = b(E)$$ Tasa de pérdida de energía de partículas con energía E

$$\phi_E = n(E)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = b(E)n(E)$$ Número de partículas que pasan con energía E por unidad de tiempo

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - \frac{\partial}{\partial E}\left[b(E)n(E)\right] + Q(E)$$ **Ecuación de difusión de las partículas**

Ecuación de difusión

Generalizando $$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - \frac{\partial}{\partial E}\left[b(E)n(E)\right] + Q(E)$$

a tres dimensiones y agregando un término que tenga en cuenta el escape de las partículas, se obtiene la ecuación de difusión: $$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} - D\nabla^2 n + \frac{\partial}{\partial E}\left[bn\right] + \frac{n}{T} = Q(E,\vec{r},t)$$

Si el medio sufre movimientos convectivos con una velocidad macroscópica v , entonces puede completarse la ecuación con un término de convección:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} - D\nabla^2 n + \frac{\partial}{\partial E}\left[bn\right] + \frac{n}{T} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} = Q(E,\vec{r},t)$$

Solución de la ecuación de difusión

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} - D\nabla^2 n + \frac{\partial}{\partial E}\left[bn\right] + \frac{n}{T} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} = Q(E,\vec{r},t)$$

Consideremos una solución de estado estacionario para una distribución uniforme de fuentes que inyectan electrones relativistas con un espectro: $Q(E) = K\,E^{-p}$

Como no hay difusión ni dependencia temporal, la ecuación de difusión resulta:

$$\frac{\partial}{\partial E}\left[b(E)n(E)\right] = Q(E)$$

$$\int \mathrm{d}\left[b(E)n(E)\right] = \int Q(E)\,\mathrm{d}E$$

$$\int_E^\infty \mathrm{d}\left[b(E)n(E)\right] = \int_E^\infty K\,E^{-p}\,\mathrm{d}E$$

$N(E) \to 0 \quad \text{para} \quad E \to \infty$

$$-b(E)n(E) = \frac{K\,E^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_E^\infty = \frac{K\,E^{-(p-1)}}{p-1}$$

$$n(E) = -\frac{K\,E^{-(p-1)}}{(p-1)\,b(E)}$$

Solución de la ecuación de difusión

Para pérdidas que van como $b(E) = \frac{dE}{dt} = -AE^2$

como las pérdidas sincrotrónicas:

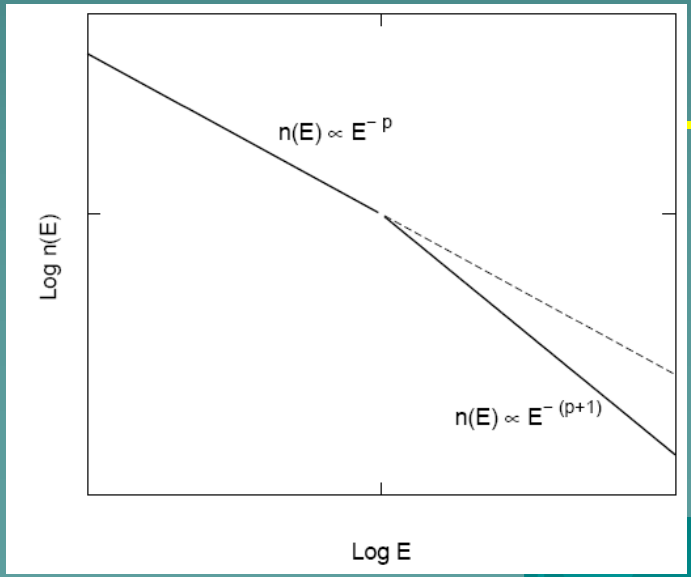
$$\left(\frac{dE}{dt}\right)\Big|_{\text{sincr}} = -\frac{4}{3}\,\sigma_T\, c\, \gamma^2\, \omega_{\text{mag}} \approx -6.6\times10^{-4}\left(\frac{B}{\text{G}}\right)^2 \gamma^2\, \frac{\text{eV}}{\text{seg}}$$

A partir de:

$$n(E) = -\frac{K\,E^{-(p-1)}}{(p-1)\,b(E)}$$

$$N(E) \propto E^{-(p+1)}$$

El espectro de electrones se hace *más blando respecto de la inyección*, incrementándose en 1 la potencia de E



Solución de la ecuación de difusión

$$b(E)=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-AE^2 \qquad \frac{\partial}{\partial E}\left[bn\right]+\frac{n}{T}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}=Q(E,\vec{r},t)$$

Para estudiar soluciones no estacionarias debemos conocer cómo varía la inyección de partículas.

Supongamos que hay una inyección continua durante un tiempo t_0:

Espectro de inyección

$$Q(E)=K\,E^{-p} \quad \text{si } t<t_0$$
$$Q(E)=0 \quad \text{si } t>t_0$$

y que las pérdidas de energía son del tipo $b(E)=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-AE^2$

Resolviendo:

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial E}\left[b(E)n(E)\right]+Q(E)$$

$$\Rightarrow \quad n(E) \quad \begin{cases} \dfrac{K\,E^{-(p+1)}}{A(p-1)}\left[1-(1-AEt)^{p-1}\right] & \text{si } AEt_0\le 1 \\ \dfrac{K\,E^{-(p+1)}}{A(p-1)} & \text{si } AEt_0>1 \end{cases}$$

Solución de la ecuación de difusión

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} - D\nabla^2 n + \frac{\partial}{\partial E}\left[bn\right] + \frac{n}{T} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla} = Q(E,\vec{r},t)$$

Para estudiar soluciones no estacionarias debemos conocer cómo varía la inyección de partículas.

Si tenemos una inyección instantánea en t=0:

Espectro de inyección $Q(E) = K\,E^{-p}\,\delta(t)$

Resolviendo: $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial}{\partial E}\left[b(E)n(E)\right] + Q(E)$

$$n(E) = K\,E^{-p}\left(1 - AEt\right)^{p-2}$$

Para *p*=2, el espectro *no modifica* su forma,
Sólo va cambiando la energía máxima de las partículas.

Solución de la ecuación de difusión

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} - D\nabla^2 n + \frac{\partial}{\partial E}\left[bn\right] + \frac{n}{T} = Q(E,\vec{r},t)$$

La función de Green de la ecuación de difusión sin término convectivo satisface:

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} - D\nabla^2 G + \frac{\partial}{\partial E}\left[bG\right] + \frac{G}{T} = \delta(E-E_0)\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\delta(t-t_0)$$

$E_0, \vec{r}_0, t_0$ Valores iniciales

$$G = G(E,\vec{r},t;E_0,\vec{r}_0,t_0)$$

La solución de esta ecuación se encuentra fácilmente si se cambia a nuevas variables (Syrovatskii 1959): $t' = t - \tau$ y λ

$$\tau \equiv \tau(E,E_0) = \int_{E_0}^{E} \frac{\mathrm{d}E}{b(E)} \qquad \lambda \equiv \lambda(E,E_0) = \int_{E_0}^{E} \frac{D(E)}{b(E)}\mathrm{d}E$$

$$G(E,\vec{r},t) = \frac{1}{\left|b(E)\right|(4\pi\lambda)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\tau}{T} - \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}{4\lambda}\right] \delta(t-t_0-\tau)$$

La solución general de la ecuación de difusión para una distribución fuente arbitraria es:

$$u(\vec{x}) = \int_{\Omega} G(\vec{x},\vec{x}')\, f(\vec{x}')\, \mathrm{d}^3x'$$

$$n(E,\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\vec{r}_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}E_0 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t_0\, Q(E_0,\vec{r}_0,t_0)\, G(E,\vec{r},t;E_0,\vec{r}_0,t_0)$$

Solución de la ecuación de difusión (cont.)

La función de Green para un **procesos estacionario** (donde la intensidad de las fuentes no dependen del tiempo):

$$G(E,\vec{r};E_0,\vec{r}_0)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_0\,G(E,\vec{r},t;E_0,\vec{r}_0,t_0)$$

$$=\frac{1}{|b(E)|(4\pi\lambda)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\tau}{T}-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}{4\lambda}\right],\quad \text{si } \tau>0$$

$$\tau\equiv\tau(E,E_0)=\int_{E_0}^{E}\frac{\mathrm{d}E}{b(E)}$$

Si el proceso es no-estacionario pero es homogéneo en el espacio:

$$G(E,t;E_0,t_0)=\frac{1}{|b(E)|}\exp\left[-\frac{\tau}{T}\right]\delta(t-t_0-\tau)$$

Si el proceso es estacionario y homogéneo en el espacio:

$$G(E;E_0)=\frac{1}{|b(E)|}\exp\left[-\int_{E}^{E_0}\frac{\mathrm{d}E'}{b(E')T(E')}\right]$$

$$N(E)=\int_{E}^{E_{\max}}\mathrm{d}E'\,Q(E')\,G(E;E')$$

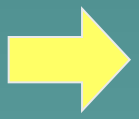
Solución de la ecuación de difusión (cont.)

$$n(E,\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3\vec{r}_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}E_0\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}t_0\,Q(E_0,\vec{r}_0,t_0)\,G(E,\vec{r},t;E_0,\vec{r}_0,t_0)$$

$$G(E,\vec{r},t;E_0,\vec{r}_0,t_0)=\frac{1}{|b(E)|(4\pi\lambda)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\tau}{T}-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}{4\lambda}\right]\delta(t-t_0-\tau)$$

$$\lambda\equiv\lambda(E,E_0)=\int_{E_0}^{E}\frac{D(E)}{b(E)}\mathrm{d}E$$

Si $D(E)=D_0\,E^{\delta}$ y $Q(E,t)=Q\,E^{-\alpha}q(t),\quad q(t)=\text{cte. para } t>0$



$$n(E)\propto E^{-(\alpha+\delta)}$$

el espectro se hace más blando (más empinado) a medida que las partículas se difunden.

Volviendo a…MECANISMO DE FERMI

Luego, el espectro de rayos cósmicos en forma integral que emerja de la fuente luego de *n* cruces será:

$$J(>E) = \text{cte}\, E^{-(\Gamma-1)}$$

Y en forma diferencial :

$$J(E) = \text{cte}\, E^{-\Gamma}$$

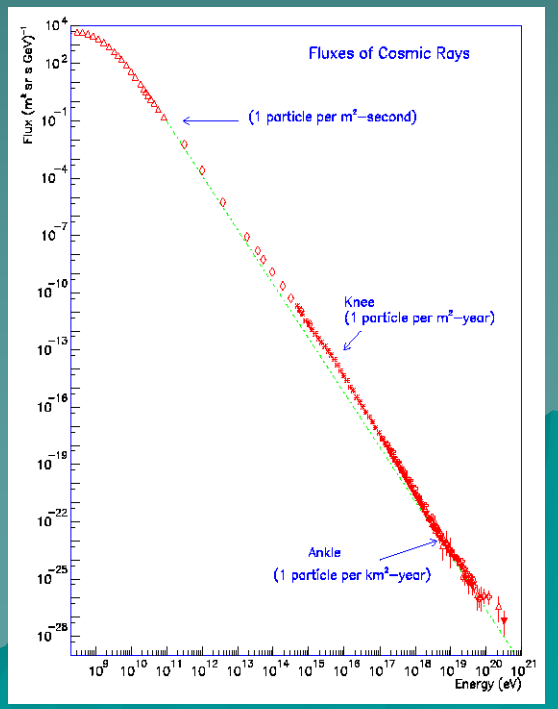
LEY DE POTENCIAS

Para una onda de choque fuerte: $\xi = 4$ ⇒ $\Gamma = 2$

$$\Gamma = \frac{\xi + 2}{\xi - 1}$$

El hecho que el espectro observado sea $J(E) = \text{cte}\, E^{-2.7}$

Se explica a través de los efectos de difusión de las partículas en el medio interestelar.



¿Cuál es la *energía máxima* que pueden alcanzar las partículas?

Para realizar esta estimación,
se **igualan** las ganancias de energía de las partículas
con las pérdidas radiativas que sufren las mismas.

→ ENERGÍA MÁXIMA

$$r_g = \frac{(E/\mathrm{eV})}{300\ z\,(B/\mathrm{G})}\,\mathrm{cm}$$

Siempre que E_{max} sea tal que
el giroradio de las partículas de esa energía
sea menor que el tamaño de la región
de aceleración de la fuente.

La tasa de aceleración es:

$$r_{acel} = \frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = \frac{(\langle \Delta E \rangle / E)}{t_{ciclo}} \quad \Rightarrow \quad r_{acel} \approx \frac{4}{3}\frac{\xi - 1}{\xi}\frac{V_s}{c}\,t_{ciclo}^{-1}$$

Donde t_{ciclo} es el tiempo que le toma a una partícula que está siendo acelerada ir de la región *pre-shock* a la *post-shock* para luego regresar a la misma.
Depende del coeficiente de difusión del medio.

Se supone que este coeficiente depende de la energía

$$D = D(E) \propto E^{\delta} \quad \Rightarrow \quad J(E) \propto E^{-(\Gamma+\delta)}$$

Coeficiente de difusión

La determinación de la evolución de una población de partículas relativistas requiere, en general, el conocimiento del coeficiente de difusión.

Es usual suponer que en el medio interestelar este coeficiente es una ley de potencia de la energía, pero puede variar significativamente en diversos medios.

En ausencia de cualquier otra información, se suele adoptar el coeficiente de difusión mínimo, conocido como coeficiente de difusión de Bohm:

$$D = \frac{1}{3} r_g \, c \qquad \begin{cases} v \cong c \\ r_g = \dfrac{(E/\mathrm{eV})}{300 \; z \, (B/\mathrm{G})} \mathrm{cm} \end{cases}$$

Las partículas que se difunden son observadas cuando interactúan con "blancos" lejanos a la fuente, y dan lugar a radiación en RX o gamma según el proceso que se desarrolle.

En algunos casos, la difusión compite con la convección en el transporte de las partículas (por ejemplo en regiones donde hay vientos fuertes). En tales casos, el término convectivo no puede despreciarse.

Coeficiente de difusión

El coeficiente de difusión a lo largo del campo magnético es un cierto número de veces el valor del coeficiente de difusión mínimo, conocido como coeficiente de difusión de Bohm:

$$D_{\mathrm{Bohm}} = \frac{1}{3} r_{\mathrm{g}}\, c$$

Donde r_{g} es el giroradio de la partícula.

El coeficiente de difusión paralelo a $\vec{B}$ es: $D_{\parallel} = \zeta\, D_{\mathrm{Bohm}}$

Un shock se denomina **paralelo** si la normal al frente del choque es paralela a la dirección del campo magnético.
Para valores típicos de $V_{\mathrm{s}} = 0.1c$ y $\zeta = 10$ se tiene:

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\mathrm{acel}} \approx 1.5\times10^{-4}\, e\, c^2\, B \quad \text{(en SI)}$$

El coeficiente de difusión perpendicular es:

$$D_{\perp} \approx \frac{D_{\parallel}}{1+\zeta^2}$$

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_{\mathrm{acel}} \approx 0.04\, e\, c^2\, B \quad \text{(en SI)}$$

¿Cuál es la *energía máxima* que pueden alcanzar las partículas? (cont.)

Las ondas de choque de los remanentes de supernova permanecen fuertes como para ***acelerar*** partículas durante ~10^3 años.
Las energías máximas que se logran considerando B~10^{-5} G y pérdidas sincrotrón son:

$$E_{\max}^{SN} \approx 10^{14} \times Z \quad \text{eV}$$ Para shocks paralelos.

$$E_{\max}^{SN} \approx 10^{16} \times Z \quad \text{eV}$$ Para shocks perpendiculares.

Para un shock oblicuo, con un ángulo θ
entre la normal al shock y el campo magnético,
el coeficiente de difusión es:

$$D_{\perp} = D_{\parallel} \cos^2(\theta) + D_{\perp} \operatorname{sen}^2(\theta)$$

El valor de la energía máxima estará comprendido entre los valores correspondientes al caso paralelo y al perpendicular.

Efectos adicionales a tener en cuenta en diversas situaciones astrofísicas:

1) Modificación del shock por efecto de la presión de los rayos cósmicos que están siendo acelerados, lo que lleva a situaciones no-lineales.

2) Ondas de choque relativistas.
En este caso, el índice adiabático del gas es 4/3 en vez de 5/3, lo que lleva a $\xi = 7$ → Se tienen espectros con $\Gamma \approx 1.5$

Si se tienen en cuenta efectos anisotrópicos, en casos relativistas se tiene:

$$1.5 \leq \Gamma \leq 2.0$$

Discusión general de las Funciones de Green

Consideramos un operador diferencial L tal que: $L\,u(\vec{x}) = \lambda\, u(\vec{x})$

Supongamos que se ha fijado una región Ω
y se han impuesto condiciones de contorno adecuadas.

L se dice *hermítico* si: $\int_\Omega u^*(\vec{x}) L\, v(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x = \int_\Omega v^*(\vec{x}) L\, u(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x$

u, v Funciones arbitrarias que satisfacen las condiciones de contorno

Supongamos que L es hermítico
y consideremos dos autofunciones diferentes con sus autovalores:

$$L\,u_i(\vec{x}) = \lambda_i\, u_i(\vec{x})$$
$$L\,u_j(\vec{x}) = \lambda_j\, u_j(\vec{x})$$

$$\int_\Omega u_j^*(\vec{x}) L\, u_i(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x = \lambda_i \int_\Omega u_j^*(\vec{x})\, u_i(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x$$
$$\int_\Omega u_i^*(\vec{x}) L\, u_j(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x = \lambda_j \int_\Omega u_i^*(\vec{x})\, u_j(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x$$

Conjugando la segunda ecuación y restando: $\left(\lambda_i - \lambda_j^*\right) \int_\Omega u_j^*(\vec{x})\, u_i(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x = 0$

Discusión general de las Funciones de Green (cont.)

Considerando los casos $i = j, \quad i \neq j$ vemos que:

1) Los autovalores de un operador hermítico diferencial son reales
2) Las autofunciones de un operador hermítico diferencial, correspondientes a autovalores distintos, son ortogonales:

$$\int_\Omega u_i^*(\vec{x})\, u_j(\vec{x})\, \mathrm{d}^3x = 0$$

➡ consideramos la ecuación *no-homogénea*:

$$L\,u(\vec{x}) - \lambda\, u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Desarrollamos $u(\vec{x})$ y $f(\vec{x})$ en serie de autofunciones de L:

$$u(\vec{x}) = \sum_n c_n\ u_n(\vec{x})$$

$$f(\vec{x}) = \sum_n d_n\ u_n(\vec{x})$$

➡ $$\sum_n c_n\ (\lambda_n - \lambda)\, u_n(\vec{x}) = \sum_n d_n\ u_n(\vec{x})$$

➡ $$\sum_n [c_n\ (\lambda_n - \lambda)\, u_n(\vec{x}) - d_n\, u_n(\vec{x})] = 0$$

$u_n . f = d_n$ ➡ $$c_n = \frac{u_n . f}{\lambda_n - \lambda}$$

➡ $$u(\vec{x}) = \sum_n \frac{u_n\, u_n . f}{\lambda_n - \lambda} = \sum_n \frac{u_n(\vec{x})}{\lambda_n - \lambda} \int_\Omega u_n^*(x')\, f(x')\, \mathrm{d}^3x'$$

Discusión general de las Funciones de Green (cont.)

Podemos escribir $u(\vec{x}) = \int_{\Omega} G(\vec{x},\vec{x}')\, f(\vec{x}')\, \mathrm{d}^3x'$

$L\,u(\vec{x}) - \lambda\, u(\vec{x}) = f(\vec{x})$

donde $G(\vec{x},\vec{x}') = \sum_n \dfrac{u_n(\vec{x})\; u_n^*(\vec{x}')}{\lambda_n - \lambda}$ es la Función de Green.

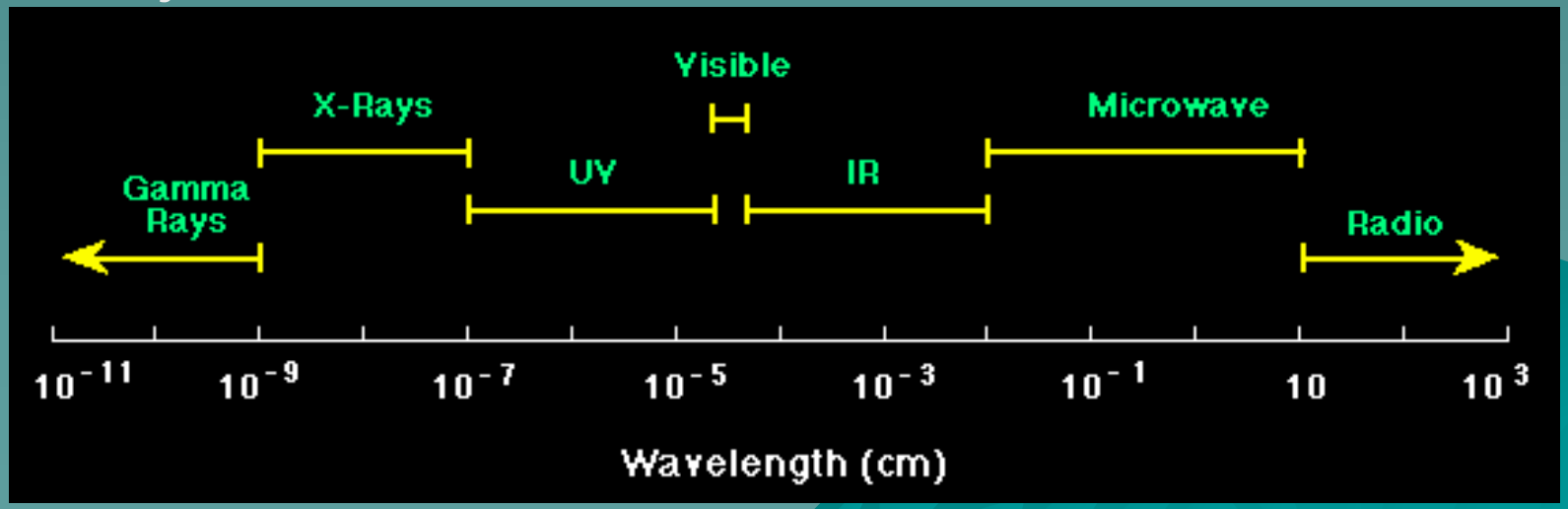
Esta función está determinada por un operador diferencial hermítico, una región Ω y condiciones de contorno adecuadas.

- Buscamos ahora la ecuación diferencial que se satisface con $G(\vec{x},\vec{x}')$

Si $f(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$ ⇒ $u(\vec{x}) = \int_{\Omega} G(\vec{x},\vec{x}')\,\delta(\vec{x}' - \vec{x}_0)\,\mathrm{d}^3x' = G(\vec{x},\vec{x}_0)$

Por lo tanto, $G(\vec{x},\vec{x}')$ es la solución de: $L\,G(\vec{x},\vec{x}') - \lambda\, G(\vec{x},\vec{x}') = \delta(\vec{x},\vec{x}')$

Significado de la función de Green:
es la solución del problema para una "fuente" puntual unidad $f(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$

Se cumple que $G(\vec{x}',\vec{x}) = [G(\vec{x},\vec{x}')]^*$ significa que
la respuesta en $\vec{x}$ a una perturbación unidad en $\vec{x}'$
es la misma que la respuesta en $\vec{x}'$ una perturbación puntual en $\vec{x}$

Region	Wavelength (Angstroms)	Wavelength (centimeters)	Frequency (Hz)	Energy (eV)
Radio	$> 10^{9}$	> 10	$< 3 \times 10^{9}$	$< 10^{-5}$
Microwave	$10^{9} - 10^{6}$	$10 - 0.01$	$3 \times 10^{9} - 3 \times 10^{12}$	$10^{-5} - 0.01$
Infrared	$10^{6} - 7000$	$0.01 - 7 \times 10^{-5}$	$3 \times 10^{12} - 4.3 \times 10^{14}$	$0.01 - 2$
Visible	$7000 - 4000$	$7 \times 10^{-5} - 4 \times 10^{-5}$	$4.3 \times 10^{14} - 7.5 \times 10^{14}$	$2 - 3$
Ultraviolet	$4000 - 10$	$4 \times 10^{-5} - 10^{-7}$	$7.5 \times 10^{14} - 3 \times 10^{17}$	$3 - 10^{3}$
X-Rays	$10 - 0.1$	$10^{-7} - 10^{-9}$	$3 \times 10^{17} - 3 \times 10^{19}$	$10^{3} - 10^{5}$
Gamma Rays	< 0.1	$< 10^{-9}$	$> 3 \times 10^{19}$	$> 10^{5}$