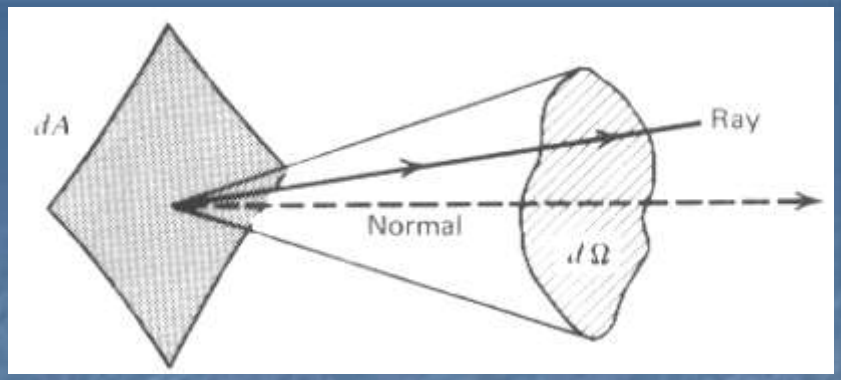
Capítulo 4
PROCESOS RADIATIVOS I

- Conceptos básicos
- Radiación térmica
- Radiación sincrotrón

CONCEPTOS BÁSICOS

CONCEPTOS BÁSICOS



El concepto básico en el estudio de los procesos radiativos es el de **Intensidad**:

Número de partículas por unidad de *área*
por unidad de *ángulo sólido*
por unidad de *tiempo*
incidentes sobre un detector no especificado

Unidades en el sistema cgs: $[I] = \text{erg cm}^{-2}\,\text{sterad}^{-1}\,\text{seg}^{-1}\,\text{Hz}^{-1}$

Sub-indicación según el tipo de partículas al cual nos referimos:

- I_γ Para fotones
- I_p Para protones

A partir del concepto de Intensidad, el **flujo de partículas** se define como:

$$F = \int_\Omega I \cos\theta \, d\Omega$$

θ *Ángulo* entre la dirección de movimiento de la partícula y la normal al área sobre la que inciden.
La integración se hace sobre todo el ángulo sólido subtendido por las partículas.

Número de partículas incidentes por unidad de *área*
por unidad de *tiempo*

Unidades en el sistema cgs: $[F] = \text{erg cm}^{-2}\,\text{seg}^{-1}\,\text{Hz}^{-1}$

MKS: $[F] = \text{W m}^{-2}\,\text{Hz}^{-1}$ → $1\,\text{Jy} = 10^{-26}\,\text{W m}^{-2}\,\text{Hz}^{-1}$

CONCEPTOS BÁSICOS (cont.)

Relación entre Intensidad y Flujo:

$$F = \int_{\Omega} I \cos\theta \, d\Omega$$

Para un flujo isotrópico de radiación:

$$F = \pi I$$

El número de partículas por unidad de volumen es:

$$n = \frac{4\pi}{v} I$$

v *Velocidad* de las partículas.

$v \approx c$ en la mayoría de los casos pues nos interesan partículas relativistas

Unidades en el sistema cgs: $[n] = \mathrm{cm}^{-3}$

CONCEPTOS BÁSICOS (cont.)

Las partículas tienen, por lo general, distintas energías, por lo que es conveniente introducir una función
distribución en energías *n*(*E*): número de partículas
por unidad de volumen por unidad de energía

Número de partículas por unidad de volumen con energías entre *E* y *E*+d*E*

$$n = \int_0^\infty n(E)\, dE$$

Unidades en el sistema cgs: $[n] = \mathrm{cm}^{-3}$ $[n(E)] = \mathrm{cm}^{-3}\,\mathrm{erg}^{-1}$

Número de partículas por unidad de volumen con energías mayores que *E:*

$$n(>E) = \int_E^\infty n(E')\, dE'$$

El correspondiente flujo integrado es:

$$F(>E) = \int_E^\infty F(E')\, dE'$$

CONCEPTOS BÁSICOS (cont.)

La **densidad de energía** de las partículas es:

$$\omega = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} E\, n(E)\, dE$$

Unidades en el sistema cgs:

$$[\omega] = \mathrm{erg\,cm^{-3}}$$

El flujo de energía asociado es:

$$S = \frac{c}{4\pi}\omega$$

Unidades en el sistema cgs:

$$[S] = \mathrm{erg\,seg^{-1}cm^{-2}}$$

La **luminosidad** de una fuente localizada a una distancia *d* que radía isotrópicamente es:

$$L(>E) = 4\pi d^2 \int_E^{\infty} F(E')\, dE'$$

Unidades en el sistema cgs: $[L] = \mathrm{erg\,seg^{-1}}$

Para una fuente isotrópica de radio R:

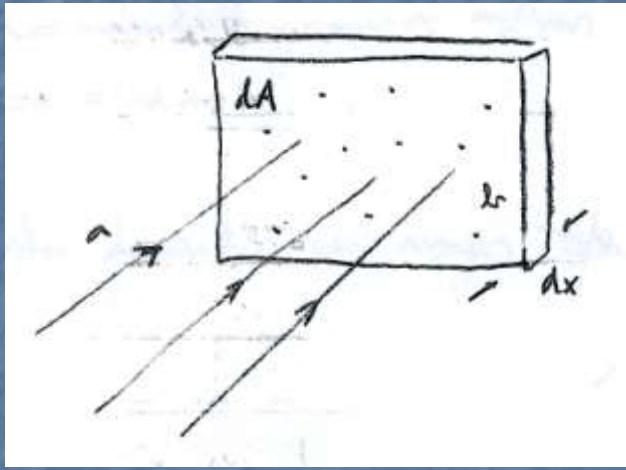
$$L = 4\pi R^2 S$$

Unidades en el sistema cgs: $[L] = \mathrm{erg\,seg^{-1}}$

CONCEPTOS BÁSICOS (cont.)

La **sección eficaz** de una interacción (concepto de gran importancia):

Consideremos un flujo de partículas de clase *a*
con velocidad v_a
que interactúan con un blanco formado por partículas tipo *b*
que forman un volumen dV=dA dx



El número de interacciones de tipo i que ocurren en el tiempo dt en el volumen dV es proporcional a:

1) El número de partículas tipo b que haya en el blanco
2) El número de partículas incidentes que atraviesan el área A en el tiempo dt

CONCEPTOS BÁSICOS (cont.)

Sea n_b Densidad de partículas en el blanco

n_a Densidad de partículas incidentes en el sistema de referencia del blanco

El número de interacciones de tipo i que ocurren en el tiempo d*t* en el volumen d*V* es:

$$dn_i = d\sigma_i \left(n_b \, dV\right)\left(n_a \, v_a \, dt\right)$$

Sección eficaz diferencial:
Constante de proporcionalidad que caracteriza el número de reacciones tipo *i* que ocurren *por unidad de tiempo*
de volumen
de flujo incidente
de densidad en el blanco

CONCEPTOS BÁSICOS (cont.)

La **sección eficaz total** (no diferencial) para la interacción *i* es la suma sobre todos los posibles momentos de las partículas luego de la interacción: σ_i $[\sigma_i] = \mathrm{cm}^2$

$$\begin{cases} 1\,\mathrm{barn} = 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2 \\ 1\,\mathrm{mb} = 10^{-27}\,\mathrm{cm}^2 \end{cases}$$

Unidad de medida típica para la sección eficaz

Tanto $d\sigma_i$ como σ_i son invariantes relativistas.

La **sección eficaz total para la interacción entre dos tipos de partículas** se obtiene sumando sobre las secciones eficaces de *todos los posibles procesos* que pueden ocurrir durante la interacción:

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \sum_i \sigma_i$$

La **probabilidad relativa** de que ocurra un cierto **canal de reacción** es:

$$P_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{\mathrm{tot}}}$$

CONCEPTOS BÁSICOS (cont.)

La **radiación gamma** se produce por la interacción de partículas tipo *i* e intensidad $I_i(E_i, \vec{r})$

con un blanco de densidad $n(\vec{r})$

El blanco puede estar formado por partículas o fotones.

La intensidad de la radiación gamma resultante será:

$$I_\gamma(E_\gamma) = \underbrace{\int_{\vec{l}} \int_{E_\gamma}^{\infty} n(\vec{r})\,\sigma(E_i, E_\gamma)\, I_i(E_i, \vec{r})\, dE_i\, dr}_{q_\gamma(E_\gamma, \vec{r})}$$

$$\bar{l} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Indica integración a lo largo de la línea de la visual.

EMISIVIDAD de la fuente de rayos gamma. Su determinación para distintos escenarios astrofísicos es el *problema fundamental de la astrofísica de rayos gamma*.

$$\Rightarrow \quad I_\gamma(E_\gamma) = \int_{\vec{l}} q_\gamma(E_\gamma, \vec{r})$$

RADIACIÓN TÉRMICA

RADIACIÓN TÉRMICA

La forma más sencilla de producir radiación electromagnética es calentando un gas.

Un cuerpo negro es un absorvente radiativo perfecto en equilibrio termodinámico a una temperatura T.

El espectro de emisión de un cuerpo negro en función de la energía está dado por la distribución de Planck:

$$I_{\mathrm{BB}} = \frac{2\,E_{\mathrm{ph}}^{3}}{h^{3}\,c^{2}}\left[\frac{E_{\mathrm{ph}}^{2}}{\exp(E_{\mathrm{ph}}/kT)-1}\right]$$

$$[I_{\mathrm{BB}}] = \mathrm{erg\ seg^{-1}\ cm^{-2}\ sterad^{-1}}$$

$E_{\mathrm{ph}} = h\nu$ Energía de los fotones de frecuencia ν

h Cte. de Planck $h = 6.625\times10^{-27}\ \mathrm{erg\,seg^{-1}}$

k Cte. de Boltzmann $k = 1.38\times10^{-16}\ \mathrm{erg\ {}^{\circ}K^{-1}}$

La densidad de fotones por unidad de energía en el cuerpo negro es:

$$n_{\mathrm{BB}}(E_{\mathrm{ph}}) = \frac{4\pi}{c}\,I_{\mathrm{BB}}\left(E_{\mathrm{ph}}\right) = \frac{(E_{\mathrm{ph}}/m_e\,c^2)^2}{m_e\,c^2\,\pi^2\,\lambda_c^3}\left[\frac{1}{\exp(E_{\mathrm{ph}}/kT)-1}\right]$$

$\lambda_c = \left(2\pi\,m_e\,c\right)^{-1}$ Longitud de onda de Compton del electrón

RADIACIÓN TÉRMICA (cont.)

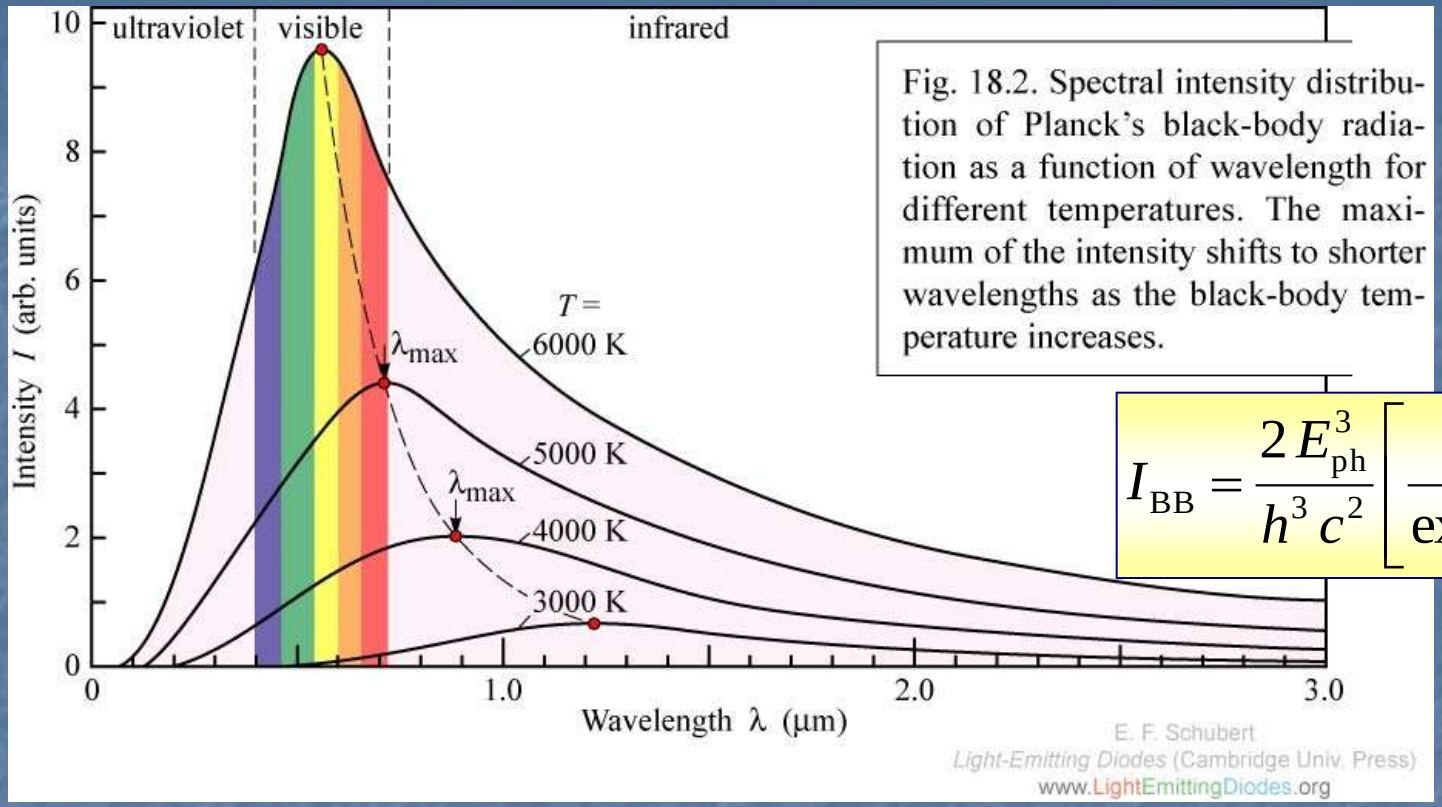


Fig. 18.2. Spectral intensity distribution of Planck's black-body radiation as a function of wavelength for different temperatures. The maximum of the intensity shifts to shorter wavelengths as the black-body temperature increases.

$$I_{BB} = \frac{2E_{ph}^3}{h^3 c^2}\left[\frac{E_{ph}^2}{\exp(E_{ph}/kT)-1}\right]$$

El máximo de la distribución de Planck ocurre para (Ley de desplazamiento de Wien):

$$E_{ph,max} \approx 1.59\,kT \approx 1.37\times10^{-10}\left(\frac{T}{^{\circ}\mathrm{K}}\right)\ \mathrm{MeV}$$

RADIACIÓN TÉRMICA (cont.)

La energía media de los fotones emitidos por un cuerpo negro puede obtenerse dividiendo la densidad de energía

$$\omega = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} E\, n(E)\, dE$$

$$U_{\mathrm{BB}} = \int_0^{\infty} E_{\mathrm{ph}}\, n_{\mathrm{BB}}(E_{\mathrm{ph}})\, dE_{\mathrm{ph}}$$

$$n_{\mathrm{BB}}(E_{\mathrm{ph}}) = \frac{4\pi}{c} I_{BB}(E_{ph}) = \frac{(E_{\mathrm{ph}}/m_e c^2)^2}{m_e c^2 \pi^2 \lambda_c^3} \left[\frac{1}{\exp(E_{\mathrm{ph}}/kT) - 1} \right]$$

por el número total de fotones por unidad de volumen

$$N_{\mathrm{BB}} = \int_0^{\infty} n_{\mathrm{BB}}(E_{\mathrm{ph}})\, dE_{\mathrm{ph}}$$

La energía media de los fotones es:

$$\langle E_{\mathrm{ph}} \rangle \approx 2.7\, kT \approx 2.3 \times 10^{-10} \left(\frac{T}{^{\circ}\mathrm{K}} \right) \mathrm{MeV}$$

RADIACIÓN TÉRMICA (cont.)

El rango de energías de rayos gamma es $E \geq 100\,\mathrm{keV}$

Para tener fotones con energías medias $\langle E \rangle \approx 1\mathrm{GeV} \approx 10^3\,\mathrm{MeV}$

$$\langle E_{\mathrm{ph}} \rangle \approx 2.7\,kT \approx 2.3\times 10^{-10}\left(\frac{T}{^{\circ}\mathrm{K}}\right)\,\mathrm{MeV}$$

debemos tener temperaturas $T \approx 10^{13}\ ^{\circ}\mathrm{K}$ → No se encuentran en objetos astrofísicos usuales. Sólo son posibles durante breves lapsos en eventos explosivos (GRBs, Big-Bang)

La densidad de fotones de una fuente tipo cuerpo negro con una temperatura media típica de un GRB

$T \approx 10^{15}\ ^{\circ}\mathrm{K}$

es extremadamente alta $N_{\mathrm{BB}} \approx 4.6\times 10^{46}\,\mathrm{cm}^{-3}$

Sección eficaz de la interacción gamma-gamma:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^{+} + e^{-}$$

El camino libre medio de un fotón es $\lambda_{\mathrm{ph}} \approx \left(n_{\mathrm{ph}}\,\sigma_{\gamma-\gamma}\right)^{-1}$

con $\sigma_{\gamma-\gamma} \approx \sigma_{\mathrm{T}} \approx 10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$ ⇒ $\lambda_{\mathrm{ph}} << 1\mathrm{cm}$ ⇒ FUENTE AUTOABSORVIDA

Fuente auto-absorbida: los fotones no podrán escapar de ella.

De todo esto concluimos que las fuentes de radiación gamma que se observan en el continuo son de origen no térmico.

Describiremos a continuación varios mecanismos no térmicos de producción de rayos gamma, empezando por aquellos que implican interacción de partículas cargadas
con campos electromagnéticos.

Las *fuentes estables de radiación gamma* que se observan en el continuo son de origen *no térmico*

Los mecanismos *no térmicos* *de producción de rayos gamma*
que implican interacción de partículas cargadas con campos electromagnéticos:

- Radiación sincrotrón
- Radiación de curvatura
- Radiación Compton Inversa
- Producción de pares en tripletes
- Radiación por producción de fotomesones
- Formación de pares por interacciones foto-hadrónicas

RADIACIÓN SINCROTRÓN

RADIACIÓN SINCROTRÓN

Es la radiación emitida por **electrones muy energéticos que giran en un campo magnético.**

Mecanismo responsable de:

- emisión en radio de la Galaxia, remanentes de supernovas y fuentes de radio extragalácticas

- emisión no térmica en el óptico (ej.: Crab Nebula)

- posiblemente emisión en el continuo óptico y rayos X de quasars

➡ puede dar cuenta del flujo en radio, óptico y rayos X de un objeto.

Crab Nebula

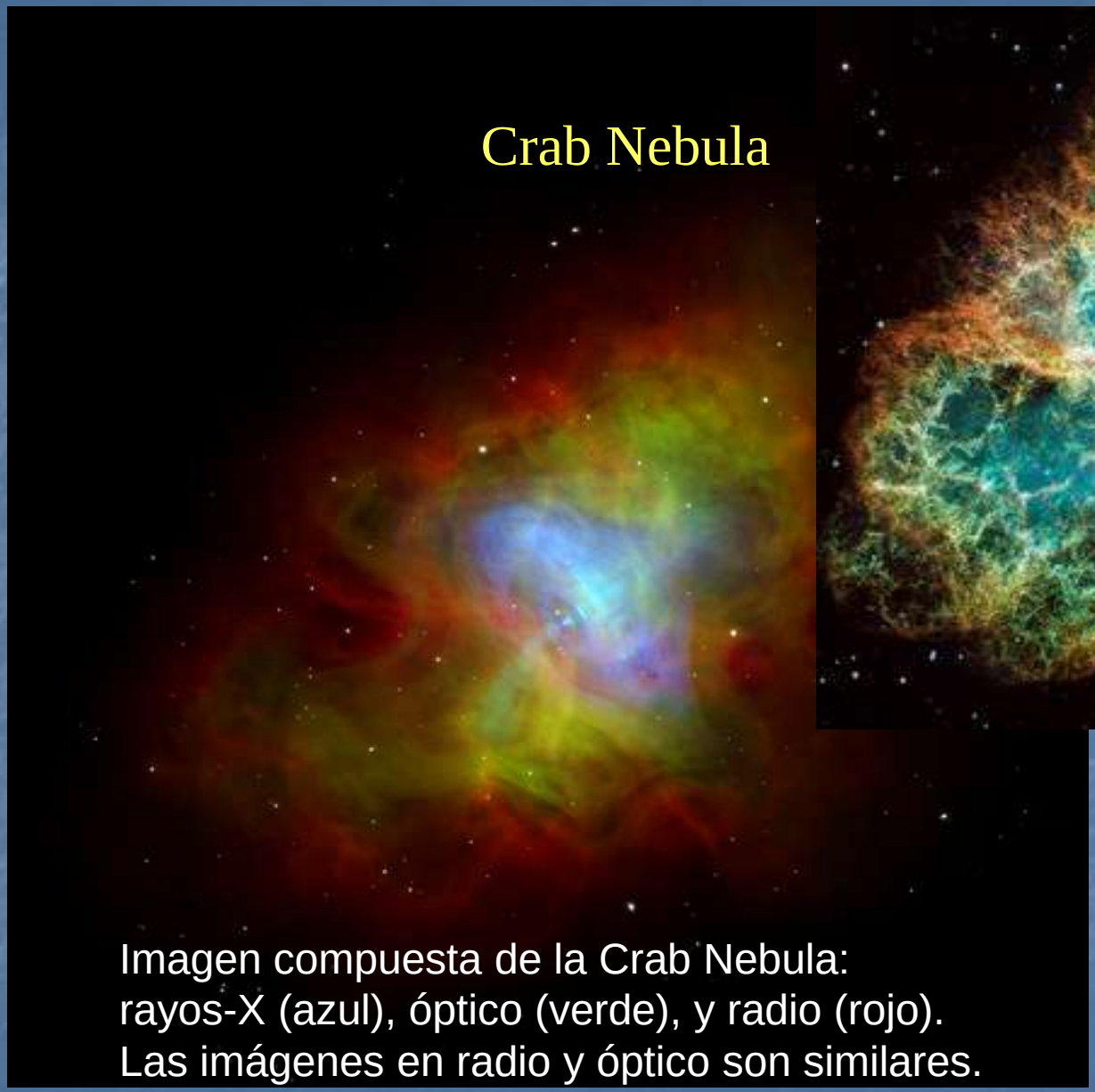


Imagen compuesta de la Crab Nebula:
rayos-X (azul), óptico (verde), y radio (rojo).
Las imágenes en radio y óptico son similares.

La evolución de supernovas con fuentes de energía centrales, como la Crab Nebula, es algo diferente dinámicamente.
La mayor diferencia es que la nebulosa está recibiendo constantemente un aporte de energía en forma de partículas relativistas o energía electromagnética del pulsar central.

La nebulosa tiene un diámetro de 6 años luz (1,84 pc) y su velocidad de expansión es de 1.500 km/s.

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

Para calcular la **tasa de radiación total**
de un electrón de alta energía de carga *e*
que se mueve en un campo magnético de intensidad $\vec{B}$
se combinan los resultados de:

- Dinámica de partículas cargadas en un campo magnético
- Radiación de partículas cargadas aceleradas

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

El movimiento de una partícula con masa en reposo *m* y carga *e* en un campo magnético $\vec{B}$

queda determinado por la fuerza de Lorentz:

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma\, m\, \vec{v}\right) = \frac{e}{c}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\left(\vec{v}\cdot\vec{v}/c^2\right)^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\gamma\,\vec{v}\right) = m\,\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} + m\,\gamma^3\,\vec{v}\,\frac{\left(\vec{v}\cdot\vec{a}\right)}{c^2}$$

En un campo magnético, la aceleración $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ es *perpendicular* a $\vec{v}$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$$

$$\gamma\, m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

$$\gamma\, m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

fuerza de Lorentz:

Como esta fuerza es el resultado de un producto vectorial, será perpendicular a la velocidad y al campo magnético. Al ser perpendicular a la velocidad de la carga, también lo es a su trayectoria, por lo cual dicha fuerza no realiza trabajo sobre la carga, lo que supone que no hay cambio de energía cinética, o lo que es lo mismo, no cambia el módulo de la velocidad.

Al ser perpendicular a la velocidad modifica la dirección del movimiento de la partícula.

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

Separando $\vec{v}$ en componentes paralela $v_{\parallel}$ y perpendicular $v_{\perp}$ al campo magnético uniforme $\vec{B}$

El *pitch angle* de la órbita de la partícula está dado por $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}$

Ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$

Como $v_{\parallel}$ es paralela a $\vec{B}$

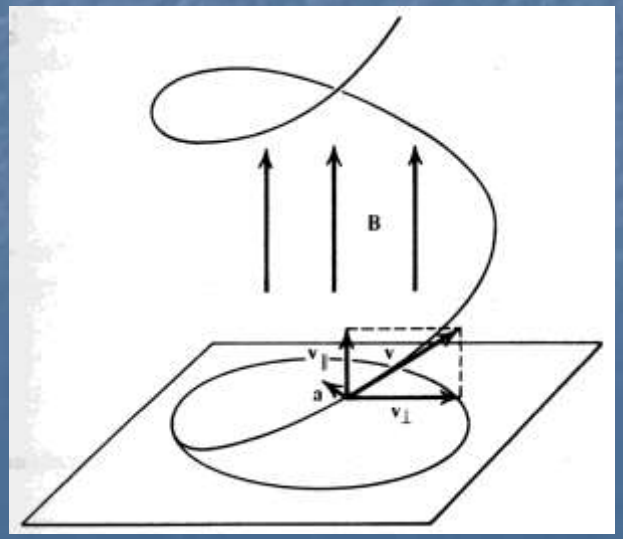
$$\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

indica que no hay cambio en $v_{\parallel}$ $v_{\parallel}$ es cte.

A su vez

$$\left|\vec{v}\right| = v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \text{cte}$$

$$v_{\perp} = \sqrt{v^2 - v_{\parallel}^2} = \text{cte}$$



De aquí que la partícula se mueva **según una hélice con su eje paralelo a** $\vec{B}$

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

Igualando la aceleración $\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \equiv \frac{e}{c}\, v B \operatorname{sen}\alpha$

con la aceleración centrífuga $\frac{v_\perp^2}{r}$

$$r_g = \frac{\gamma m c v \operatorname{sen}\alpha}{e B}$$

Giroradio de la partícula

$$r_g = \frac{(E/eV)}{300 z\,(B/G)} \quad \text{cm}$$

La frecuencia de giro en el plano normal a $\vec{B}$:

$$\omega_B = \frac{v_\perp}{r_g} = \frac{v \operatorname{sen}\alpha}{\gamma m c v \operatorname{sen}\alpha / e B} = \frac{e B c}{E}$$

$$E = \gamma m c^2$$

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

La expresión relativista para la potencia radiada por una carga acelerada

$$P = \frac{2e^2}{3c^3}\,\gamma^4\left(a_\perp^2 + \gamma^2 a_\parallel^2\right)$$

$a_\parallel$ Componente **paralela** de la aceleración

$a_\perp$ Componente **perpendicular**

De la ecuación de Lorentz

$$\gamma\, m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{c}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$a_\parallel = 0$$

$$a_\perp = \omega_B\, v \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{v_\perp^2}{r} \qquad \omega_B = \frac{v_\perp}{r_g} \qquad \omega_B = \frac{e\,B}{\gamma\, m\, c}$$

$$P = \frac{2e^4}{3m^2c^5}\,\gamma^2 v_\perp^2 B^2$$

Introduciendo el radio clásico del electrón $r_e = \dfrac{e^2}{m_e\, c^2}$ resulta:

$$P = \frac{2}{3}\left(\frac{m_e}{m}\right)^2 r_e^2\, c\, \beta^2\, \gamma^2\, B^2 \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{2}{3}\left(\frac{m_e}{m}\right)^2 r_e^2\, c\, \gamma^2\, B_\perp^2$$

$$\beta \approx 1 \qquad B_\perp = B\, sen\alpha$$

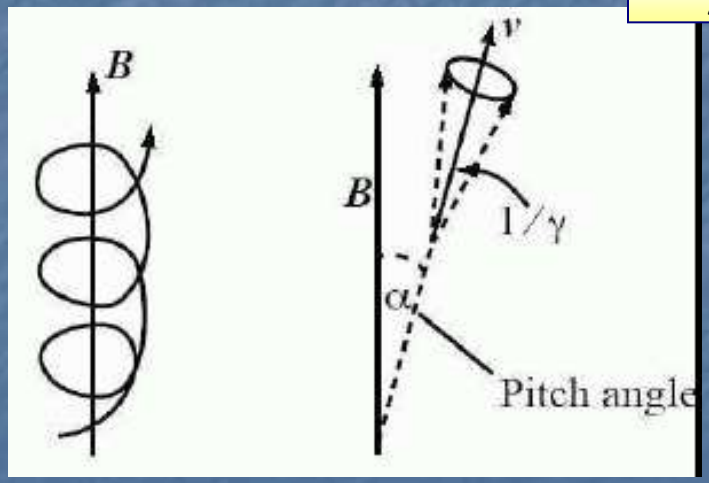
pérdida de energía
por unidad de tiempo

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

La pérdida de energía por unidad de tiempo se obtiene directamente a partir de la expresión de la potencia:

$$P = \left(\frac{dE}{dt}\right)\Bigg|_{\text{sincr}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{m_e}{m}\right)^2 r_e^2\, c\, \beta^2 \gamma^2 B^2 \operatorname{sen}^2\alpha = -\frac{2}{3}\left(\frac{m_e}{m}\right)^2 r_e^2\, c\, \gamma^2 B_\perp^2$$

La radiación es emitida en un cono con ángulo de apertura $\theta \approx \frac{1}{\gamma}$



La emisión será tanto más colimada cuanto más energética sea la partícula.

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

La pérdida de energía del electrón es

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)\bigg|_{\text{sincr}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{m_e}{m}\right)^2 r_e^2\, c\, \gamma^2\, B_\perp^2$$

donde $r_e = \dfrac{e^2}{m_e c^2}$

Las pérdidas van como m^{-2} → son 10^6 veces más **importantes** para los **electrones** que para los protones.

$m_e = 9.109\times10^{-31}\,\text{Kg}$ $\quad$ $m_p = 1.672\times10^{-27}\,\text{Kg}$

Considerando la sección eficaz de Thomson

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \approx 6.65\times10^{-25}\,\text{cm}^2$$

y promediamos sobre le ángulo α
suponiendo una distribución isotrópica $P(\alpha)\,d\alpha = 1/2\,\text{sen}\alpha\, d\alpha,\ 0 \le \alpha \le \pi$

se obtiene:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)\bigg|_{\text{sincr}} = -\frac{4}{3}\left(\frac{m_e}{m}\right)^2 \sigma_T\, c\, \gamma^2\, \omega_{\text{mag}} \approx -6.6\times10^{-4}\left(\frac{m_e}{m}\right)^2\left(\frac{B}{\text{G}}\right)^2 \gamma^2\, \frac{\text{eV}}{\text{seg}}$$

$$\omega_{\text{mag}} = \frac{B^2}{8\pi}$$

Densidad de energía magnética

Las pérdidas radiativas sufridas por las partículas modifican su distribución de energía.

Para pérdidas que van como

$$b(E) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -A E^2$$

como las pérdidas sincrotrónicas:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)\Bigg|_{\mathrm{sincr}} = -\frac{4}{3}\,\sigma_{\mathrm{T}}\, c\, \gamma^2\, \omega_{\mathrm{mag}} \approx -6.6\times10^{-4}\left(\frac{B}{\mathrm{G}}\right)^2 \gamma^2\, \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{seg}}$$

A partir de la solución para la distribución de partículas en estado estacionario obtenida a partir de la ecuación de difusión

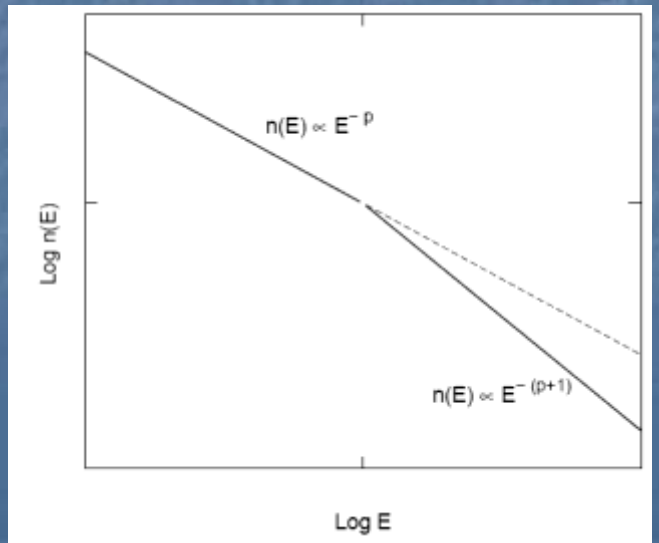
$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - \frac{\partial}{\partial E}\left[b(E)n(E)\right] + Q(E)$$

$$n(E) = -\frac{K\,E^{-(p-1)}}{(p-1)\,b(E)}$$

para una inyección de partículas con ley de potencias

$$Q(E) = K\,E^{-p}$$

$$n(E) \propto E^{-(p+1)}$$



El espectro de electrones se hace *más blando respecto de la inyección*, incrementándose en 1 la potencia de E

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)\bigg|_{\text{sincr}} = -\frac{4}{3}\,\sigma_{\text{T}}\,c\,\gamma^2\,\omega_{\text{mag}} \approx -6.6\times10^{-4}\left(\frac{B}{\text{G}}\right)^2\gamma^2\,\frac{\text{eV}}{\text{seg}}$$

Pérdida total de energía por radiación sincrotrón
de un electrón con factor de Lorentz γ

La emisión no es monoenergética.
La **distribución de energía de la potencia emitida:**

$$P(\gamma, E_{\text{ph}}, \alpha) = \frac{\sqrt{3}\,e^3}{h m_{\text{e}}\,c^2}\,B\,sen\alpha\,\underbrace{\frac{E_{\text{ph}}}{E_{\text{c}}}\int_{E_{\text{ph}}/E_{\text{c}}}^{\infty}\kappa_{5/3}(\eta)\,d\eta}_{F(x),\;\; x = E_{\text{ph}}/E_{\text{c}}}$$

Obtenida a partir de la transformada de Fourier del campo eléctrico de los pulsos sincrotrón

Donde:

$$E_{\text{ph}} = h\nu$$

$\kappa_{5/3}$ Función de Bessel de orden 5/3

$$E_{\text{c}} = h\nu_{\text{c}} = h\frac{\omega_{\text{c}}}{2\pi} = \frac{3h}{4\pi}\frac{e\,B_{\perp}\,\gamma^2}{m\;c}$$

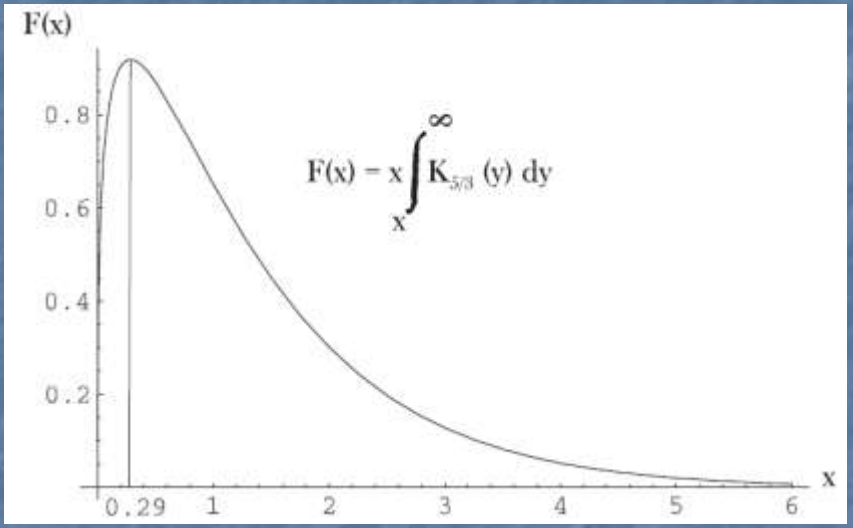
Energía crítica

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

$F(x),\ \ x = E_{\mathrm{ph}} / E_{\mathrm{c}}$

$$E_{\max} \approx 0.29\, E_{\mathrm{c}} = 5\times 10^{-15} \left(\frac{m_e}{m}\right)\left(\frac{B_\perp}{\mathrm{G}}\right)\gamma^2\ \mathrm{MeV}$$

La función alcanza su máximo en



Para tener $E_{\mathrm{ph,max}} \approx \mathrm{MeV}$:

- $B_\perp$ muy grande ó
- γ muy grande

Para que una partícula con $\gamma \approx 1000$ emita rayos gamma de energía de ~5 GeV Hace falta un campo magnético $B \approx 10^{12}\ \mathrm{G}$ (Ej.: púlsares)

Muy poca potencia para $\nu >> \nu_{\mathrm{c}}$

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

La **distribución de energía de la potencia emitida:**

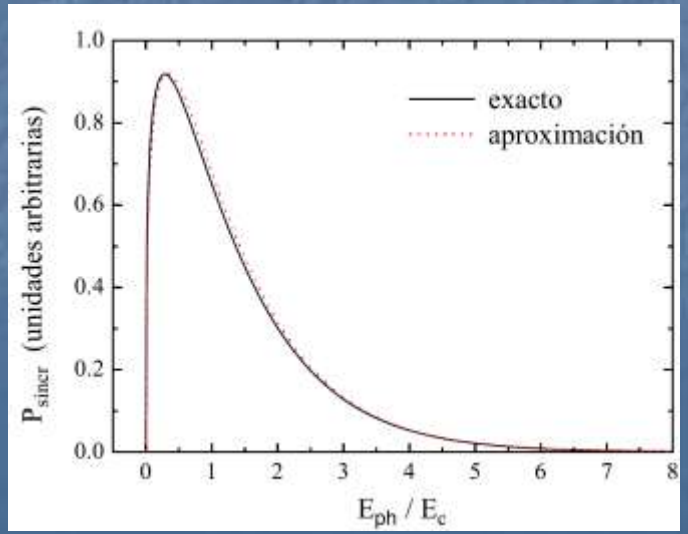
$$P(\gamma, E_{\mathrm{ph}}, \alpha) = \frac{\sqrt{3}\, e^3}{h m_{\mathrm{e}}\, c^2} B\, sen\alpha\, x \underbrace{\int_x^{\infty} \kappa_{5/3}(\eta)\, d\eta}_{F(x),\ \ x = E_{\mathrm{ph}}/E_{\mathrm{c}}}$$

$$E_{\mathrm{c}} = h\nu_{\mathrm{c}} = h\frac{\omega_{\mathrm{c}}}{2\pi} = \frac{3h}{4\pi}\frac{e B_{\perp} \gamma^2}{m_{\mathrm{e}}\, c}$$

Aproximación útil:

puede <u>aproximarse</u> dentro del rango dinámico 0.1 ≤ x ≤ 10 por una expresión mucho más simple:

$$F(x) = A x^{1/3} e^{-x}, \quad \text{para } 0.1 \le x \le 10., \quad \text{con } A \approx 1.85$$



Cerca del máximo $x = E_{\mathrm{ph}}/E_{\mathrm{c}} \approx 0.29$

esta expresión es exacta dentro del 1%.

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

Para una distribución espectral de partículas $n(E,\alpha)$

con $E^{\min} \le E \le E^{\max}$

La potencia resultante es:

$$P(E_{\rm ph}) = \int_{\Omega_\alpha} \int_{E^{\min}}^{E^{\max}} P(E\ ,E_{\rm ph},\alpha)\, n(E,\alpha) dE\ d\Omega_\alpha$$

Obtenida de integrar:

$$P(\gamma,E_{\rm ph},\alpha) = \frac{\sqrt{3}\, e^3}{h m_{\rm e}\, c^2} B\, sen\alpha \frac{E_{\rm ph}}{E_{\rm c}} \int_{E_{\rm ph}/E_{\rm c}}^{\infty} \kappa_{5/3}(\eta)\, d\eta$$

en la energía de las part. y pitch angle

Supongamos que la distribución de partículas es isotrópica y su forma funcional es la de una ley de potencias en la energía

$$n(E_{\rm e})\, {\rm d}E_{\rm e} = K_0\, E_{\rm e}^{-p}\, {\rm d}E_{\rm e}$$

Para valores de $E_{\rm ph}$ tales que $E_c(E^{\min}) << E_{\rm ph}$ y $E_c(E^{\max}) >> E_{\rm ph}$ los límites de la integral pueden reemplazarse por cero e infinito, respectivamente.

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

Para una distribución espectral de partículas

$$n(E_e)\,dE_e = K_0\,E_e^{-p}\,dE_e$$

$$P(E_{ph}) = a(p)\frac{(4\pi)^2 K_0 e^3 B^{\frac{p+1}{2}}}{hmc^2}\left(\frac{3he}{4\pi m^3 c^5}\right)^{\frac{p-1}{2}} E_{ph}^{-\frac{p-1}{2}}$$

Donde *a(p)* es una función del índice espectral,

$$a(p) = \frac{2^{(p-1)/2}\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{8\sqrt{\pi}\,(p+1)\,\Gamma\left(\frac{p+7}{4}\right)}$$

p	*a(p)*
1.0	0.283
1.5	0.147
2.0	0.103
2.5	0.085
3.0	0.074

El punto importante es que el espectro sincrotrón de una distribución de partículas tipo ley de potencias es otra ley de potencias en la energía de los fotones

$$P(E_{ph}) \propto E_{ph}^{-\delta}$$

$$\delta = \frac{p-1}{2}$$

RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

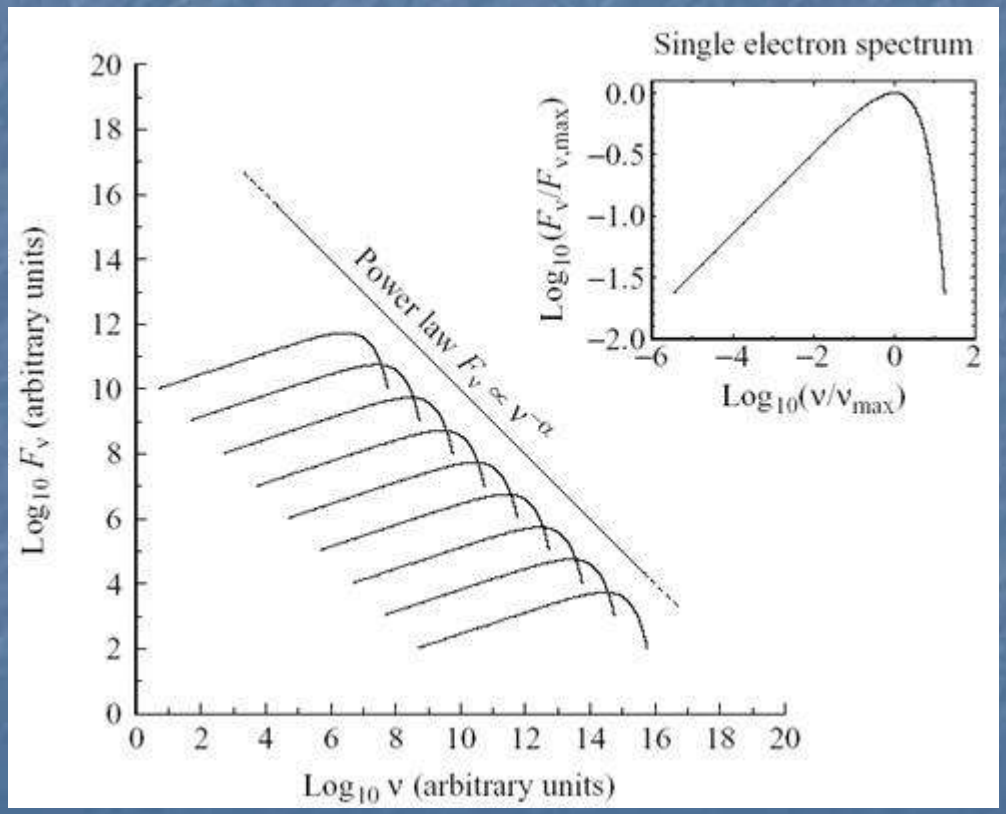
$$P(E_{\rm ph}) = a(p)\frac{(4\pi)^2 K_0 e^3 B^{\frac{p+1}{2}}}{hmc^2}\left(\frac{3he}{4\pi m^3 c^5}\right)^{\frac{p-1}{2}} E_{\rm ph}^{-\frac{p-1}{2}}$$

Aspecto importante:

$$I(E_{\rm ph}) \propto E_{\rm ph}^{-\delta}$$

$$\delta = \frac{p-1}{2}$$

Índice espectral



A partir del índice espectral de la radiación se puede inferir el índice de la distribución de partículas que generan la radiación.

La ley exponencial es la suma de la radiación producida por electrones individuales

ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN SINCROTRÓN

Los fotones sincrotrónicos pueden ser absorbidos por los propios electrones en presencia de un campo magnético. Esto conduce a una modificación del espectro sincrotrónico a bajas energías.

Puede mostrarse que el coeficiente de absorción de la radiación es:

$$\alpha_\nu = A\nu^{-(p+4)/2}$$

Donde ν es la frecuencia

A es una función complicada de *p*

$$A = \frac{\sqrt{3}\,e^3}{8\pi\, m}\left(\frac{3e}{2\pi\, m^3 c^5}\right)^{p/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, c\, B^{(p+2)/2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p+6}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+8}{4}\right)}$$

ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

La intensidad de la radiación resultante será

$$I(\nu) = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}(1 - e^{-\alpha_\nu l})$$

Donde j_ν es la emisividad de la fuente
(cantidad de energía emitida por unidad de tiempo,
por unidad de frecuencia,
por unidad de ángulo sólido,
por unidad de volumen)

l es la dimensión lineal

ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

- Cuando la fuente es transparente a su propia radiación → "ópticamente delgada":

$$\tau_\nu = \alpha_\nu l << 1$$

$$I(\nu) = \lim_{\alpha_\nu \to 0} \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}(1 - e^{-\alpha_\nu l}) \approx j_\nu l \propto \nu^{-\delta}$$

$$\delta = \frac{p-1}{2}$$

- Cuando la fuente es "ópticamente gruesa": $\tau_\nu = \alpha_\nu l \geq 1$ $\alpha_\nu = A\nu^{-(p+4)/2}$

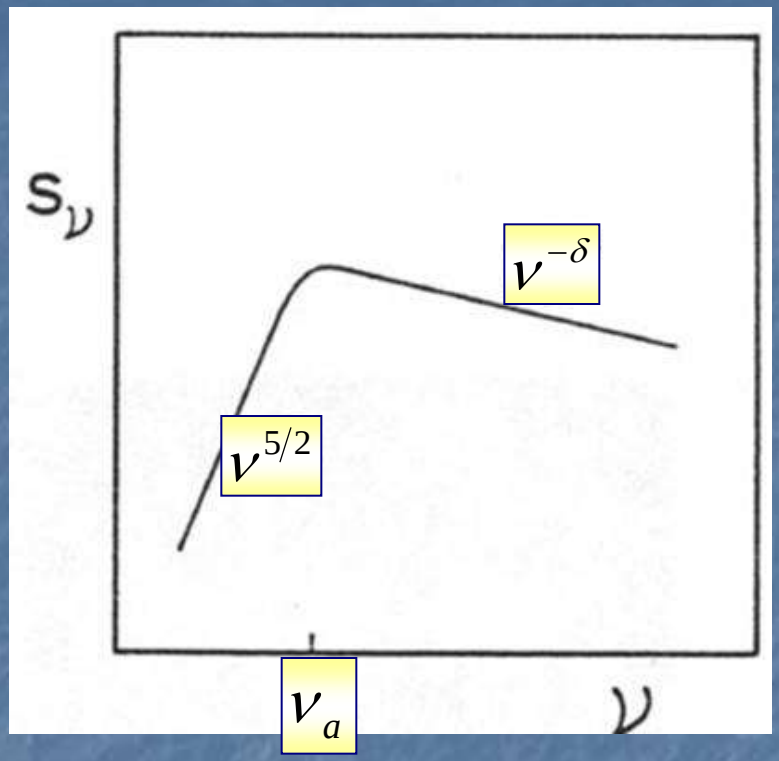
$$I(\nu) \approx \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \propto \frac{\nu^{-(p-1)/2}}{\nu^{-(p+4)/2}} = \nu^{\frac{-p+1}{2} + \frac{p+4}{2}} = \nu^{5/2}$$

Por lo tanto, la condición $\tau_\nu \cong 1$ divide el espectro de la fuente en dos regiones.

Si $\tau_\nu \cong 1$ para $\nu = \nu_a$, donde ν_a depende del tamaño de la fuente:

- $I(\nu) \propto \nu^{-\delta}$ para $\nu > \nu_a$
- $I(\nu) \propto \nu^{5/2}$ para $\nu < \nu_a$

ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)



$$\delta = \frac{p-1}{2}$$

$$\tau_\nu = \alpha_\nu \, l << 1$$

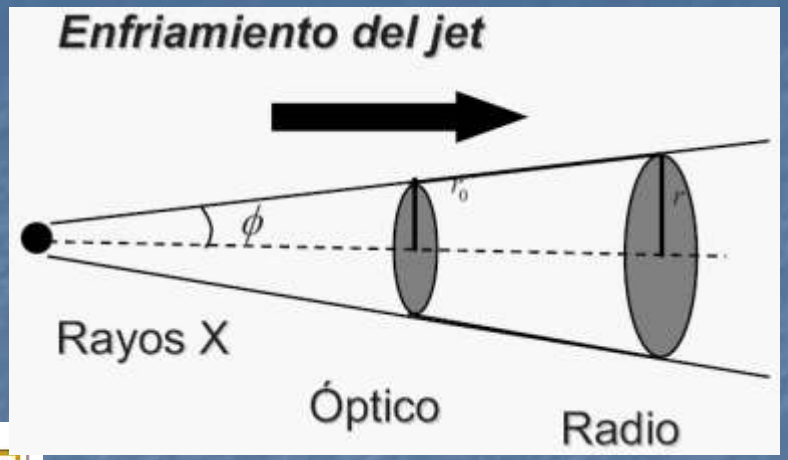
Por lo tanto, la condición $\tau_\nu \cong 1$ divide el espectro de la fuente en dos regiones.

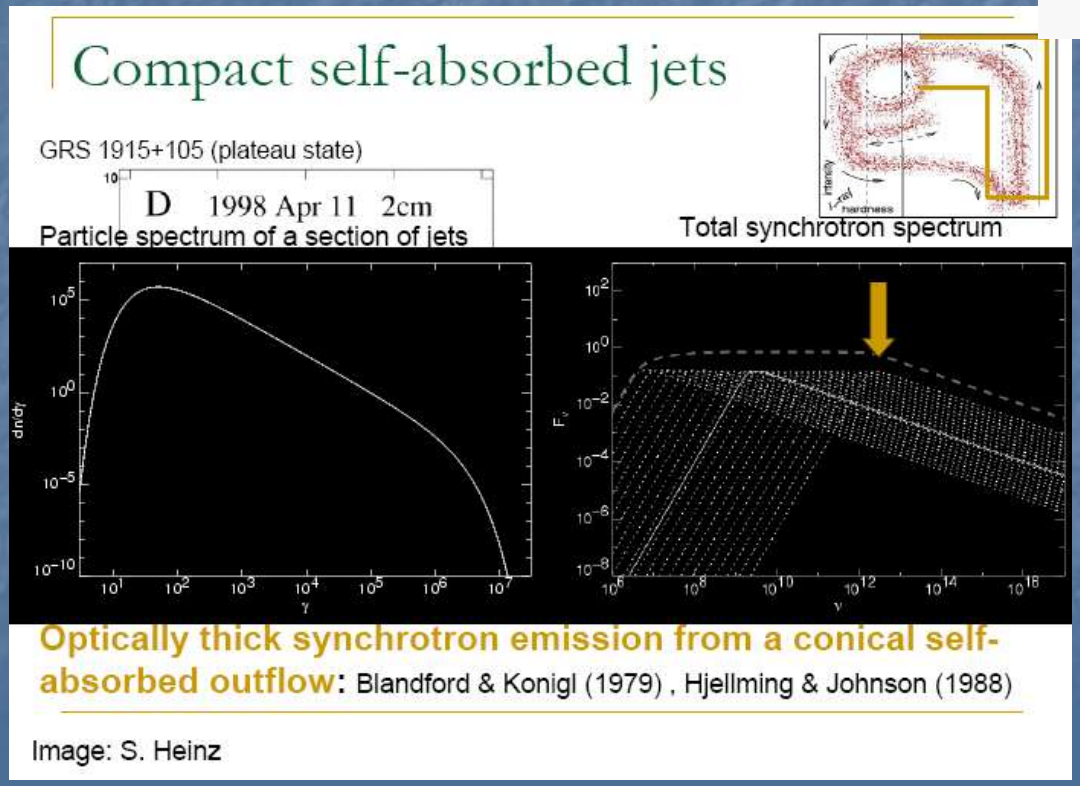
Si $\tau_\nu \cong 1$ para $\nu = \nu_a$, donde ν_a depende del tamaño de la fuente:

- $I(\nu) \propto \nu^{-\delta}$ para $\nu > \nu_a$
- $I(\nu) \propto \nu^{5/2}$ para $\nu < \nu_a$

ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

Una fuente en expansión, como un jet, presenta regiones de distintos tamaño que se hacen ópticamente delgados a distintas frecuencias.





Distintas regiones del jet emiten a distintas frecuencias

ESPECTRO CHATO

ABSORCIÓN DE LA RADIACIÓN SINCROTRÓN (cont.)

La presencia de un plasma térmico también puede modificar el espectro sincrotrónico, ya que el mismo puede absorver fotones.

El coeficiente de absorción es: $\alpha_\nu \propto \nu^{-2}$

$$I(\nu) \approx \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \propto \frac{\nu^{-\delta}}{\nu^{-2}} = \nu^{-(\delta-2)}$$

En el rango de frecuencias $100\,\mathrm{MHz} \leq \nu \leq 10\,\mathrm{GHz}$

y temperaturas $T \approx 10^4\ {}^\circ\mathrm{K}$

se tiene:

$$\alpha_\nu = 5.5\times10^{-2}\left(\frac{n_e}{\mathrm{cm}^{-3}}\right)\left(\frac{T}{10^4\ {}^\circ\mathrm{K}}\right)^{-3/2}\left(\frac{\nu}{100\,\mathrm{MHz}}\right)^{-2}\ \mathrm{Kpc}^{-1}$$

$$\nu_a = 23.4\left(\frac{n_e}{\mathrm{cm}^{-3}}\right)\left(\frac{T}{10^4\ {}^\circ\mathrm{K}}\right)^{-3/4}\left(\frac{l}{\mathrm{Kpc}}\right)^{1/2}\ \mathrm{MHz}$$

LÍMITE CUÁNTICO

Si el campo magnético donde son inyectados electrones muy relativistas es muy intenso, la aproximación clásica a la radiación sincrotrón puede dejar de ser válida y **pares electrón-positrón pueden ser creados.**

El umbral para que la probabilidad de que sucedan estos fenómenos cuánticos sea distinto de cero es $E_e > E_{e,\mathrm{crit}}$, con

$$E_{e,\mathrm{crit}} = m_e c^2 \frac{B_\mathrm{c}}{B}$$

Donde

E_e es la energía del electrón,
B es el campo magnético y

$$B_\mathrm{c} = m_e c^3 / e\hbar = 4.4 \times 10^{13}\ \mathrm{G}$$

Aquí, por ejemplo en un campo de 10^7 G,
electrones con energía E > 0.511 MeV ($4.4 \times 10^{13}/10^7$) ~ 2.2×10^{12} eV
manifestarán efectos cuánticos iniciando cascadas electromagnéticas.

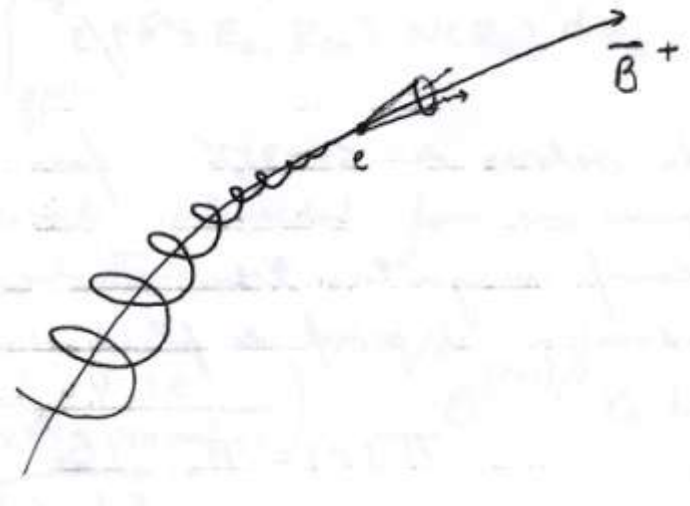
RADIACIÓN DE CURVATURA

El giroradio de una partícula de energía E en un campo magnético $\vec{B}$ es:

$$r_g = \frac{(E/\mathrm{eV})}{300\ z(B/\mathrm{G})}\,\mathrm{cm}$$

$$\text{cuando } B \to \infty, \quad r_g \to 0$$

La partícula comienza a moverse sobre la línea de campo.
En esta configuración, la fuerza de Lorentz se hace cero
Y la partícula se mueve "libre de fuerzas".
Sin embargo,
si la línea de campo tiene un cierto radio de curvatura R_c
la partícula radiará ya que está acelerada.



RADIACIÓN DE CURVATURA (cont.)

La energía perdida por la partícula es radiada en la dirección del movimiento dentro de un cono de ángulo $1/\gamma$.

La pérdida total de energía es la misma que en el caso sincrotrónico, excepto que el giroradio se reemplaza por el radio de curvatura de la línea de campo:

$$P(E_e, E_{\rm ph}) = \frac{\sqrt{3}e^2}{h\,R_{\rm c}}\frac{E_e}{mc^2}\frac{E_{\rm ph}}{E_{\rm c}}\int_{E_{\rm ph}/E_{\rm c}}^{\infty} K_{5/3}(\zeta)d\zeta$$

con $$E_c = \frac{3h}{4\pi}\frac{c}{R_c}\left(\frac{E_e}{mc^2}\right)^3 = \frac{3h}{4\pi}\frac{c}{R_c}\gamma^3$$

$$\approx \frac{2.96\times 10^{-5}}{(R_{\rm c}/{\rm cm})}\gamma_e^3$$

En vez de $$E_{\rm c} = h\nu_{\rm c} = h\frac{\omega_{\rm c}}{2\pi} = \frac{3h}{4\pi}\frac{eB_\perp\gamma^2}{m_{\rm e}c}$$

$$r_{\rm g} = \frac{\gamma m c v \,{\rm sen}\,\alpha}{eB}$$

Energía característica de la radiación de curvatura

RADIACIÓN DE CURVATURA (cont.)

La tasa total de pérdida de energía se calcula integrando el espectro de emisión sobre la energía de los fotones,

$$\left(\frac{dE_e}{dt}\right)_{\mathrm{curv}} = -\int P(E, E_{\mathrm{ph}})\, dE_{\mathrm{ph}} = -\frac{2}{3}\frac{e^2 c}{R_{\mathrm{c}}^2}\gamma_e^4$$

No depende de la intensidad del campo magnético sino sólo de su radio de curvatura.

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)\Bigg|_{\mathrm{sincr}} = -\frac{4}{3}\left(\frac{m_e}{m}\right)^2 \sigma_{\mathrm{T}}\, c\, \gamma^2\, \omega_{\mathrm{mag}}$$

Tampoco depende de la masa como en el caso sincrotrónico.

Si el campo magnético es regular, la radiación de curvatura estará polarizada como la sincrotrón.

RADIACIÓN DE CURVATURA (cont.)

Si se tiene una inyección de electrones con una distribución $N(E_e)\mathrm{d}E_e$ en un campo con curvatura R_c ,

El espectro total emitido por radiación de curvatura se obtiene integrando en la energía de los electrones,

$$P\left(E_{\mathrm{ph}}\right)=\int_{E_e^{\min}}^{E_e^{\max}} P\left(E_{\mathrm{ph}},E_e\right)N\left(E_e\right)\mathrm{d}E_e$$

$$P(E_e,E_{\mathrm{ph}})=\frac{\sqrt{3}e^2}{h\,R_{\mathrm{c}}}\frac{E_e}{mc^2}\frac{E_{\mathrm{ph}}}{E_{\mathrm{c}}}\int_{E_{\mathrm{ph}}/E_{\mathrm{c}}}^{\infty}K_{5/3}(\zeta)d\zeta$$

El resultado no dependerá de $\vec{B}$ sino de R_c .

Cuanto menor sea R_c mayor será la potencia radiada.

RADIACIÓN DE CURVATURA (cont.)

Si el índica espectral de la inyección de electrones es p,

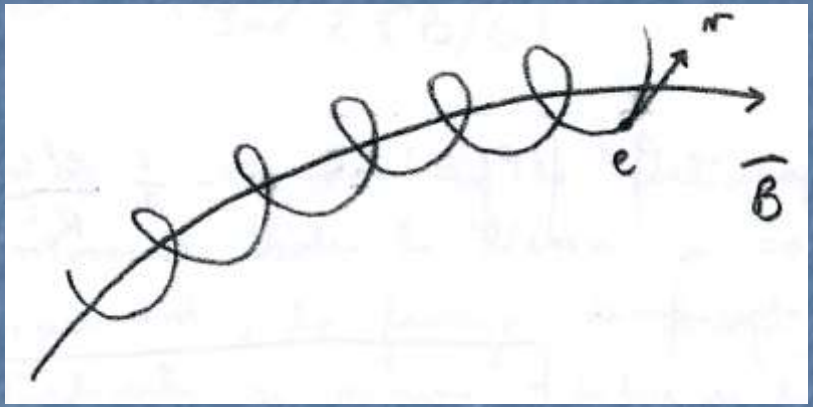
$$Q(E) = K\,E^{-p}$$

el efecto de las pérdidas por radiación de curvatura es hacer más blando el espectro en estado estacionario:

$$n(E) \propto E^{-(p+3)}$$

RADIACIÓN DE CURVATURA (cont.)

Si una partícula se mueve alrededor de una línea de campo con curvatura finita, en general se producirán tanto radiación de curvatura como sincrotrón:



RADIACIÓN DE CURVATURA (cont.)

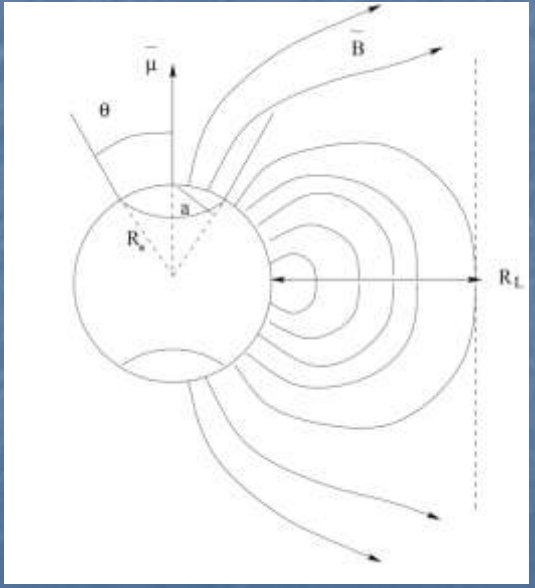
Uno puede igualar las pérdidas sincrotrón con las de curvatura para definir un ángulo crítico $\alpha_{\rm crit}$, de tal forma que la radiación de curvatura domina para $\alpha < \alpha_{\rm crit}$:

$$\sin(\alpha_{\rm crit}) = \frac{\gamma m_e c^2}{eBR_{\rm c}} = \frac{r_{\rm g}}{R_{\rm c}}$$

Cuando $\alpha \approx \alpha_{\rm crit}$ ambos procesos deben tenerse en cuenta.

La radiación de curvatura es un proceso importante en la región polar de los púlsares. Allí el radio de curvatura de las líneas de campo magnético vale:

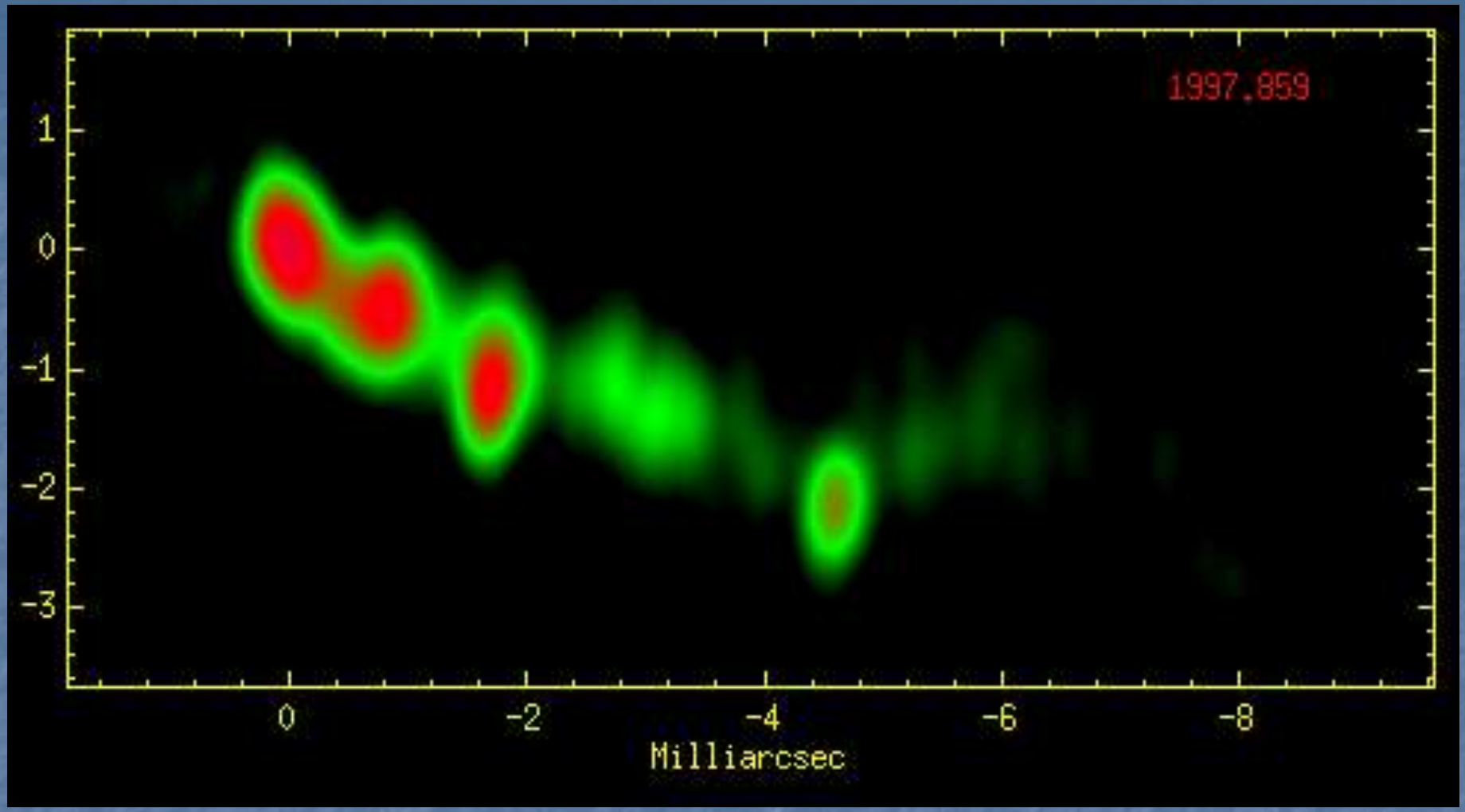
$$R_{\rm c} \approx \left(\frac{c\,R_*}{\Omega}\right)^{1/2}$$



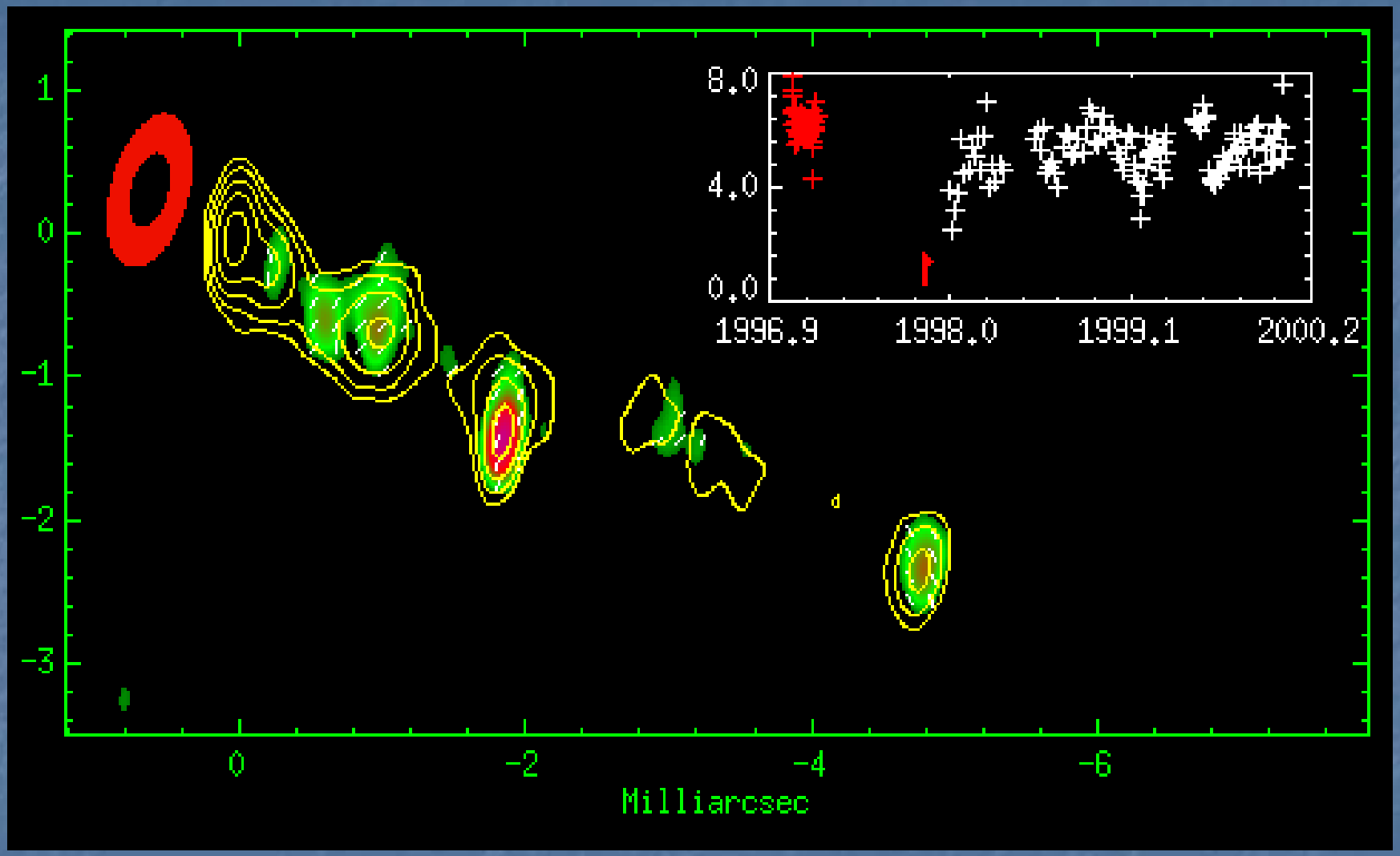
NOTA: Sea *C* una curva en el plano *(x, y)* con una parametrización *C(t) = (x(t), y(t))*. La curvatura es:

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

$$\kappa = 1/R_{\rm c}$$



Radio galaxy
3C 120
(d = 140 Mpc)


1
0
-1
-2
-3
0
-2
-4
-6
Milliarcsec
8.0
4.0
0.0
1996.9
1998.0
1999.1
2000.2