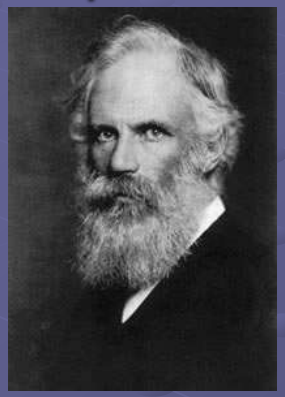
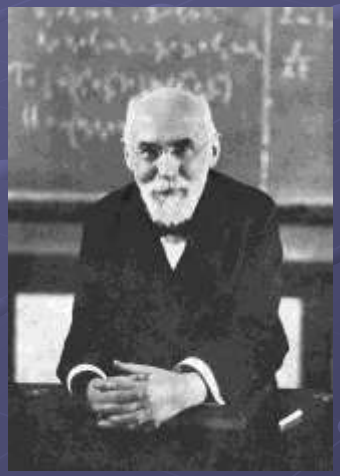
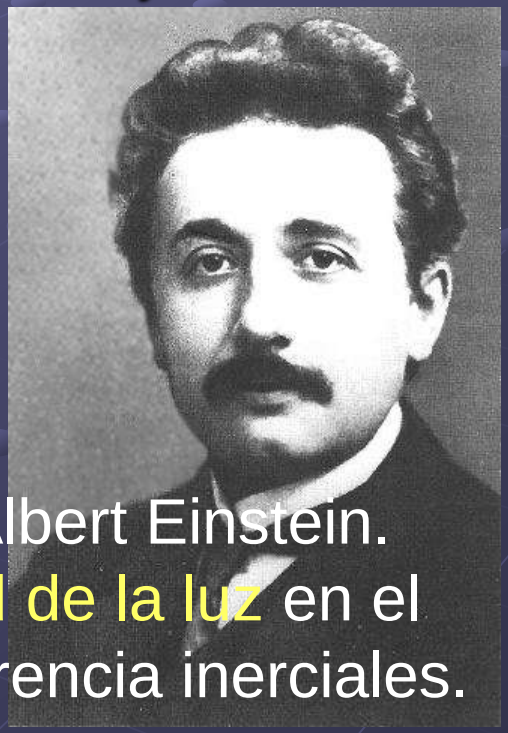
EL ESPACIO-TIEMPO
Y
LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Teoría especial de la Relatividad

- Precursores: FitzGerald, Lorentz, Poincaré.
- Junio de 1905, Einstein: *Annalen der Physik* 17, 891
- Septiembre de 1905, Einstein: *Annalen der Physik*, 18, 639



Es una teoría física publicada en 1905 por Albert Einstein. Surge de la observación de que la velocidad de la luz en el vacío es igual en todos los sistemas de referencia inerciales.

Las medidas de tiempo y espacio son relativas, y no absolutas, ya que dependen del estado de movimiento del observador.

Cuando se observa el mundo,
por poca atención que se preste, resulta obvio que en él hay **cosas** y que estas tienen **propiedades**.

La característica definitoria de las **cosas**
es que se asocian para formar nuevas cosas.

Así, las moléculas forman células,
las células organismos,
los organismos pueden formar sociedades, etc.

Las **propiedades** de las cosas son de dos tipos:
intrínsecas y relacionales.

Propiedades de las cosas:

- intrínsecas:
  sólo dependen de la cosa en cuestión
  (por ejemplo, la carga de la partícula)
- relacionales:
  dependen también de otras cosas
  (por ejemplo la velocidad de la partícula).

Cuando las cosas se combinan
para formar **nuevas cosas**,
las cosas resultantes pueden tener
propiedades emergentes,
que las cosas constituyentes no tienen.

} intrínsecas o relacionales.

Por ej., un gas puede tener temperatura y presión,
propiedades de las que carecen las moléculas constitutivas.

Dada una cosa x
llamaremos $\mathcal{P}$ al conjunto de todas sus propiedades:
intrínsecas o
relacionales.

$$\mathcal{P} = \{p/p_x\}$$

Los elementos de $\mathcal{P}$ pueden ser representados
por funciones matemáticas
(supuesto metodológico de la Ciencia).

Llamamos espacio de estados de una cosa x : $S(x)$
al conjunto de funciones
(de dominio M)
que representan a los elementos de $\mathcal{P}$.

Una **ley** es una restricción sobre $S(x)$.

Nos dice que las propiedades de una cosa
no pueden tomar cualquier valor.

Llamaremos $S_L(x)$ al conjunto de
estados legales de x .

Estos son los estados accesibles, en principio,
a la cosa x de acuerdo con
las restricciones legales que imperan sobre ella.

El estado real de una cosa concreta x
es un punto de $S_L(x)$

Un **cambio** es un par ordenado de estados de la cosa que cambia:

$$(s_1, s_2) \in E_L(x) = S_L(x) \times S_L(x)$$

El conjunto de todos los cambios de una cosa es el espacio de eventos $(E_L(x))$ de esa cosa.

Definimos ahora el espacio-tiempo como:

El **espacio-tiempo** es el conjunto de todos los **eventos** de todas las **cosas**

Espacio-tiempo

Todo lo que ha ocurrido, ocurre u ocurrirá
a alguna cosa es un punto (elemento)
del espacio-tiempo.

Un proceso (sucesión de cambios)
es una línea (o subconjunto) del espacio-tiempo.

Espacio-tiempo

Debemos ahora caracterizar matemáticamente al espacio-tiempo si queremos hacer predicciones precisas sobre ciertos eventos.

Postulado:
El espacio-tiempo se representa por una variedad real cuadridimensional diferenciable

Una **variedad real** es un conjunto que puede ser completamente cubierto por subconjuntos cuyos elementos pueden ser puestos en correspondencia 1 a 1 con subconjuntos de $\mathbb{R}^4$
(si la variedad es cuadri-dimensional; $\mathbb{R}^n$ si es n-dimensional).

Espacio-tiempo

En forma estricta,
M es una variedad real n-dimensional diferenciable si y solo si:

1. M es un conjunto
2. $\exists O / O = \{O_\alpha \subset M\}$
3. Todo elemento p $\in$ M es tal que $\exists O_\alpha \in O / p \in O_\alpha$
4. $\forall_\alpha \exists \Phi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$, con U_α subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$
5. Si existen dos conjuntos O_1 y $O_2 / O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ ($\emptyset$ = vacío) $\Rightarrow \Phi_2 . \Phi_1^{-1}$ que pone en correspondencia 1 a 1 los puntos de $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ con los de $U_2 \subset \mathbb{R}^n$.

Los subconjuntos O_α cubren todo M.

Espacio-tiempo

Vemos de esta definición por qué postulamos una variedad para representar el espacio-tiempo:

- independientemente de la estructura geométrica de éste, podemos adoptar coordenadas (números reales) para describir procesos que ocurren en él,

- siempre podemos encontrar una transformación apropiada que permita cambiar de sistema de referencia.

Fundamental: ya que los procesos físicos deben ser independientes de la forma en que los describimos en nuestros lenguajes matemáticos.

Espacio-tiempo

Dado un elemento $p \in M$ podemos designar distintos sistemas de coordenadas.

Por ejemplo:

$$p \longleftrightarrow \{x^\mu\}$$

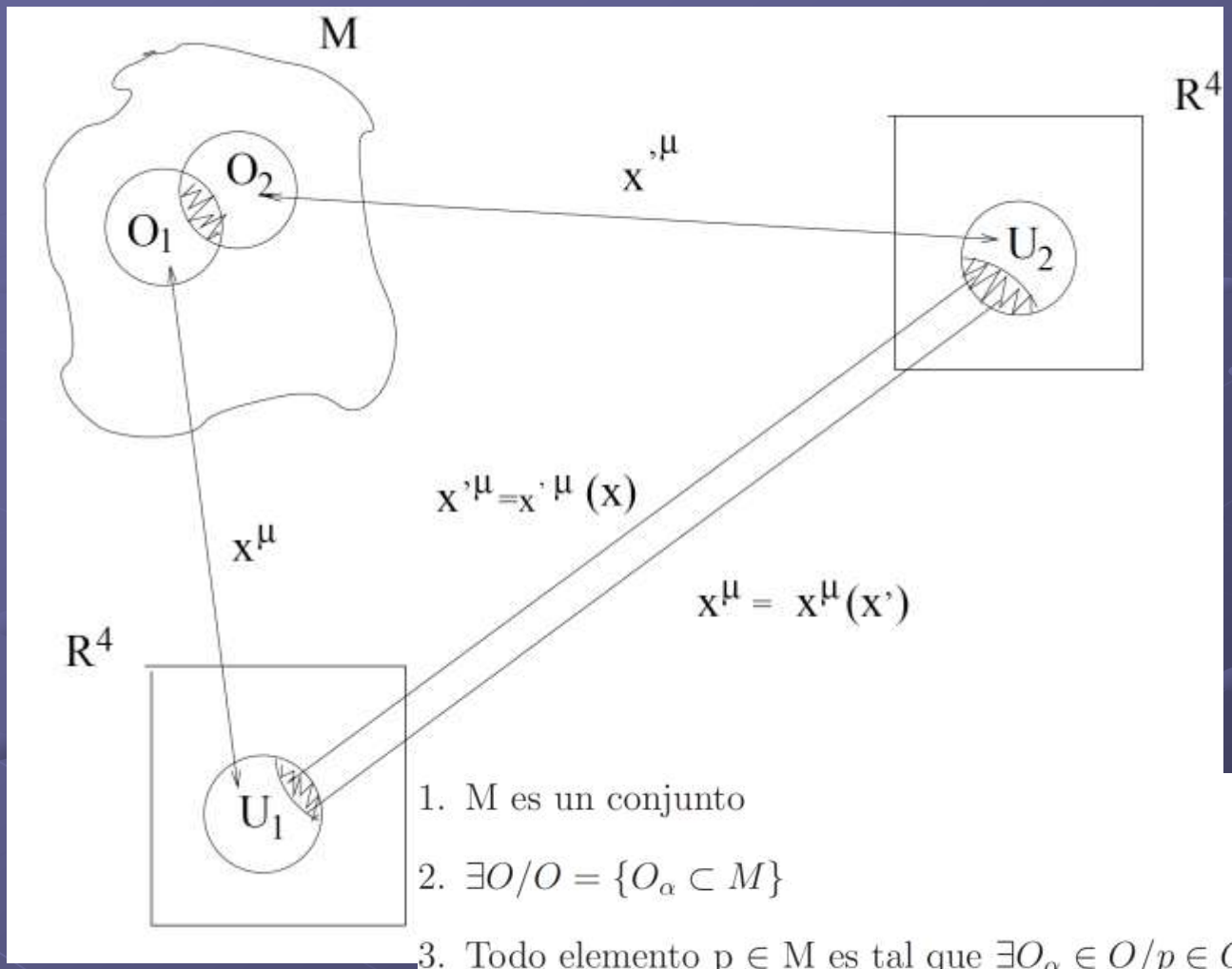
$$p \longleftrightarrow \{x'^\mu\}$$

$$\exists \quad x'^\mu = x'^\mu(\{x^\mu\})$$

Donde $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Adoptamos 4 coordenadas porque el mundo parece ser 4-dimensional,
pero en principio no hay limitaciones en ese sentido.

Espacio-tiempo



Esquema para una variedad cuadri-dimensional.

$$p \longleftrightarrow \{x^\mu\}$$

$$p \longleftrightarrow \{x'^\mu\}$$

$$\exists \qquad x'^\mu = x'^\mu(\{x^\mu\})$$

1. M es un conjunto
2. $\exists O / O = \{O_\alpha \subset M\}$
3. Todo elemento p $\in$ M es tal que $\exists O_\alpha \in O / p \in O_\alpha$
4. $\forall_\alpha \exists \Phi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$, con U_α subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$
5. Si existen dos conjuntos O_1 y $O_2 / O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ ($\emptyset$ = vacío) $\Rightarrow \Phi_2.\Phi_1^{-1}$ que pone en correspondencia 1 a 1 los puntos de $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ con los de $U_2 \subset \mathbb{R}^n$.

Espacio-tiempo: objetos y estructuras sobre la var.

Para poder hacer física sobre nuestra variedad
(esto es, para poder describir procesos reales)
necesitamos definir sobre ella objetos matemáticos
que puedan ser utilizados luego
para representar objetos físicos y sus propiedades.

Los objetos sobre la variedad se definen por
sus propiedades de transformación
frente a cambios de coordenadas $\{x^\mu\} \longleftrightarrow \{x'^\mu\}$

El objeto más simple es un escalar:

$$\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu)$$

Espacio-tiempo: objetos y estructuras sobre la var.

Escalar: $\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu)$

El valor del escalar no cambia cuando el sistema coordenado cambia de $\{x^\mu\} \longleftrightarrow \{x'^\mu\}$

Notar que la forma ϕ **si puede cambiar**.

Espacio-tiempo: objetos y estructuras sobre la var.

Introduzcamos ahora un objeto de cuatro componentes: A^μ

Si realizamos un cambio de coordenadas

$$\{x^\mu\} \longleftrightarrow \{x'^\mu\}$$

$$A'^\mu = \sum_{\nu=1}^{4} A^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

De aquí en más adoptaremos la convención de la suma de Einstein: se suma sobre índices repetidos (de 0 a 3, o a *n*, dependiendo de la variedad).

$$A'^\mu = A^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

Espacio-tiempo: objetos y estructuras sobre la var.

Objeto de cuatro componentes: A^μ

Se transforma ante
un cambio de coordenadas: $$A'^\mu = A^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

Un objeto que se transforma de esta manera
es un vector contravariante.

Un ejemplo de este tipo de objetos es
la línea que une dos puntos
arbitrariamente próximos de la variedad:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Espacio-tiempo: objetos y estructuras sobre la var.

Vector **contravariante** se transforma como:

$$A'^{\mu} = A^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

Los vectores **covariantes** se definen por medio de:

$$B'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} B_{\nu}$$

Un ejemplo de vector covariante es el gradiente de un campo escalar:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}$$

Espacio-tiempo: objetos y estructuras sobre la var.

En general, a los vectores sobre la variedad
se los llama tensores de rango 1.

Podemos definir tensores
contravariantes (o covariantes) de rango arbitrario:

$$T'^{\overbrace{\ldots\mu\ldots}^{n}}_{\underbrace{\ldots\nu\ldots}_{m}} = \ldots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \ldots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \ldots T^{\ldots\rho\ldots}_{\ldots\sigma\ldots}$$

El tensor es
n veces contravariante y
m veces covariante.

Espacio-tiempo: objetos y estructuras sobre la var.

Ejemplos de tensor de rango 2:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}$$

(2 veces contravariante)

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta}$$

(2 veces covariante)

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T^{\alpha}_{\beta}$$

(1 vez contravariante
1 vez covariante)

Un ejemplo de tensor de rango 2 es
el tensor de energía-impulso
que caracteriza a cualquier sistema físico.

Espacio-tiempo: objetos y estructuras sobre la var.

Un campo tensorial definido sobre alguna región de la variedad es una asociación de un tensor de la misma variedad a cada punto de la región.

$$p \longrightarrow \underbrace{T^{\ldots\mu\ldots}_{\ldots\nu\ldots}(p)}$$

es el valor del tensor en p

El campo tensorial se llama continuo o diferenciable si las componentes del tensor lo son.

Espacio-tiempo

Debido a sus propiedades de transformación,
toda relación entre tensores mantendrá su relación
al cambiar de sistema de coordenadas.

Como se espera que las leyes de la física
tengan la misma forma en todos los sistemas
coordenados, deben ser expresadas
en forma de ecuaciones tensoriales.

Se dice entonces que son covariantes.
La covariancia es invariancia de forma.

Espacio-tiempo

Aunque hemos definido objetos sobre la variedad que representa al espacio-tiempo,
aún no sabemos medir distancias entre puntos (eventos) de la variedad.

Para poder medir distancias debemos asignar una estructura geométrica a la variedad.

Esto se hace introduciendo un tensor de rango 2 llamado tensor métrico.
El mismo nos dice cómo calcular
la distancia *ds* entre dos eventos arbitrariamente próximos.

Espacio-tiempo

El tensor métrico nos dice cómo calcular la distancia ds entre dos eventos arbitrariamente próximos ϵ_1 y ϵ_2

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

tensor métrico

En un espacio-tiempo euclídeo, por ejemplo,

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

traza +4

$$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Espacio-tiempo

El tensor métrico tiene un contenido empírico: depende de la naturaleza del Mundo.

Durante más de 2000 años se pensó que la geometría del espacio-tiempo era euclídea.

Entre 1905 y 1908 Einstein y Minkowski propusieron que el tensor métrico del espacio-tiempo es un tensor de rango 2 y traza -2:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tensor de "Minkowski"

Las ideas sobre el espacio y el tiempo que deseo mostrarles hoy se han desarrollado en el suelo firme de la física experimental, en la cual yace su fuerza. Su tendencia es radical. A partir de ahora el espacio y el tiempo por separado descienden al rango de sombras y tan sólo una unión de ambos puede conservar su sustantividad.

H. Minkowski, Köln, September 21st, 1908

Espacio-tiempo

Usando el tensor de Minkowski,
el intervalo entre dos eventos resulta ser:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dn^\nu \\ &= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \end{aligned}$$

La geometría resultante es “pseudoeuclídea”
(porque ds^2 no es definido positivo).

Un punto importante a notar es que $\eta_{\mu\nu}$
tiene el mismo valor sobre toda la variedad
(esta condición se relaja en la Teoría General de la Relatividad,
donde $g_{\mu\nu}$ es un campo tensorial cuyas componentes son
funciones determinadas por el contenido de energía-impulso
de los sistemas físicos en el espacio-tiempo).

Espacio-tiempo

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es inmediato establecer que dada una métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ tenemos una inversa de forma que:

$$\eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

Ahora las tres coordenadas que aparecen con signo negativo en el intervalo se los suele denominar espaciales:

$$x^1 = x \ , \ x^2 = y \ , \ x^3 = z$$

La coordenada que aparece con el signo opuesto es llamada temporal: $x^0 = ct$

c es una constante que permite uniformizar las dimensiones, que en principio no tienen por qué ser iguales.
Esta constante coincide con el valor de la velocidad de la luz en el vacío.

Espacio-tiempo

En coordenadas esféricas polares tenemos:

$$x^\mu = (ct,\ r,\ \theta,\ \phi)$$

$$\begin{aligned} \text{donde} \quad x &= r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned}$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

Espacio-tiempo

La introducción del intervalo nos permite dividir la variedad, en cada punto (evento), en tres regiones bien definidas:

$$ds^2 < 0 \quad \text{Región “tipo espacio”}$$
$$ds^2 = 0 \quad \text{Región “tipo luz”}$$
$$ds^2 > 0 \quad \text{Región “tipo tiempo”}$$

Sólo las dos últimas regiones son accesibles a sistemas físicos.

La región tipo luz, en particular, sólo es accesible a sistemas que se muevan a la velocidad de la luz.

Espacio-tiempo

Si reescribimos:

$$ds^2 = dt^2 \left[c^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right] = dt^2 [c^2 - v^2]$$

donde v es la velocidad del sistema.

Obviamente:

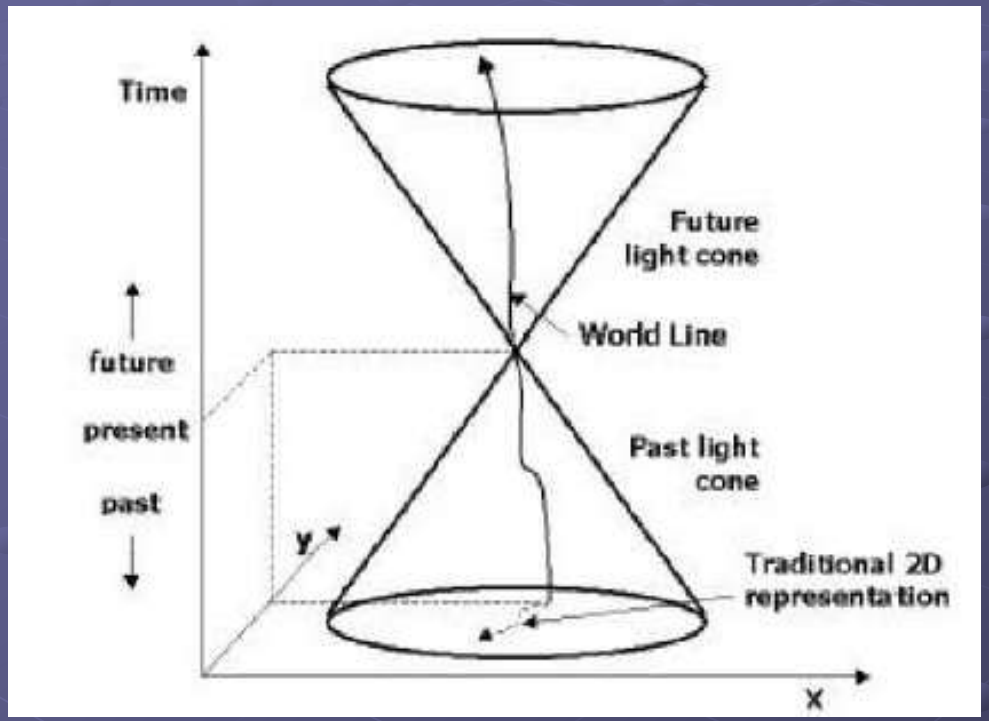
$$ds^2 < 0 \iff v > c$$
$$ds^2 = 0 \iff v = c$$
$$ds^2 > 0 \iff v < c$$

Como nunca ocurre que $v > c$
(esto lo sabemos de electromagnetismo),

➡ los eventos en la región tipo espacio no pueden estar causalmente ligados a eventos de las otras regiones.

Espacio-tiempo

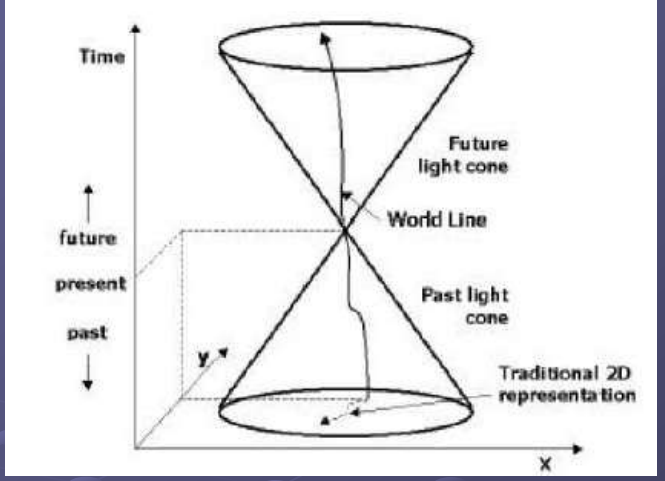
Esta situación puede representarse gráficamente a través del llamado cono de luz:



Al graficar el cono de luz
- hemos removido la dimensión *z* y
- hemos fijado unidades tales que c = 1.

Las partículas materiales que tienen un estado ϵ_0 coincidente con el origen sólo pueden sufrir cambios o procesos que los lleven a estados que estén dentro del cono.
Para ir fuera del cono los procesos deberían ocurrir a una velocidad mayor que c.

Espacio-tiempo

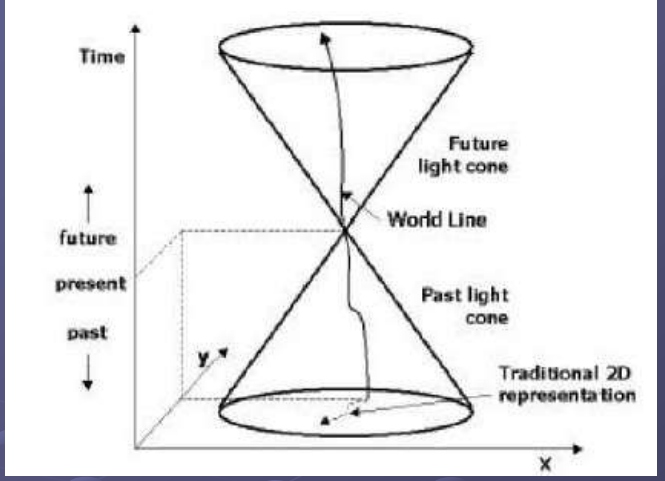


El cono de luz futuro englobaría todos los "efectos" posibles de un evento dado, mientras que el cono de luz pasado englobaría todas las "causas" posibles de dicho evento.

Dicho de otro modo, todo aquello que percibimos en cada instante se halla contenido en nuestro particular cono de luz pasado, mientras que todo aquello sobre lo que podríamos influir se encuentra contenido en nuestro cono de luz futuro.

Las partículas materiales que tienen un estado coincidente con el origen sólo pueden sufrir cambios o procesos que los lleven a estados que estén dentro del cono.

Espacio-tiempo



Todos los demás eventos que están en “cualquier otro sitio”, más allá de los conos de E, nunca afectarán
ni podrán ser afectados
por lo que suceda en E.

Los sucesos que están fuera del cono de luz no nos afectan, y por lo tanto se dice de ellos que están situados en zonas del espacio-tiempo que no tienen **relación de causalidad** con la nuestra.

Ejemplo:

Imaginemos, que en la galaxia Andrómeda, situada a 2 millones de años luz de nosotros, sucedió un cataclismo cósmico hace 100.000 años.

Dado que:

1) la luz de Andrómeda tarda 2 millones de años en llegar hasta nosotros y
2) nada puede viajar a una velocidad superior a la de los fotones,

⇒ no tenemos manera de enterarnos lo que sucedió en dicha Galaxia hace tan sólo 100.000 años.

Se dice por lo tanto que el intervalo existente entre dicha hipotética catástrofe cósmica y nosotros, observadores del presente, es un *intervalo espacial* ($ds^2 < 0$), y por lo tanto, no puede afectar a los individuos que en el presente viven en la Tierra: Es decir, no existe relación de causalidad entre ese evento y nosotros.

Espacio-tiempo

Es posible definir el tiempo propio de un sistema físico que se mueve con velocidad *v*
respecto de un cierto sistema coordenado como

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2$$

Este es el tiempo que mide un reloj fijo al sistema físico.

(intervalo de tiempo que ha medido con su reloj entre su paso por ambos eventos)

Notar que:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \tfrac{1}{c^2}(c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \\ &= dt^2 \left\{ 1 - \tfrac{1}{c^2} \left[\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dt}\right)^2 \right] \right\} \\ &= dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Espacio-tiempo

Si introducimos el factor de Lorentz como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{con } \beta = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}$$

$$\Rightarrow \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

Debido a que $\gamma \geq 1$,
el tiempo respecto al sistema propio se dilata.

Para un sistema con $\beta = \beta(t)$,

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma(t)}$$

Grupo de Galileo

Recordemos que:

Las transformaciones de coordenadas Galileanas

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{d}$$
$$t' = t + \tau$$

$\mathbf{v}, \mathbf{d}, \tau$ Constantes reales

R Matriz ortogonal real

Si O y O´ usan el sistema de coordenadas $\mathbf{x}$ $\mathbf{x}'$

O´ ve los ejes coordenados de O
- rotados en una cantidad R
- moviéndose a una velocidad $\mathbf{v}$
- desplazado a t=0 en una cantidad $\mathbf{d}$

O´ ve el reloj de O retrasado con respecto al suyo por un tiempo τ

Grupo de Galileo

Las transformaciones de coordenadas Galileanas

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{d}$$
$$t' = t + \tau$$

forman un **grupo de 10 parámetros**:

- 3 ángulos de Euler para R
- 3 componentes para $\mathbf{v}$ y $\mathbf{d}$
- τ

Las leyes de movimiento de Newton
son invariantes bajo
transformaciones de coordenadas Galileanas

Grupo de Galileo

Por ejemplo, las ecuaciones para un sistema de partículas puntuales que interaccionan gravitatoriamente

$$m_N \frac{d^2\mathbf{x}_N}{dt^2} = G\sum_M \frac{m_N m_M \left(\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N\right)}{\left|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N\right|^3}$$

toman la misma forma cuando son expresadas en términos del nuevo conjunto de coordenadas del espacio-tiempo:

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{d}$$
$$t' = t + \tau$$

La invariancia de las leyes de movimiento bajo estas transformaciones se denomina invariancia Galileana, o Principio de Relatividad Galileano.

Grupo de Galileo

Sin embargo, existen muchos otros tipos de transformaciones que **no** dejan invariantes las ecuaciones de movimiento.

Por ejemplo, las ecuaciones $$m_N \frac{d^2\mathbf{x}_N}{dt^2} = G\sum_M \frac{m_N m_M \left(\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N\right)}{\left|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N\right|^3}$$

No retienen su forma si las transformamos a un sistema acelerado o en rotación, donde $\mathbf{v}$ y R dependen de t.

Las ecuaciones de movimiento pueden conservar su forma sólo en sistemas de referencia inerciales

Principio de Relatividad Galileano y Teoría de Electrodinámica

La teoría de electrodinámica presentada por James C. Maxwell en 1864 no satisface el Principio de Relatividad Galileano.

Las ecuaciones de Maxwell predicen que la velocidad de la luz en el vacío es una constante universal *c*.

Si esto es cierto en un sistema de coordenadas $\mathbf{x}$, t

no será cierto en un sistema de coordenadas en movimiento $\mathbf{x}'$, t' definido por las transformaciones Galileanas

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{d}$$

$$t' = t + \tau$$

Principio de Relatividad Galileano y Teoría de Electrodinámica

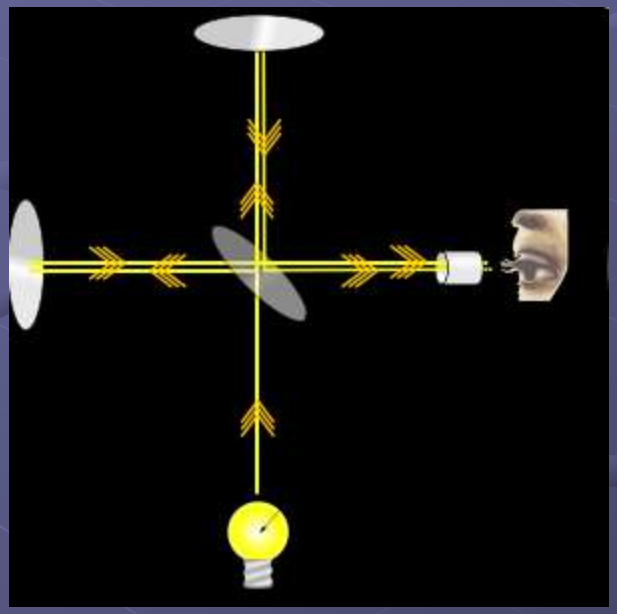
Maxwell pensó que las ondas electromagnéticas eran acarreadas por un medio, el *éter*, tal que sus ecuaciones se cumplirían sólo en un conjunto limitado de sistemas inerciales Galileanos, esto es, en sistemas coordenados en reposo respecto al éter.

Sin embargo, todo intento de medir la velocidad de la Tierra con respecto al éter falló.

➡ El experimento más importante fue el de Michelson y Morley

Principio de Relatividad Galileano y Teoría de Electrodinámica

Michelson y Morley, mostraron en 1887 que la velocidad de la luz es la misma, dentro de 5 km/s, para la luz que viaja a lo largo de la dirección del movimiento orbital de la Tierra y perpendicular a ella.



Interferómetro de Michelson: Se compone de una lente semiplateada o semiespejo, que divide la luz monocromática en dos haces de luz que viajan en un determinado ángulo el uno respecto al otro.
Con esto se lograba enviar simultáneamente dos rayos de luz (procedentes de la misma fuente) en direcciones perpendiculares, hacerles recorrer distancias iguales (o caminos ópticos iguales) y recogerlos en un punto común, en donde se crea un patrón de interferencia que depende de la velocidad de la luz en los dos brazos del interferómetro. Cualquier diferencia en esta velocidad (provocada por la diferente dirección de movimiento de la luz con respecto al movimiento del éter) sería detectada.

Einstein presentó una solución a los problemas de relatividad en electrodinámica y mecánica en 1905.

propuso que las transformaciones Galileanas

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{d}$$
$$t' = t + \tau$$

deberían ser reemplazadas con una transformación del espacio-tiempo diferente.

El **Principio de Relatividad Especial** establece que las leyes de la naturaleza
(ecuaciones de la mecánica y la electrodinámica)
son **invariantes**
bajo un grupo particular de transformaciones de coordenadas del espacio-tiempo:

Transformaciones de Lorentz

Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz, dentro de la teoría de la relatividad especial, son un conjunto de relaciones que dan cuenta de cómo se relacionan las medidas de una magnitud física obtenidas por dos observadores diferentes.

Estas relaciones establecieron la base matemática de la teoría de la relatividad especial de Einstein, ya que las transformaciones de Lorentz precisan el tipo de geometría del espacio-tiempo requeridas por la teoría de Einstein.

Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz fueron publicadas en 1904 pero su formalismo matemático inicial era incorrecto.

El matemático francés Poincaré desarrolló el conjunto de ecuaciones en la forma consistente en la que se conocen hoy en día.

Los trabajos de Minkowski y Poincaré mostraron que las relaciones de Lorentz podían interpretarse como las fórmulas de transformación para rotación en el espacio-tiempo cuatridimensional, que había sido introducido por Minkowski.

Grupo de Lorentz

Una transformación de Lorentz es
un conjunto de transformaciones lineales homogéneas
entre dos sistemas de referencia inerciales
que dejan invariante la métrica de Minkowsky:

$$L = \{ x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \}$$

Grupo de Lorentz

donde $L^\mu_\nu = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$

Grupo de Lorentz

Definición general de grupo:
Sea *L* un conjunto no vacío y sea $*$ una función sobre L.
El par ordenado $(L, *)$ es un grupo si y solo si
$*$ es una ley interna en *L*, asociativa, con elemento neutro y tal que todo elemento de *L* admite inverso respecto de $*$:

$(L, *)$ es grupo si y solo si

- $* : L^2 \longrightarrow L$
- $(\forall a, b, c)_L \quad (a * b) * c = a * (b * c)$
- $(\exists e)_L / (\forall a)_L \quad (a * e = e * a = a)$
- $(\forall a)_L (\exists a^{-1})_L \quad (a * a^{-1} = a^{-1} * a = e)$

Un **grupo** es una estructura algebraica que consta de un conjunto con una operación que combina cualquier pareja de sus elementos para formar un tercer elemento.

Grupo de Lorentz

Si además se cumple:

- $(\forall a, b)_L \quad (a * b = b * a)$

se dice que el grupo es conmutativo o abeliano.

Grupo de Lorentz

Debido a que la **invariancia del intervalo** exige **la invarianza del tensor métrico**, se cumple que:

$$L = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu\}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x'^\mu\,\mathrm{d}x'^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}\,L^\mu_\alpha\,\mathrm{d}x^\alpha\,L^\nu_\beta\,\mathrm{d}x^\beta \\ &= \eta_{\mu\nu}\,L^\mu_\alpha\,L^\nu_\beta\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta \end{aligned}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde en la última igualdad hemos usado la invariancia del intervalo.

$$\Rightarrow \quad \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\,L^\mu_\alpha\,L^\nu_\beta$$

Grupo de Lorentz

$$L = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu\}$$

- El elemento neutro del grupo de Lorentz es:

$$\delta^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

- El elemento inverso es la inversa de la matriz L^μ_ν

Esta siempre tiene inversa, ya que

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\, L^\mu_\alpha\, L^\nu_\beta$$

$$\det[L^\mu_\alpha\, L^\nu_\beta\, \eta_{\mu\nu}] = \det[\eta_{\alpha\beta}]$$

$$[\det L^\mu_\nu]^2 = 1 \Longrightarrow \det L^\mu_\nu = \pm 1$$

Grupo de Lorentz

$$L = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu\}$$

$$L^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

O sea que L^μ_ν,
es no-singular, es decir, invertible.
(No-singular significa que *x´(x)* y *x(x´)*
Son funciones diferenciables bien comportadas),
de modo que la matriz

$$L^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

Tiene una inversa bien definida.

Se puede demostrar, derivando $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\, L^\mu_\alpha\, L^\nu_\beta$
respecto de x^ϵ que las transformaciones son únicas

Grupo de Lorentz

$$L = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu\}$$

$$L^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\, L^\mu_\alpha\, L^\nu_\beta$$

Usando las propiedades del grupo de Lorentz, el producto escalar

$$U_\alpha V^\alpha = U_0 V^0 + U_1 V^1 + U_2 V^2 + U_3 V^3$$

es un invariante:

$$U'_\alpha V'^\alpha = L^\beta_\alpha U_\beta L^\alpha_\mu V^\mu = L^\beta_\alpha L^\alpha_\mu U_\beta V^\mu = \delta^\beta_\mu U_\beta V^\mu$$
$$= U_\mu V^\mu = U_0 V^0 + U_1 V^1 + U_2 V^2 + U_3 V^3$$

Se demuestra considerando

$$\delta^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu}$$

$$\eta_{\alpha\mu} = \eta_{\beta\alpha} L^\beta_\alpha L^\alpha_\mu$$

Grupo de Lorentz

$$L = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu\}$$

$$L^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

Notar que:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\, L^\mu_\alpha\, L^\nu_\beta$$

$$\begin{aligned}
\eta_{00} &= 1 = \eta_{\mu\nu} L^\mu_0 L^\nu_0 \\
&= \eta_{00}(L^0_0)^2 + \eta_{11}(L^1_0)^2 + \eta_{22}(L^2_0)^2 + \eta_{33}(L^3_0)^2 \\
&= (L^0_0)^2 - (L^1_0)^2 - (L^2_0)^2 - (L^3_0)^2 .
\end{aligned}$$

$$(L^0_0)^2 - [(L^1_0)^2 + (L^2_0)^2 + (L^3_0)^2] = 1$$

$$(L^0_0)^2 = 1 + [(L^1_0)^2 + (L^2_0)^2 + (L^3_0)^2] \geq 1$$

Grupo de Lorentz

$$L = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu\}$$

$$L^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

$$(L^0_0)^2 = 1 + [(L^1_0)^2 + (L^2_0)^2 + (L^3_0)^2] \geq 1$$

$$\Longrightarrow L^0_0 \geq 1 \ \vee \ L^0_0 \leq -1$$

Esto significa que existe un conjunto de **transformaciones de Lorentz prohibidas.**

Hay 4 casos posibles:

1. $\det(L) = 1 \ \wedge \ L^0_0 \geq 1 \longrightarrow$ grupo propio de Lorentz

Pues contiene la identidad.

Grupo de Lorentz

$$(L_0^0)^2 - (L_0^i)^2 = 1 \Longrightarrow L_0^0 \geq 1 \ \vee \ L_0^0 \leq -1$$

2. $\det(L) = 1 \ \wedge \ L_0^0 \leq 1 \longrightarrow$ inversiones espacio-temporales

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $\det(L) = -1 \ \wedge \ L_0^0 \geq 1 \longrightarrow$ inversiones espaciales

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Grupo de Lorentz

$$(L_0^0)^2 - (L_0^i)^2 = 1 \Longrightarrow L_0^0 \geq 1 \ \vee \ L_0^0 \leq -1$$

4. $\det(L) = -1 \ \wedge \ L_0^0 \leq 1 \longrightarrow$ inversiones temporales

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los casos 2, 3 y 4 no son grupos porque no contienen la identidad.

Grupo de Lorentz

$$L = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu\}$$

$$L^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

$$1.\ \det(L) = 1 \ \wedge\ L^0_0 \geq 1 \longrightarrow \text{grupo propio de Lorentz}$$

El grupo de Lorentz es un subgrupo propio del más general grupo de Poincaré.

Este consiste en las transformaciones lineales inhomogéneas que dejan la métrica $\eta_{\mu\nu}$ invariante.

Se trata de transformaciones de Lorentz más una traslación arbitraria en el espacio-tiempo:

$$P = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu + t^\mu\}$$

Grupo de Poincaré

$$P = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu + t^\mu\}$$

Consideremos, como ejemplo, el caso simple de una transformación con $t^\mu = 0$ y que consista en un cambio entre sistemas que se mueven sobre el eje *x* con velocidad *v*:

$$\mathbf{L}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\beta = v/c$$

Grupo de Lorentz

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

De esta ecuación matricial se deducen las fórmulas usuales para las transformaciones de Lorentz debidas a un desplazamiento sobre el eje x:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx/c^2) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

- respectan el segundo postulado de la relatividad:
  la vel. de la luz en el vacío es igual para todos los observadores
- reproducen la dilatación del tiempo y la contracción de Lorentz.

Mecánica relativista

Consideremos una partícula moviéndose en el espacio-tiempo. Su trayectoria es: $x^\mu = x^\mu(\tau)$

τ tiempo propio

La acción de una partícula es: $S = \int_1^2 \mathcal{L}\, \mathrm{d}t$

donde $\mathcal{L} = T - U$ es el Lagrangiano de la part., siendo T y U la energía cinética y potencial, respectivamente, y los números 1 y 2 representan los puntos inicial y final de la trayectoria.

Sobre trayectorias reales $\delta S = 0$

Tiempo propio

Es posible definir el tiempo propio de un sistema físico que se mueve con velocidad *v*
respecto de un cierto sistema coordenado como

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2$$

Este es el tiempo que mide un reloj fijo al sistema físico.

(intervalo de tiempo que ha medido con su reloj entre su paso por ambos eventos)

Notar que:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \tfrac{1}{c^2}(c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \\ &= dt^2 \left\{ 1 - \tfrac{1}{c^2} \left[\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dt}\right)^2 \right] \right\} \\ &= dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Mecánica relativista

Como la partícula se mueve libremente,
lo hace sobre una **geodésica**

línea de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada, y está contenida en esta superficie

y su acción es: $$S = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}s$$

proporcional a la longitud recorrida por la partícula a lo largo de una geodésica

donde α es constante

y $$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = c^2\mathrm{d}t^2/\gamma^2$$

De esta manera,

$$S = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} c\sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{c^2 - v^2}\mathrm{d}t$$

Mecánica relativista

Comparando $S = \int_1^2 \mathcal{L}\, \mathrm{d}t$

con $S = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} c\sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{c^2 - v^2}\mathrm{d}t$

➡ el lagrangiano es: $\mathcal{L} = -\alpha \sqrt{c^2 - v^2}$

al introducirlo en las Ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene la ecuación para las geodésicas

Cuando $v \to 0, \quad \mathcal{L} \approx -\alpha c + (1/2)(\alpha/c)v^2 + \ldots$

Comparando con la expresión Newtoniana $\mathcal{L} = (1/2)\, m_0\, v^2$

obtenemos que $\alpha = m_0\, c$ (masa en reposo)

y por lo tanto $\mathcal{L} = -m_0\, c\sqrt{c^2 - v^2}$

Mecánica relativista

Definimos el cuadrivector velocidad como:

$$v^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t/\gamma} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) = \dot{x}^\mu$$

Las tres componentes espaciales se corresponden con las componentes de la velocidad newtoniana, aunque con el factor gamma de corrección relativista, mientras la componente temporal es la velocidad de la luz, con el correspondiente factor relativista.

y la cuadri-aceleración como:

$$a^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = \ddot{x}^\mu$$

El cuadri-impulso es:

$$p_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$$

$$\mathcal{L} = -m_0 c\sqrt{c^2 - v^2}$$

con lo cual

$$\vec{P} = \frac{m_0 \ c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v} \qquad \text{y} \qquad p_0 = \gamma m_0 c$$

Mecánica relativista

Usando el Hamiltoniano definimos la energía como:

$$E = \mathcal{H} = \vec{P} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \gamma m_0 c^2$$

$$\vec{P} = \frac{m_0\ c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

$$\mathcal{L} = -m_0\, c\sqrt{c^2 - v^2}$$

Luego:

$$P^\mu \equiv (\gamma\, m_0\, c, \gamma\, m_0\, \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$$

Las componentes espaciales del cudriimpulso corresponden al momento newtoniano con un factor de corrección relativista, mientras la componente temporal es la energía cinética E relativista.

Correcciones relativistas importantes a la mecánica newtoniana.

Mecánica relativista

Cuadriimpulso

$$P^\mu \equiv (\gamma\, m_0\, c, \gamma\, m_0\, \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$$

$$E = \gamma m_0 c^2$$

$$\vec{P} = \frac{m_0\ c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

La forma contravariante es:

$$P^\mu = \eta^{\mu\nu}\, P_\nu = m_0\, v^\mu$$

$$v^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t/\gamma} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) = \dot{x}^\mu$$

Mecánica relativista

$$P^\mu = \eta^{\mu\nu} P_\nu = m_0 v^\mu$$

Notar que la norma :

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu &= m_0 \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} m_0 \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = m_0^2 \frac{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} \\ &= m_0^2 \frac{\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x_\nu}{1/c^2\,\mathrm{d}s^2} = (m_0 c)^2 \frac{\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x_\nu}{\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x_\nu} \\ &= (m_0\,c)^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}x_\mu$

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2$$

$$E^2/c^2 - p^2 = m_0^2\,c^2$$

$$P^\mu \equiv (\gamma\, m_0\, c, \gamma\, m_0\, \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$$

$$E^2 = m_0^2\, c^4 + c^2\, p^2$$

Mecánica relativista

Relación entre energía y momento
(surge del hecho de que la energía de una partícula depende de la velocidad):

$$E^2/c^2 - p^2 = m_0^2\, c^2$$

La masa m_0 de una partícula es un invariante, simplemente porque es la norma del cuadriimpulso

$$P^\mu P_\mu = (m_0\, c)^2,$$

constante: de modo que la combinación de energía-momento tiene el mismo valor para todos los observadores

Un observador O´que está en reposo respecto a la partícula verá una energía $E´=m_0c^2$ y un momento $p´= 0$,
mientras que el observador O verá
un momento no-nulo y una energía más grande.

Mecánica relativista

Hallemos ahora la ecuación del movimiento. Para ello variamos la acción de la siguiente manera:

$$S = -m_0\,c^2 \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= -m_0\,c^2 \int_a^b \mathrm{d}\tau$$

$$\Longrightarrow \quad \delta S = -m_0 c^2 \int_a^b \delta\,\mathrm{d}\tau$$

Mecánica relativista

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2$$

$$\delta(\,\mathrm{d}s^2\,) = \delta(c^2\,\mathrm{d}\tau^2)$$

$$2\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\delta\mathrm{d}x^\beta = c^2 2\mathrm{d}\tau\,\delta\mathrm{d}\tau$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \delta\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\delta\mathrm{d}x^\beta = \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}v^\alpha\mathrm{d}\delta x^\beta \\
&= \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}(v^\alpha\delta x^\beta) - \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}\delta x^\beta\mathrm{d}v^\alpha \\
&= \frac{1}{c^2}\mathrm{d}(v^\alpha\delta x_\alpha) - \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}\delta x^\beta\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

$$\delta S = -m_0 c^2 \int_a^b \delta\mathrm{d}\tau$$

$$\delta S = -m_0\, v^\alpha \delta x_\alpha\big|_a^b + m_0 \int_a^b \delta x_\alpha \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

Mecánica relativista

$$\delta S = -m_0 c^2 \int_a^b \delta \mathrm{d}\tau$$

$$\delta S = -m_0\, v^\alpha \delta x_\alpha \Big|_a^b + m_0 \int_a^b \delta x_\alpha \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau$$

En los límites $(\delta x^\alpha)_a = (\delta x^\mu)_b = 0$

la trayectoria real satisface $\delta S = 0$, entonces

$$0 = m_0\, \delta x_\alpha \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau$$

Como la variación δx es arbitraria:

$$\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

ecuación del movimiento de una partícula libre

Mecánica relativista

$$\frac{\mathrm{d}v^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Podemos escribir:

$$P^{\mu} = \eta^{\mu\nu} P_{\nu} = m_0 v^{\mu}$$

$$\frac{\mathrm{d}P^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

En caso de que haya una fuerza externa f^{μ}

$$f^{\mu} = \frac{\mathrm{d}P^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}$$

Cuando no hay fuerza, $P^{\mu} = l^{\mu}$

con l^{μ} un cuadri-vector constante.

Esto expresa la **conservación del momento lineal.**

Mecánica relativista

Podemos resumir los principales resultados obtenidos para la dinámica relativista de la siguiente forma:

$$E = \gamma\, m_0\, c^2$$

Cuando $\beta \longrightarrow 0, E \longrightarrow m_0\, c^2$

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$$

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \gamma\, m_0\, \vec{v} \right)$$

$$f^\mu = \frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \right)$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

Mecánica relativista

De las transformaciones de Lorentz podemos obtener reglas de transformación para
velocidades,
aceleración,
fuerza y
energía,
en condiciones arbitrarias, siempre que el espacio- tiempo tenga métrica Minkowskiana.

Sin embargo, la geometría del espacio-tiempo real no parece ser plana, sino pseudo-riemanniana (esto es, sólo el espacio tangente en cada punto es Minkowskiano y la curvatura global es no nula, dependiendo ésta del contenido de energía e impulso de la materia).

Elementos de Relatividad General

La distribución de materia existente en el Universo determina la geometría del mismo,
a través del campo tensorial métrico $g_{\mu\nu}(x)$

El potencial gravitacional se representa a través de $g_{\mu\nu}(x)$ que se obtiene resolviendo las **ecuaciones de Einstein-Maxwell:**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu} \right)$$

Elementos de Relatividad General

Ecuaciones de Einstein-Maxwell:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu} \right)$$

Λ Constante cosmológica

$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ tensor de Ricci

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ escalar de Ricci

$R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ es el tensor de Riemann (o de curvatura). Este tensor de curvatura se anula si el espacio-tiempo es plano.

Elementos de Relatividad General

Las fuentes de la curvatura del espacio-tiempo son la materia y los campos electromagnéticos que ésta produce si está cargada. Así, las fuentes de las ec.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu} \right)$$

son el tensor de energía-impulso de la materia, que en el caso de un fluído ideal tiene la forma:

$$T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu} = (\rho + p)\, u_\mu u_\nu + p\, g_{\mu\nu}$$

y el tensor de los campos electromagnéticos,

$$T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right)$$

Elementos de Relatividad General

tensor de energía-impulso de la materia

$$T_{\mu\nu}^{\mathrm{mat}} = (\rho + p)\, u_\mu u_\nu + p\, g_{\mu\nu}$$

donde ρ, p y u_μ son la densidad,
la presión y
la tetra-velocidad,

Elementos de Relatividad General

Tensor de los campos electromagnéticos,

$$T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\alpha}F^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} \right)$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$$ A_μ Tetrapotencial

Si llamamos $T_{\mu\nu} = T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu}$,
las ecuaciones de conservación de la energía y del momento angular pueden derivarse de la relación:

$$T^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = 0$$

Las ec. de Einstein-Maxwell implican
las ec. de movimiento de los sistemas materiales.

Elementos de Relatividad General

Si se conoce la distribución de la energía y
el impulso de la materia que forma en Universo
entonces es posible determinar $g_{\mu\nu}$
y por tanto medir distancias
a través de la relación

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

Agujeros negros

Las soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para diferentes distribuciones de materia y de cargas eléctricas corresponden a espacios-tiempo con diferentes propiedades. Debido a la complejidad de la ec.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu} \right)$$

las soluciones halladas analíticamente corresponden a distribuciones de masa localizadas en una región muy pequeña del espacio-tiempo y todo el resto se considera vacío.

Cuando la densidad de materia es muy alta, se forma un agujero negro.

Agujeros negros

Los agujeros negros son regiones del espacio-tiempo limitadas por un horizonte de eventos y todas las cosas que crucen el horizonte no podrán volver a cruzarlo en el sentido opuesto.
Ni siquiera la luz puede salir de un agujero negro, y de ahí su nombre.

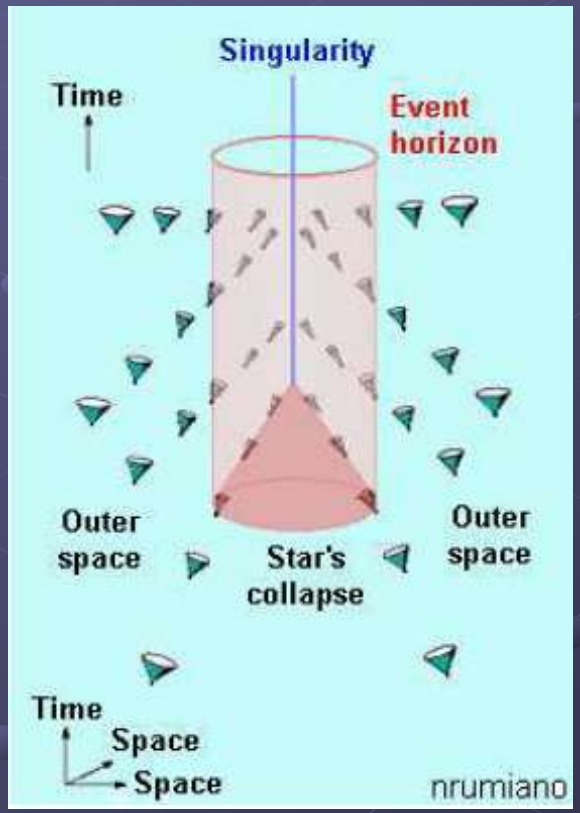
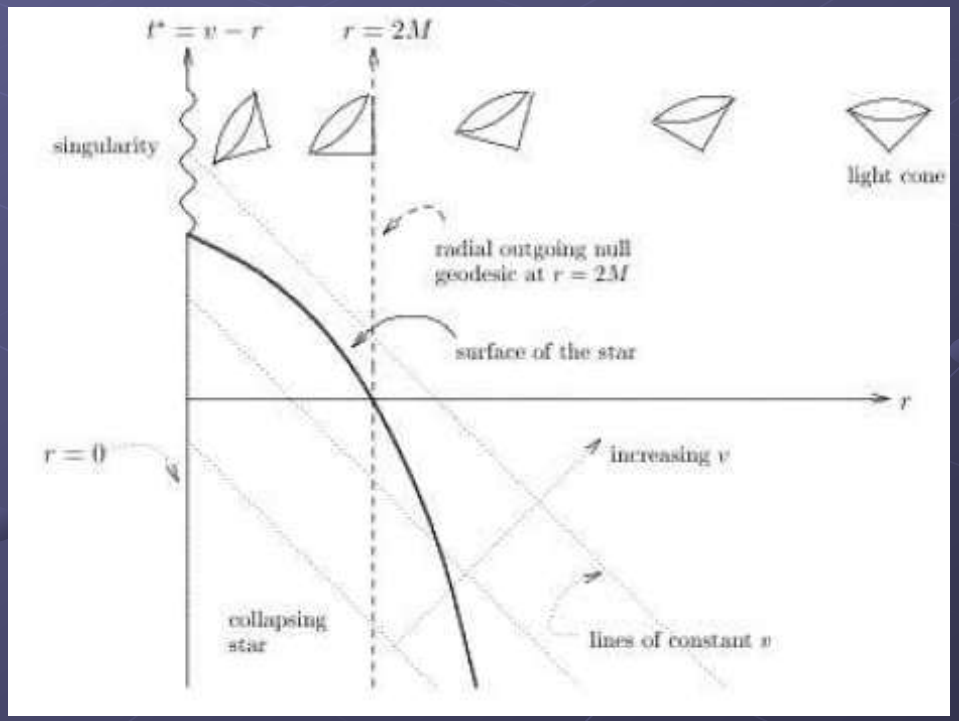


Diagrama del espacio-tiempo mostrando la formación de un agujero negro por colapso gravitacional.

Agujeros negros

Diagrama del espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas (t, r, θ, φ). En unidades naturales (c = 1), r = 2M corresponde al horizonte de eventos y la región comprendida entre r = 0 y r = 2M es el agujero negro. En la figura se muestra como los conos de luz se inclinan hacia r = 0 a medida que se acercan al horizonte, y una vez dentro de él, el futuro de todos los posibles eventos es la singularidad (r = 0).



Agujeros negros

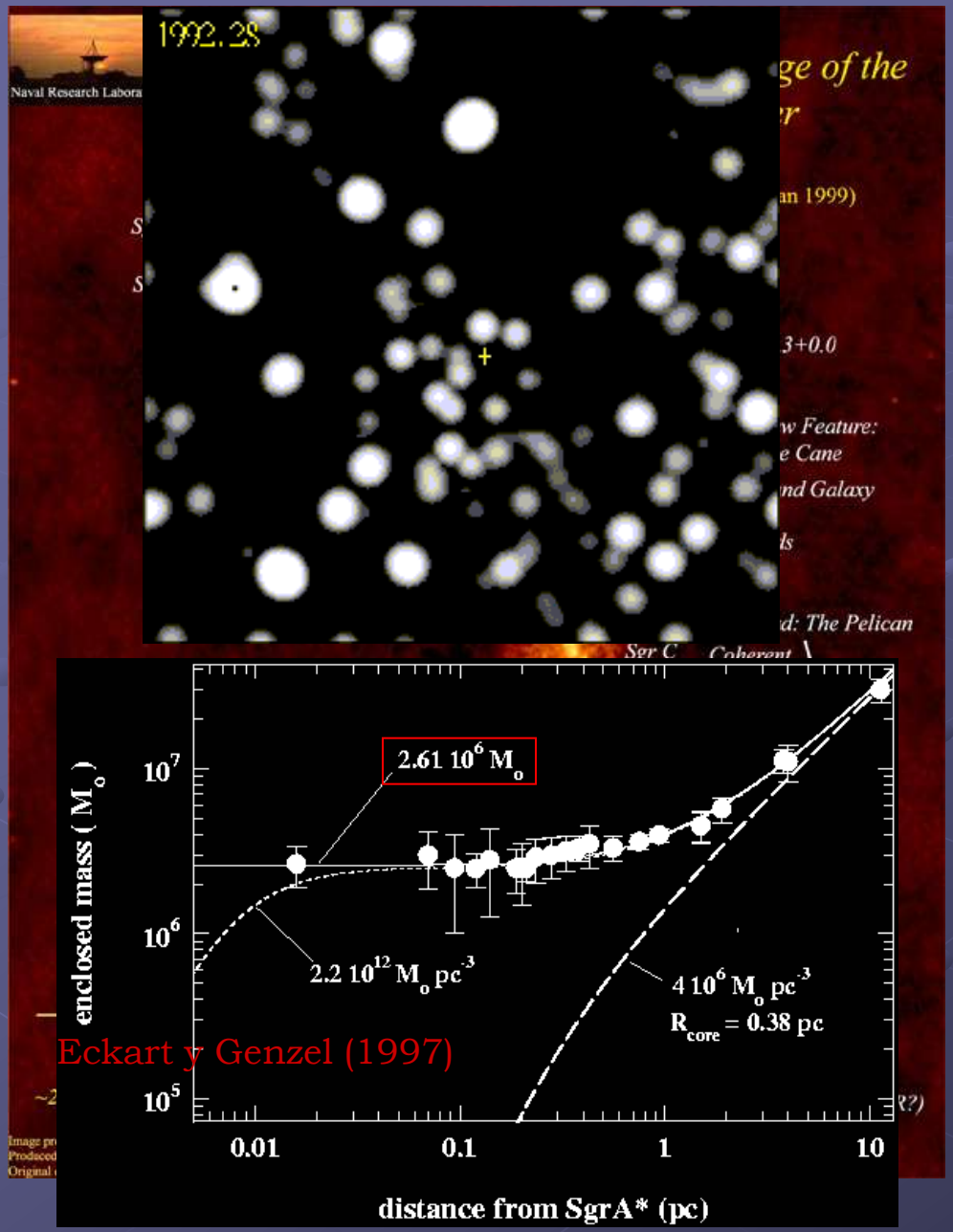
Las principales soluciones analíticas conocidas de las ecuaciones

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\mathrm{mat}}_{\mu\nu} + T^{\mathrm{EM}}_{\mu\nu} \right)$$

que describen agujeros negros son:

- Métrica de Schwarzschild: corresponde a un espacio tiempo determinado por una masa M que no rota y con carga neta nula.
- Métrica de Kerr: corresponde a un espacio tiempo determinado por una masa M en rotación y con carga neta nula.
- Métrica de Reissner-Nordstrom: corresponde a un espacio tiempo determinado por una masa M cargada pero con momento angular nulo.
- Métrica de Kerr-Newman: corresponde a un espacio tiempo determinado por una masa M en rotación y cargada.

Agujeros negros supermasivos

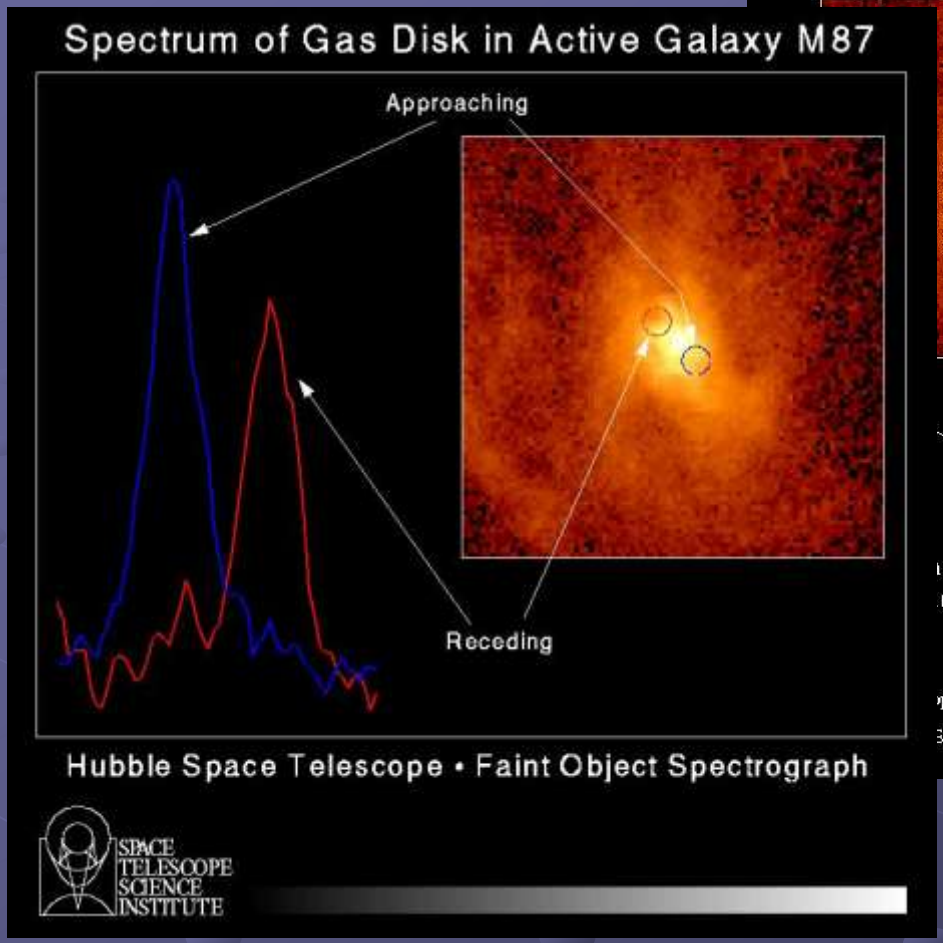


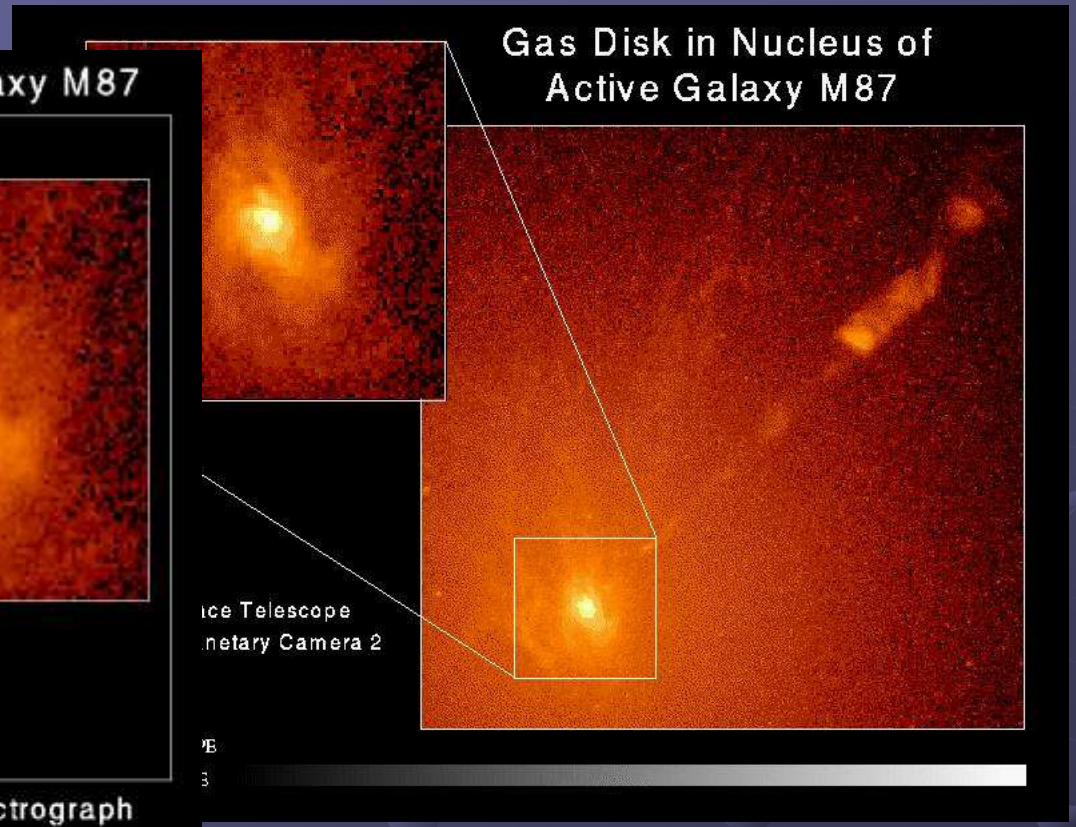
Observaciones VLBI a una longitud de onda de 1.4 mm han permitido determinar que el tamaño de la región de emisión radio (Sgr A*) en el ***centro galáctico*** es de 0.8 UA.

En el infrarrojo, a una longitud de onda de 2.2 μm, se han observado movimiento de estrellas en torno a Sgr A* con velocidades de hasta 1,600 km/s.

Estas medidas permiten estimar que la masa requerida para producir estos movimientos orbitales es de 2.61×10^6 M_o, y que ademas está confinada en un tamaño del orden de 1 UA.

Agujeros negros

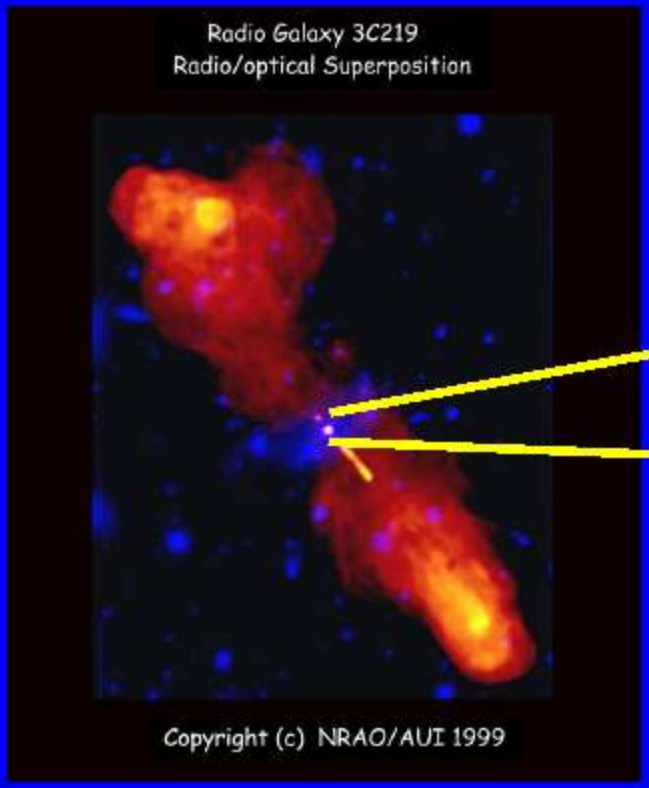


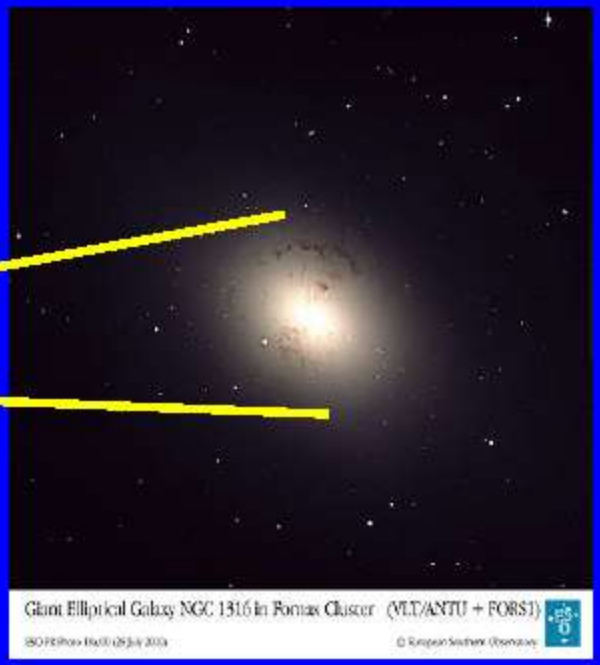


Observaciones de M87 con el HST muestran velocidades de rotación correspondientes a un agujero negro de $2 \times 10^9 \, M_o$

BHs at work:

- BHs can accrete matter and cause some (collimated jet) outflow at the same time --> AGNs and microqusars
- details of "machine" still unknown (MHD? Disk wind?)

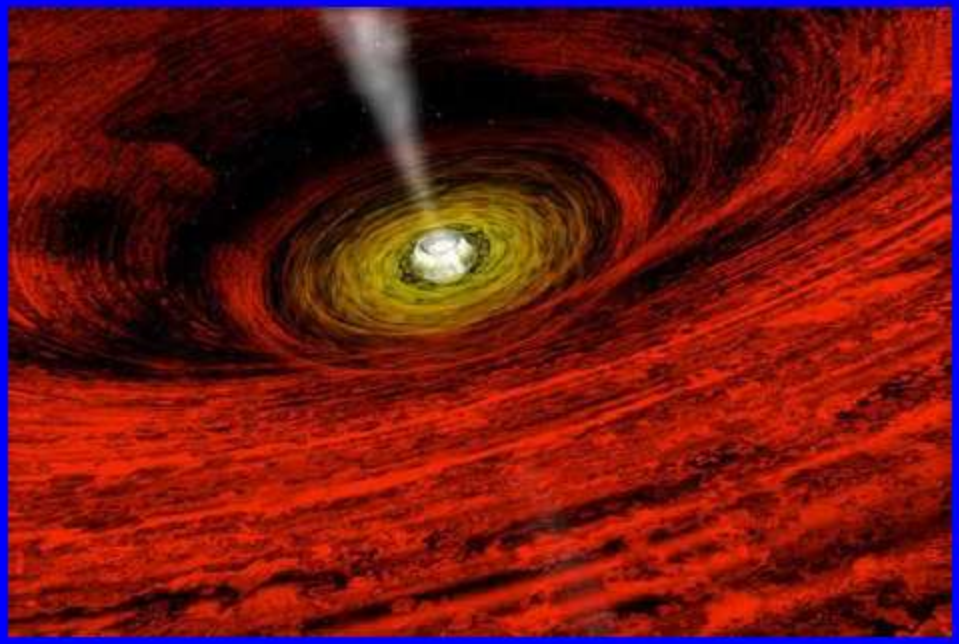


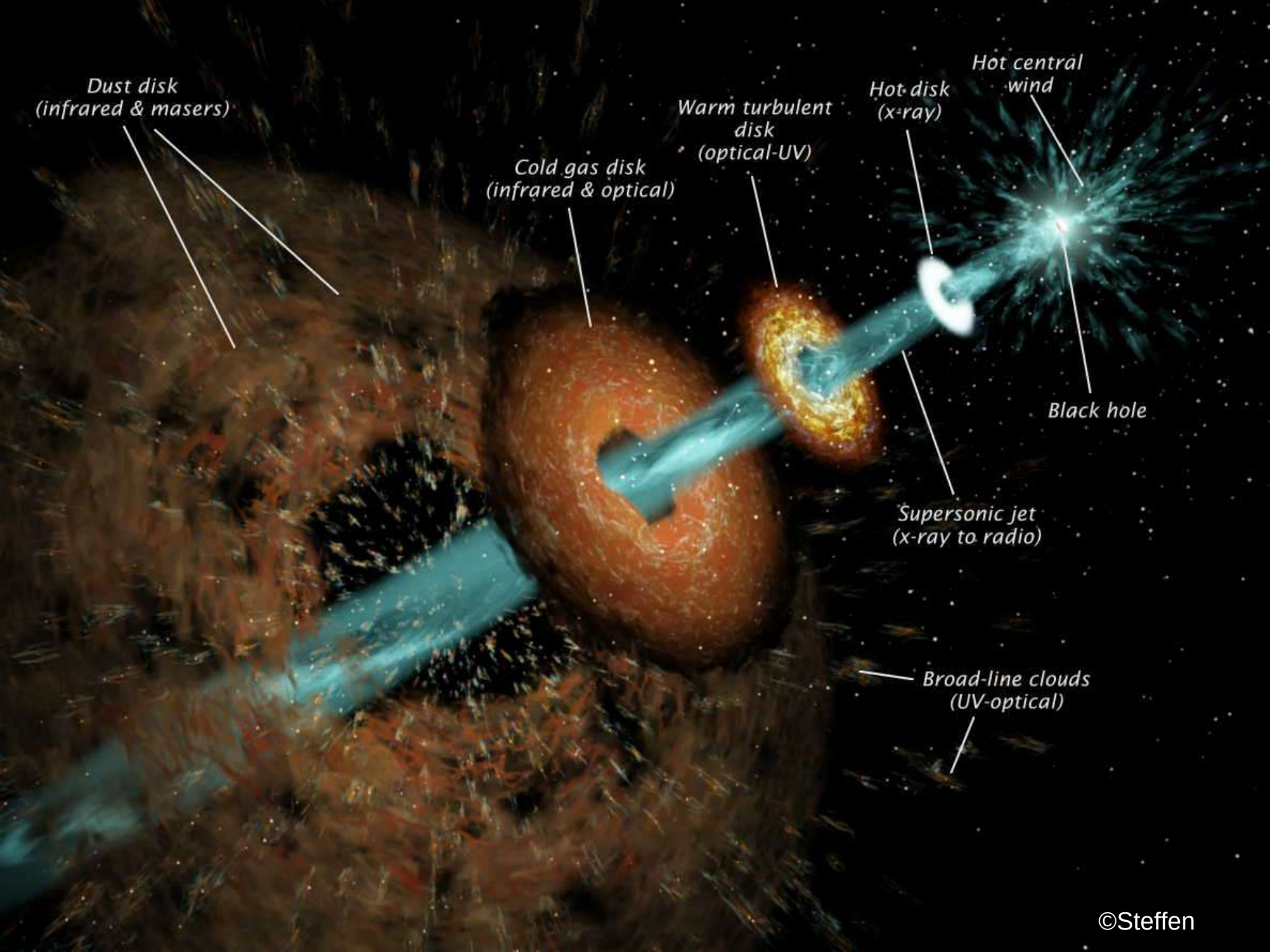


BHs at work:

- SMBHs and AGNs

Artist's views of the inner accretion disk/torus and the central rotating supermassive BH




Dust disk
(infrared & masers)
Cold gas disk
(infrared & optical)
Warm turbulent
disk
(optical-UV)
Hot disk
(x-ray)
Hot central
wind
Black hole
Supersonic jet
(x-ray to radio)
Broad-line clouds
(UV-optical)
©Steffen