Aplicaciones de GRTensor en Astrofísica y Cosmologia

Santiago Esteban Perez Bergliaffa

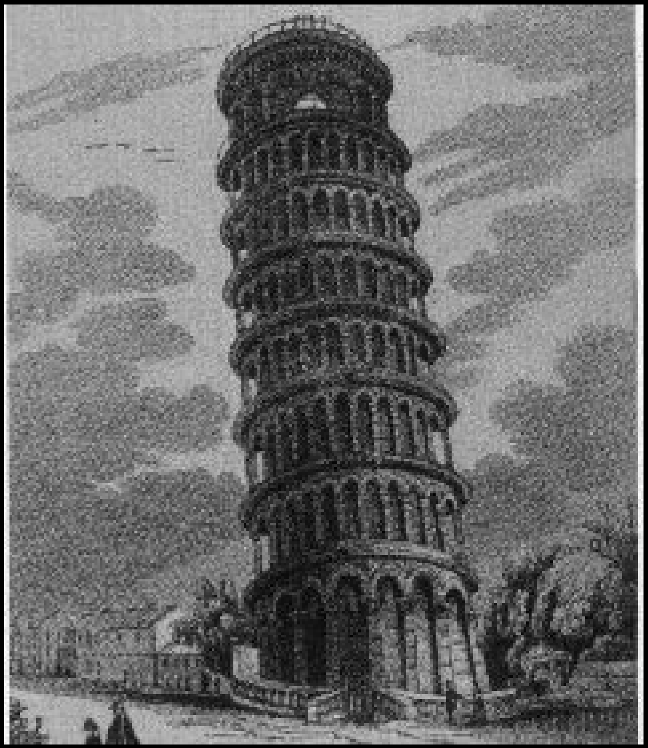
Departamento de Física Teórica

Instituto de Física

FCAGLP 2014

- El Principio de Equivalencia
- Teorías métricas de la gravitación
- Ecuaciones de la Relatividad General
- Tensores

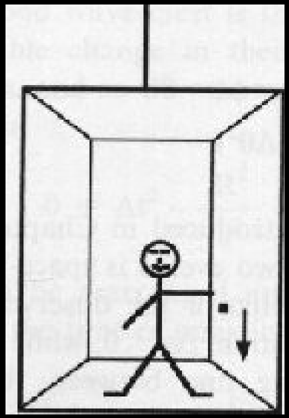
El Principio de Equivalencia



G. Galilei (1590): la aceleración en la caída libre es la misma para todos los cuerpos, independientemente de su composición.

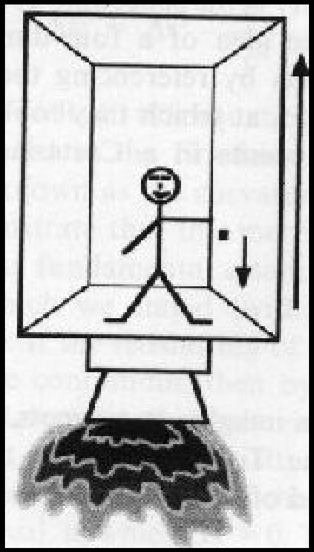
Propriedad exclusiva de la gravitación

Einstein:



Elevador **en reposo** con relación a la Tierra

El objeto cae con aceleración *g*
(indep. de su composición)



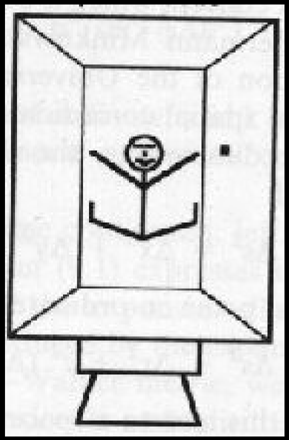
Elevador **acelerando** con aceleración *g* para arriba (lejos de la Tierra)

El objeto cae con aceleracion *g*
(indep. de su composición)

PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA
un campo gravitacional es localmente equivalente a un sistema de referencia acelerado

FCAGLP 2014

Consecuencia: podemos anular localmente al campo gravitacional



El ascensor está inicialmente suspendido por um cable que se rompe.
El observador "flota" com relación al ascensor, así como cualquier objeto suelto por él.

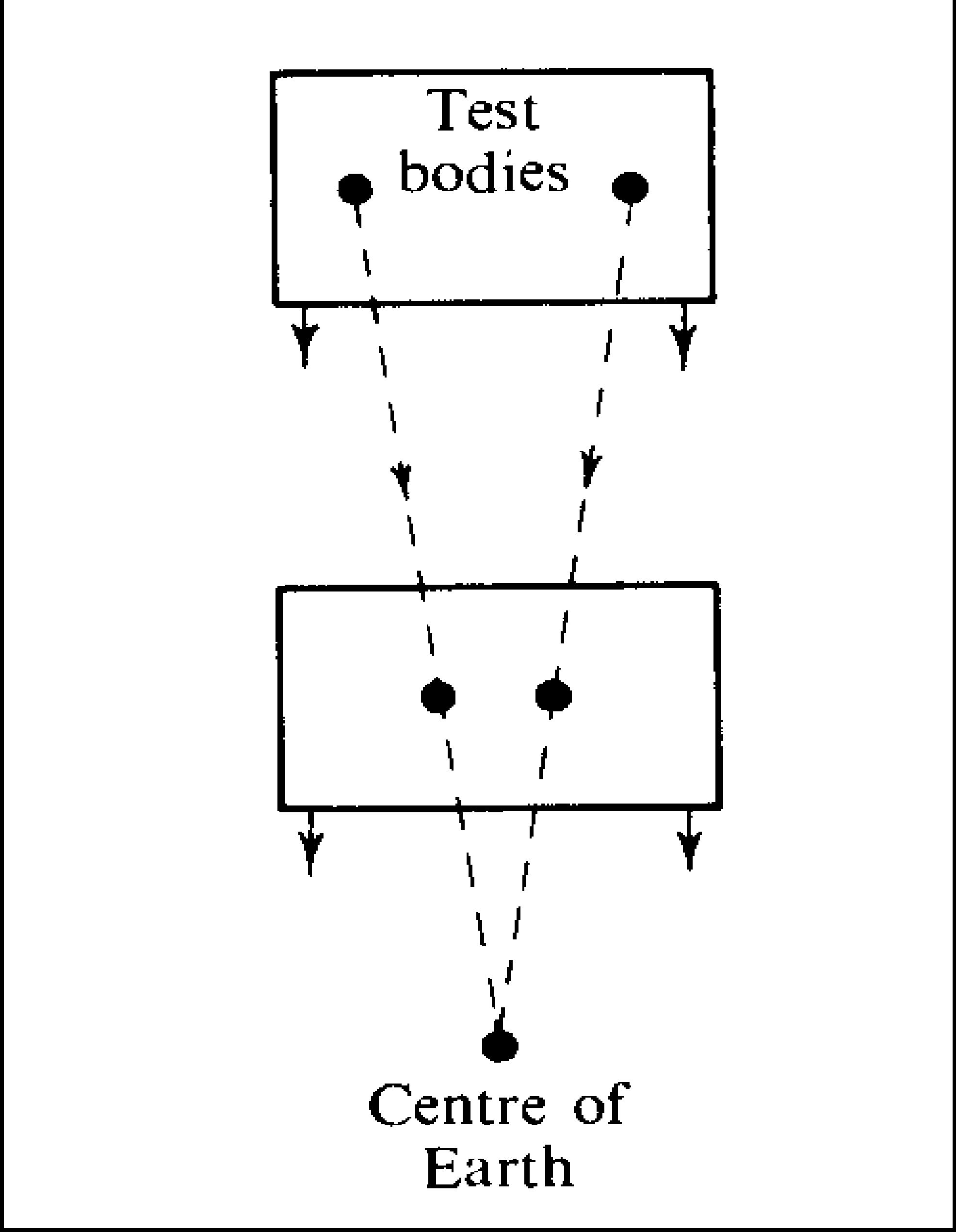
Localmente, la influencia del campo gravitacional puede ser anulada

Localmente, las leyes de la física son aquellas válidas em el e-t minkowskiano

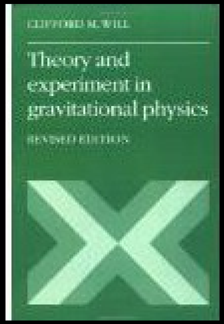
Pero...

La gravitación solo puede ser anulada localmente.

Globalmente, la gravitación desvía a las partículas de la "trayectoria recta" en el espacio-tiempo.



De forma mas precisa,



Principio de equivalencia de Einstein:

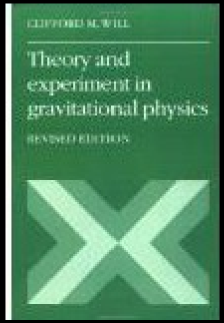
- **Principio de Equivalencia Débil: La trayectoria de cualquier cuerpo de prueba neutro no depende de su estructura interna.**

(Un cuerpo de prueba es aquel que tiene energia gravitacional newtoniana despreciable, y dimensiones mucho menores que las de las inhomogeneidades del campo gravitacional).

- **Invariancia Local de Lorentz: localmente, las leyes que rigen los fenómenos físicos son invariantes de Lorentz (→ las coordenadas no son importantes *per se*).**

- **Invariancia Local de Posición: el resultado de cualquier experimento local no gravitacional es independiente de donde y cuando sea realizado.**

(Un experimento local no gravitacional es aquel realizado en un sistema inercial local y para el cual los efectos gravitacionales newtonianos son despreciables).



Es posible mostrar que si el PEE es válido,

- **Cualquier teoria que describa a la gravitación debe necesariamente asociar una métrica a la variedad que representa al e-t,**

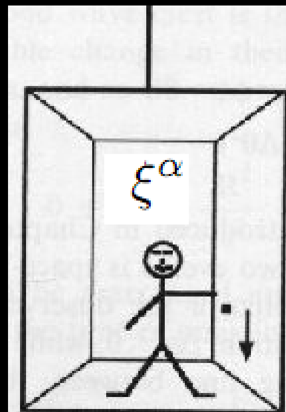
- **La linea de universo de cualquier cuerpo de prueba es una geodésica de la métrica ("acoplamiento universal").**

Como existe evidencia suficiente apoyando la validez del PEE (C. Will, LRR, 2006), es natural trabajar con teorias métricas de la gravitación.

Las teorias métricas pueden incluir campos gravitacionales diferentes del tensor métrico, de forma tal que sólo la métrica determina el movimiento de cuerpos de prueba (no se acoplan com ma materia em la acción).
Ejemplos: Brans-Dicke, TeVeS.

Ejemplo de teoría no métrica: "Einstein-æther gravity" (Jacobson, 2007).

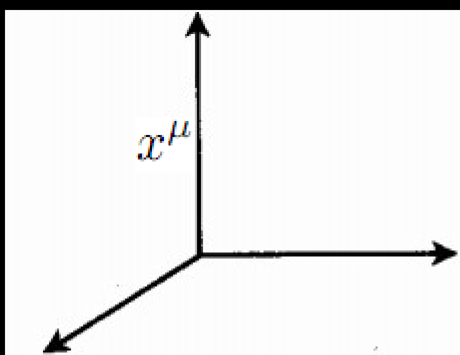
EEP → teoria métrica (justificación parcial)



$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta$$

$c = 1$



$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu\, \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned}$$

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)$$

$$= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta^\lambda_\mu$$

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$$

Símbolos de Christoffel

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta \rightarrow d\tau^2 = -g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$$

Tensores

$$\vec{A} \underset{O}{\rightarrow} (A^0, A^1, A^2, A^3) = \{A^\alpha\}$$

Convención de Einstein

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} A^{\beta}.$$

Definición provisoria de vector com relación al sistema coordenado *O*, que incluye la ley de transformación al sistema *O'*.

Con relación a una base $\vec{e}_i$, como por ejemplo

$$\vec{e}_0 \underset{O}{\rightarrow} (1, 0, 0, 0), \quad \vec{e}_2 \underset{O}{\rightarrow} (0, 0, 1, 0),$$

$$\vec{e}_1 \underset{O}{\rightarrow} (0, 1, 0, 0), \quad \vec{e}_3 \underset{O}{\rightarrow} (0, 0, 0, 1).$$

$$\vec{A} = A^0\vec{e}_0 + A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3,$$

$$\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha.$$

Consideremos

$$\vec{A} = A^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}, \qquad \vec{B} = B^{\beta}\vec{e}_{\beta}.$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^{\alpha}B^{\beta}(\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta})$$

Definimos entonces el tensor métrico

$$\vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta},$$

De forma tal que (en un e-t plano y en coordenadas cartesianas)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3$$

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Note que el tensor métrico es en realidad uma regla que asocia un número a cada par de vectores, dado por el resultado del producto escalar.

Definición: un tensor del tipo (0,N) es una función que aplica N vectores en un número real, que es linear en cada uno de los N argumentos.

Ejemplo: el tensor métrico es del tipo (0,2), y es linear, ya que

$$(\alpha\vec{A}) \cdot \vec{B} = \alpha(\vec{A} \cdot \vec{B}),$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C},$$

$$\vec{A} \cdot (\beta\vec{B}) = \beta(\vec{A} \cdot \vec{B}),$$
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}.$$

Usaremos la notación $\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B}.$

$$\mathbf{g}(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}, \vec{C}) = \alpha\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{C}) + \beta\mathbf{g}(\vec{B}, \vec{C}),$$

Note que la correspondencia es independiente de la elección del sistema coordenado.

Definimos las componentes de un tensor (0,N) en el sistema de referencia *O* como los valores de la función cuando sus argumentos son los vectores de la base elegida para *O*.

Ejemplo:

$$\mathbf{g}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}.$$ (base cartesiana)

Ejemplo: tensores (0,1) (o 1-formas, o vectores covariantes)

$\tilde{p}(\vec{A})$ dá como resultado un número real

Componentes $p_\alpha \equiv \tilde{p}(\vec{e}_\alpha).$

De forma tal que

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\vec{A}) &= \tilde{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha)\\ &= A^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha),\end{aligned}$$

$$\tilde{p}(\vec{A}) = A^\alpha p_\alpha.$$

$$= A^0 p_0 + A^1 p_1 + A^2 p_2 + A^3 p_3.$$

Ejemplo: tensores (0,2)

$$f_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) &= \mathbf{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta) \\ &= A^\alpha B^\beta \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) \\ &= A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Tensor simetrico

$$\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \mathbf{f}(\vec{B}, \vec{A}) \quad \forall \vec{A}, \vec{B}.$$

$$f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}.$$

Tensor antisimétrico

$$\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) = -\mathbf{f}(\vec{B}, \vec{A}), \quad \forall \vec{A}, \vec{B},$$

$$f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha}.$$

Cualquier tensor puede descomponerse em la forma

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= \tfrac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}) + \tfrac{1}{2}(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha}) \\ &= h_{(\alpha\beta)} + h_{[\alpha\beta]}. \end{aligned}$$

Note que la métrica establece una relación biunívoca entre las 1-formas y los vectores:

$$\mathbf{g}(\vec{V},\quad) = \tilde{V}(\quad)$$

Sigue que

$$\begin{aligned} V_\alpha \equiv \tilde{V}(\vec{e}_\alpha) &= \vec{V} \cdot \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{V} \\ &= \vec{e}_\alpha \cdot (V^\beta \vec{e}_\beta) \\ &= (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta) V^\beta \end{aligned}$$

$$V_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\beta.$$

Note que todo esto es válido también para uma base diferente de la cartesiana, con la métrica definida por

$$\mathrm{g}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = g_{\alpha\beta}$$

$$(g_{\alpha\beta})_{polar} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

En particular:

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$$

De hecho, esto nos permite definir a un vector em términos de una 1-forma (de hecho, son "duales"):

$$\vec{V}(\tilde{p}) \equiv \tilde{p}(\vec{V}) \equiv p_\alpha V^\alpha \equiv \langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle$$

y podemos entonces considerar a los vectores como un tipo de tensor

Definición: un tensor del tipo (M,0) es uma función de M 1-formas en los números reales, que es linear em cada uno de los M argumentos.

Tensores em general:

Definición: un tensor del tipo (M,N) es uma función linear de M 1-formas y N vectores en los números reales.

Ejemplo: si **R** es un tensor (1,1), $\mathbf{R}(\tilde{p}\,;\vec{A})$ es un número real

y las componentes de **R** vienen dadas por $\mathbf{R}(\tilde{\omega}^{\alpha}\,;\vec{e}_{\beta}) = R^{\alpha}{}_{\beta}$.

Leyes de transformación de las componentes

$\phi = \phi(\xi, \eta)$ → $\tilde{\mathrm{d}}\phi \to (\partial\phi/\partial\xi, \partial\phi/\partial\eta)$ componentes en el sistema *(ξ, η)*

La ley de transformación al sistema *(x,y)* sigue de

$$\begin{pmatrix} \partial\phi/\partial\xi \\ \partial\phi/\partial\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \end{pmatrix}$$

$$p_{\beta'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta'} p_{\alpha}$$

$$(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}) = \begin{pmatrix} \partial x/\partial\xi & \partial y/\partial\xi \\ \partial x/\partial\eta & \partial y/\partial\eta \end{pmatrix}.$$

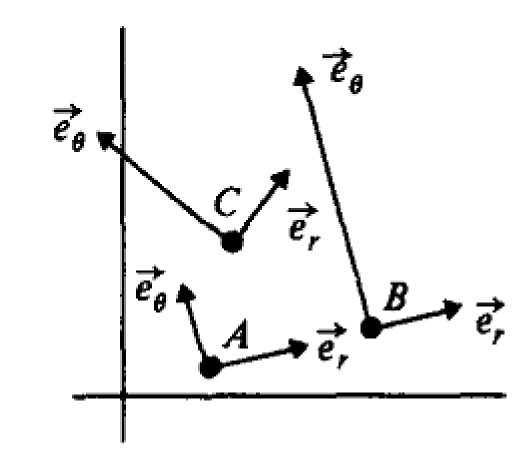
$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} V^{\beta},$$

Ejemplo: coordenadas polares en dos dimensiones planas

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\vec{e}_{\beta},$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \Lambda^x{}_r\vec{e}_x + \Lambda^y{}_r\vec{e}_y \\ &= \frac{\partial x}{\partial r}\,\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\,\vec{e}_y \\ &= \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\,\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\,\vec{e}_y \\ &= -r\sin\theta\,\vec{e}_x + r\cos\theta\,\vec{e}_y.\end{aligned}$$



Los vectores de la base polar cambian con relación a los de la base cartesiana.

FCAGLP 2014

A partir de

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta$$

tenemos que

$$(g_{\alpha\beta})_{polar} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

Como los vectores de la base no son constantes ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(V^r \, \vec{e}_r + V^\theta \, \vec{e}_\theta) \\ &= \frac{\partial V^r}{\partial r} \vec{e}_r + V^r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial V^\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + V^\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(V^{\alpha}\,\vec{e}_{\alpha}) = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial r}\,\vec{e}_{\alpha} + V^{\alpha}\,\frac{\partial \vec{e}_{\alpha}}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\,\vec{e}_{\alpha} + V^{\alpha}\frac{\partial \vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}},$$

vector

$$\frac{\partial \vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\vec{e}_{\mu}.$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\,\vec{e}_{\alpha} + V^{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\vec{e}_{\mu}.$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\,\vec{e}_\alpha + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\,\vec{e}_\alpha .$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \underbrace{\left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\right)}_{\text{componentes}}\,\vec{e}_\alpha .$$

Definimos

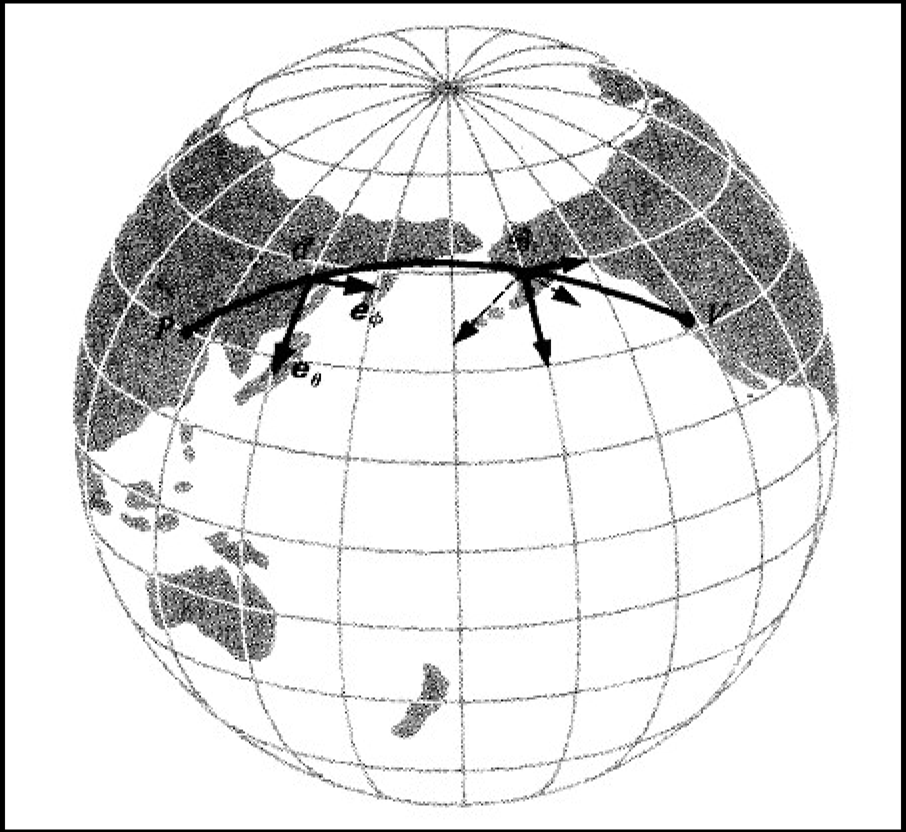
$$V^\alpha{}_{;\beta} \equiv V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} .$$

de forma tal que

$$\partial \vec{V}/\partial x^\beta = V^\alpha{}_{;\beta}\,\vec{e}_\alpha ,$$

es un tensor (1,1): derivada covariante $\nabla \vec{V}.$

$$(\nabla \vec{V})^\alpha{}_\beta = (\nabla_\beta \vec{V})^\alpha = V^\alpha{}_{;\beta} .$$



FCAGLP 2014

Com la derivada covariante podemos definir el transporte paralelo de un vector sobre la curva con vector tangente ***t*** :

$$t^{\mu}\nabla_{\mu}v^{\nu}=0$$

Dados dos vectores ***v*** y ***w*** exigimos que su producto escalar sea constante sobre cualquier punto de la curva cuando los vectores son transportados paralelamente:

$$t^{\mu}\nabla_{\mu}(g_{\sigma\lambda}v^{\sigma}w^{\lambda})=0$$

$$t^{\mu}v^{\sigma}w^{\lambda}\nabla_{\mu}g_{\sigma\lambda}=0$$

$$\nabla_{\mu}g_{\sigma\lambda}=0$$

En el caso de una 1-forma,

$$(\nabla_\beta \tilde{p})_\alpha \equiv (\nabla \tilde{p})_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}.$$

En el caso general,

$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}; \qquad (0,3)$$

$$\nabla_\beta A^{\mu\nu} = A^{\mu\nu}{}_{,\beta} + A^{\alpha\nu}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha}\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}; \qquad (2,1)$$

$$\nabla_\beta B^\mu{}_\nu = B^\mu{}_{\nu,\beta} + B^\alpha{}_\nu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - B^\mu{}_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}. \qquad (1,2)$$

Cual es la relación entre la métrica y los Christoffels?

$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta};$$

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}.$$

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$$

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta,\mu} &= \Gamma^\nu{}_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} + \Gamma^\nu{}_{\beta\mu} g_{\alpha\nu},\\
g_{\alpha\mu,\beta} &= \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} g_{\nu\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\beta} g_{\alpha\nu},\\
-g_{\beta\mu,\alpha} &= -\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha} g_{\nu\mu} - \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha} g_{\beta\nu}.
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2} g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) = \Gamma^\gamma{}_{\beta\mu}.$$

Curvatura

$$\nabla_\mu v_\nu = v_{\nu,\mu} - \Gamma^\omega_{\mu\nu} v_\omega$$

$$\nabla_\rho \nabla_\mu v_\nu = \partial(\nabla_\mu v_\nu) - \Gamma^\omega_{\nu\rho} \nabla_\mu v_\omega - \Gamma^\omega_{\mu\rho} \nabla_\omega v_\nu$$

$$\nabla_\rho \nabla_\mu v_\nu - \nabla_\mu \nabla_\rho v_\nu = R^\lambda{}_{\nu\mu\rho} v_\lambda$$

$$R^\lambda{}_{\nu\mu\rho} \equiv \partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} + \Gamma^\omega{}_{\nu\rho} \Gamma^\lambda{}_{\omega\mu} - \Gamma^\omega{}_{\nu\mu} \Gamma^\lambda{}_{\omega\rho}$$

Cual es la relación entre el tensor de Riemann y la curvatura?

La variedad es plana $\Longleftrightarrow$ $R^{\lambda}{}_{\nu\mu\rho} \equiv 0$

(vale en el sist. coord. local y es uma ec. tensorial → vale en cualquier sist. de coordenadas)

$R_{\mu\kappa} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa}$

$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}$

$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa}$

Propiedades

$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$

$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = +R_{\mu\lambda\kappa\nu}$

$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$

$$R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}$$

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0$$

(identidades de Bianchi)

$$(R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\mu} = 0$$

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$$

Tensor de Weyl

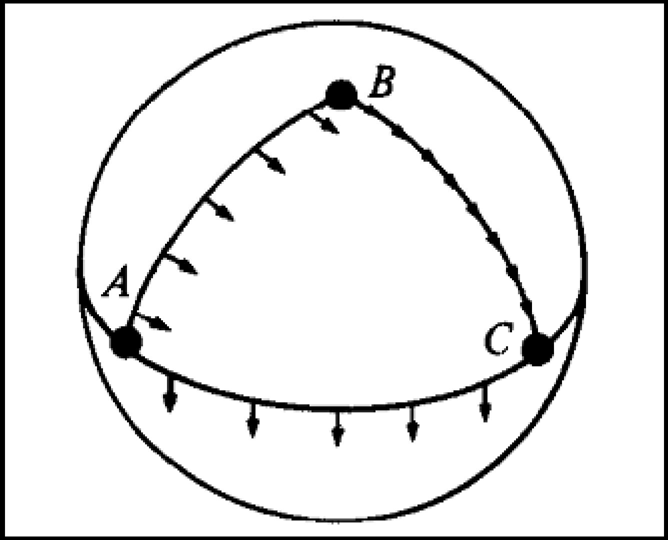
$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - g_{\alpha[\gamma}R_{\delta]\beta} + g_{\beta[\gamma}R_{\delta]\alpha} + \frac{1}{3}Rg_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta}.$$

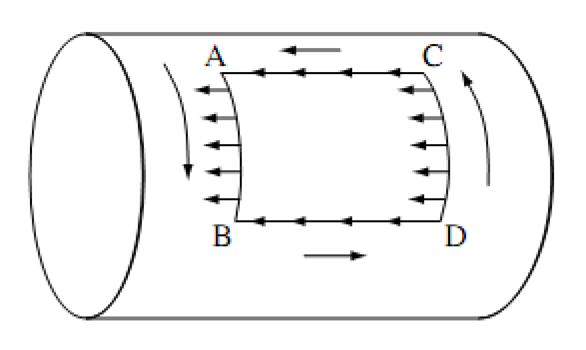
describe al “campo gravitacional libre”

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad C_{\alpha\beta\gamma\delta} = -C_{\beta\alpha\gamma\delta}, \quad C_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0,$$

$$C^{\alpha}{}_{\beta\alpha\delta} = 0.$$

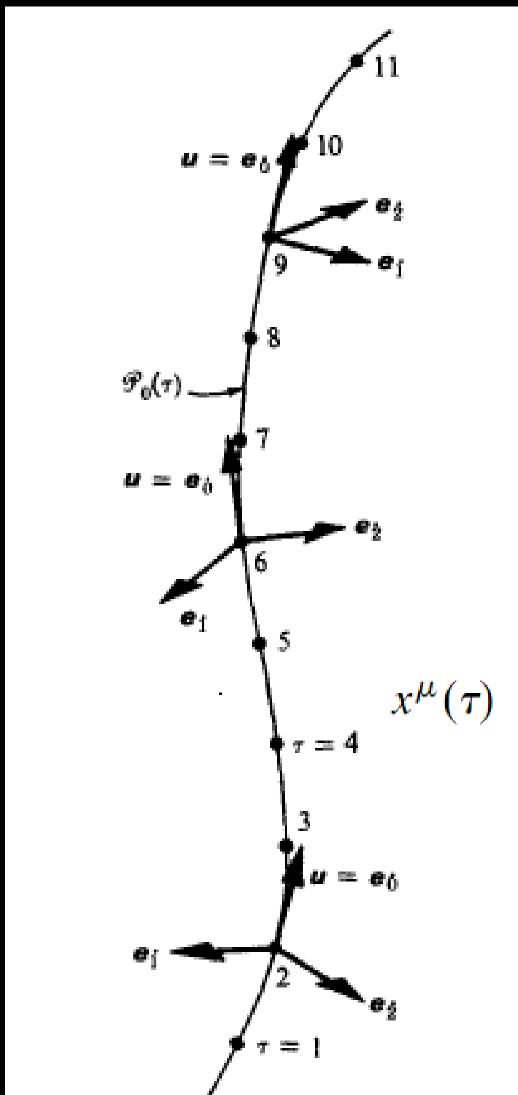
Relación entre la curvatura y el transporte paralelo





$$\Delta v^a = -\tfrac{1}{2}\,(R^a{}_{bcd})_P\, v_P^b \oint x^c\, dx^d .$$

Tetradas (vierbein) – Relación entre las coord. globales y locales



Localmente es posible elegir sobre una linea de universo dada un conjunto de cuatro vectores ortonormales ("sistema de referencia del laboratorio") que satisfacen

$$g(\hat{\mathrm{e}}_\alpha, \hat{\mathrm{e}}_\beta) = \hat{e}_\alpha(\tau) \cdot \hat{e}_\beta(\tau) = \eta_{\alpha\beta},$$

$$\hat{\mathrm{e}}_0 = \frac{\mathbf{u}}{c}$$

El cambio entre la base del sistema x^μ y la del sistema local viene dado por

$$\vec{e}_\mu = e^\alpha_{\ \mu} \hat{\mathrm{e}}_\alpha$$

Tétradas o vierbein

Las cantidades medidas en el laboratorio corresponden a proyecciones de los 4-tensores correspondientes sobre la base del sistema local.

FCAGLP 2014

Proyección:

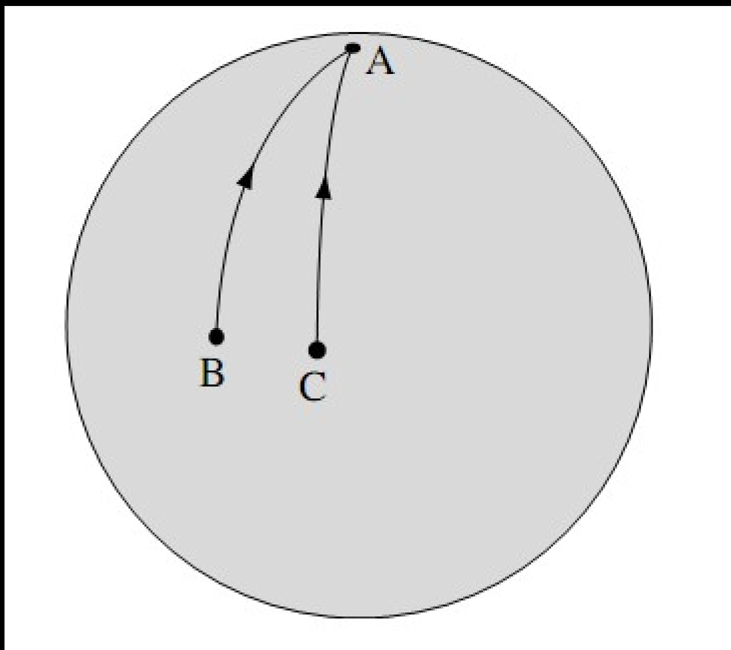
$$g_{\mu\nu} e^{\mu}{}_{\alpha} e^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

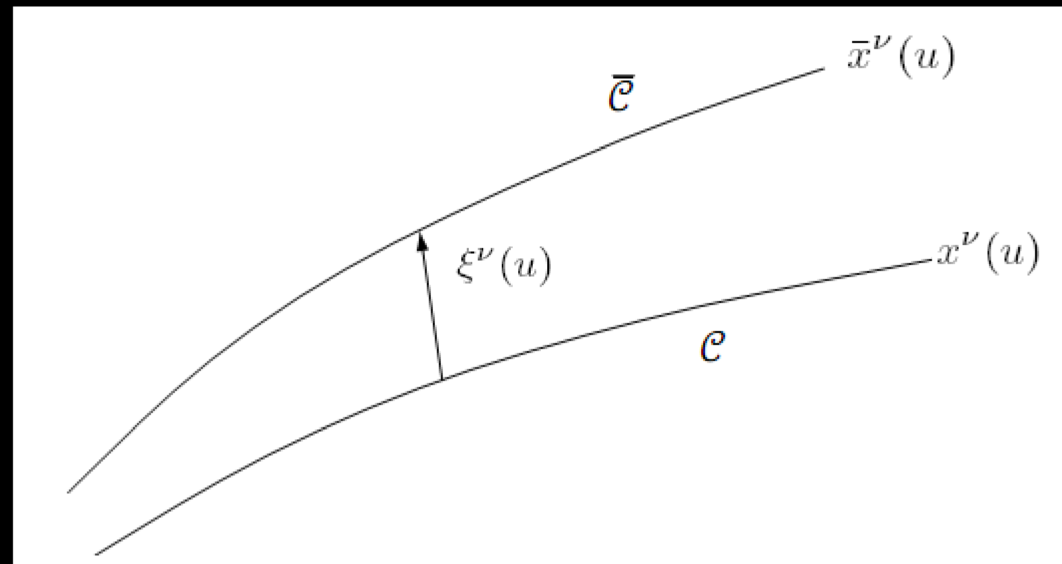
$$V^{\alpha} = e^{\alpha}_{\mu} V^{\mu}$$

$$R^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} \equiv R^{\mu}{}_{\sigma\nu\rho} (\hat{\boldsymbol{e}}^{\alpha})_{\mu} (\hat{\boldsymbol{e}}_{\beta})^{\sigma} (\hat{\boldsymbol{e}}_{\gamma})^{\nu} (\hat{\boldsymbol{e}}_{\delta})^{\rho}.$$

Importante a la hora de calcular “fuerzas de marea” para determinar el comportamiento local del campo gravitacional.

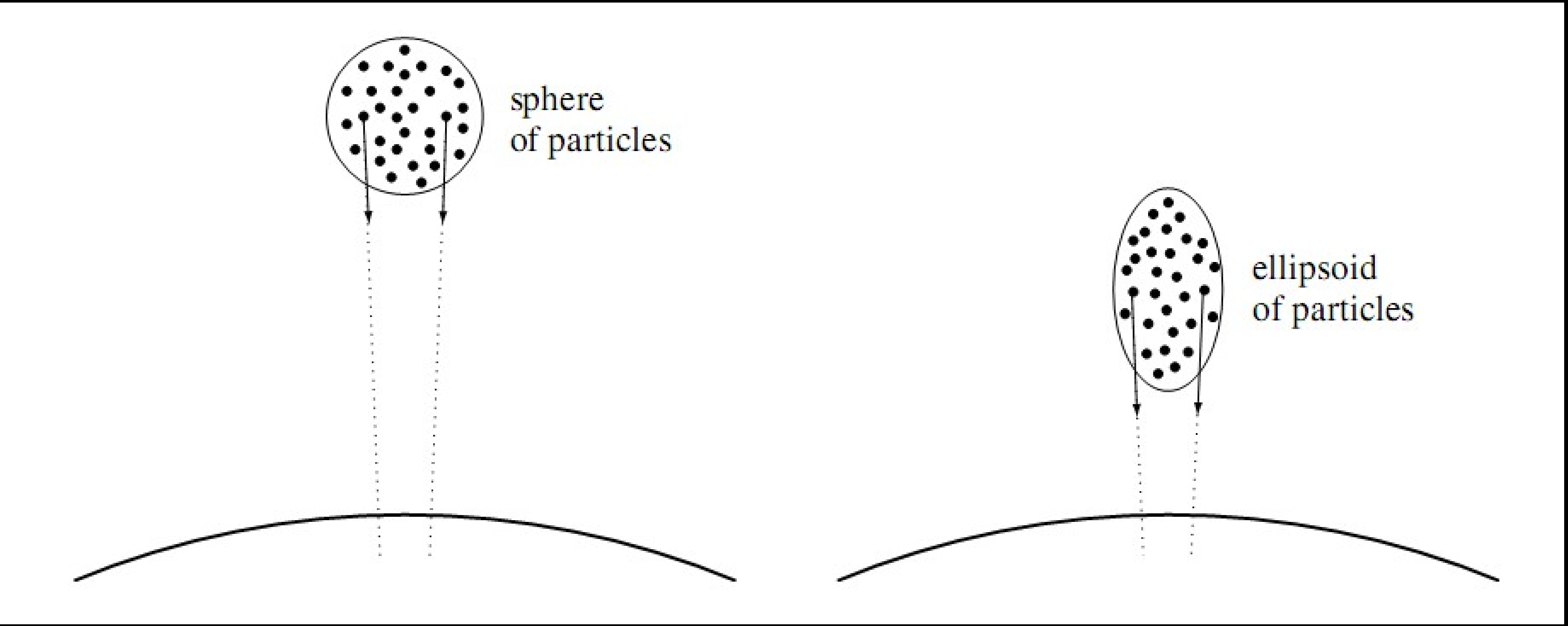
Desvio geodésico





$$\frac{D^2\xi^\mu}{du^2} + R^{\mu}_{\ \nu\sigma\lambda}\xi^\sigma \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0$$

$$\frac{DT^{\mu\nu}}{Du} \equiv \frac{dx^\sigma}{du}\nabla_\sigma T^{\mu\nu}$$


sphere
of particles
ellipsoid
of particles

Ecuaciones de Einstein

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}.$$

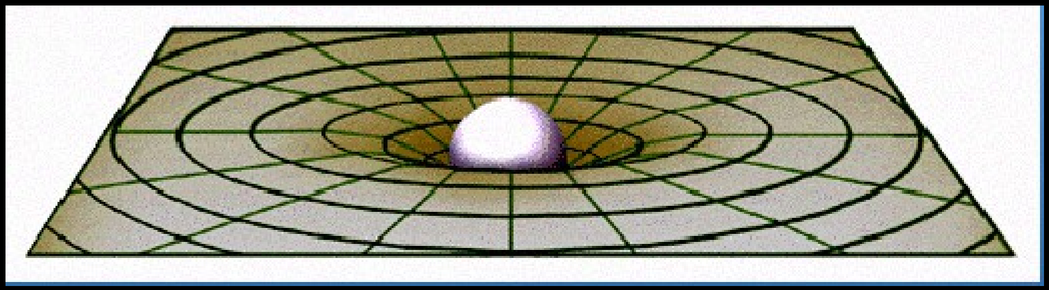
$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi T^{\mu\nu}$$

Sistema de 10 ecuaciones diferenciales no lineares acopladas para los coeficientes de la métrica.
Debido a las identidades de Bianchi,

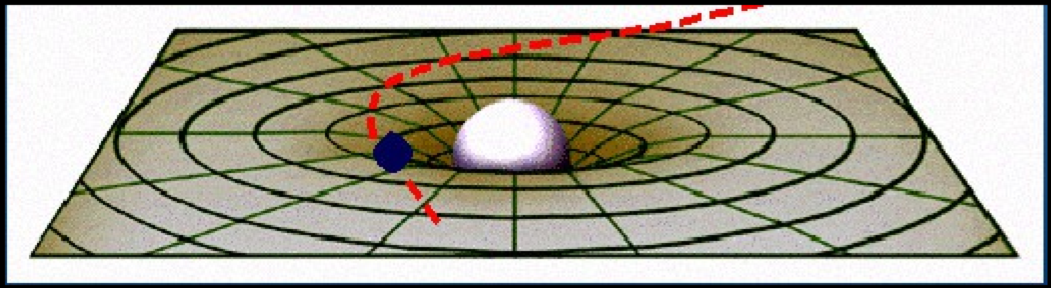
$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

las 10 ecs. se reducen a 6 (lo que refleja la libertad para elegir las coords.)

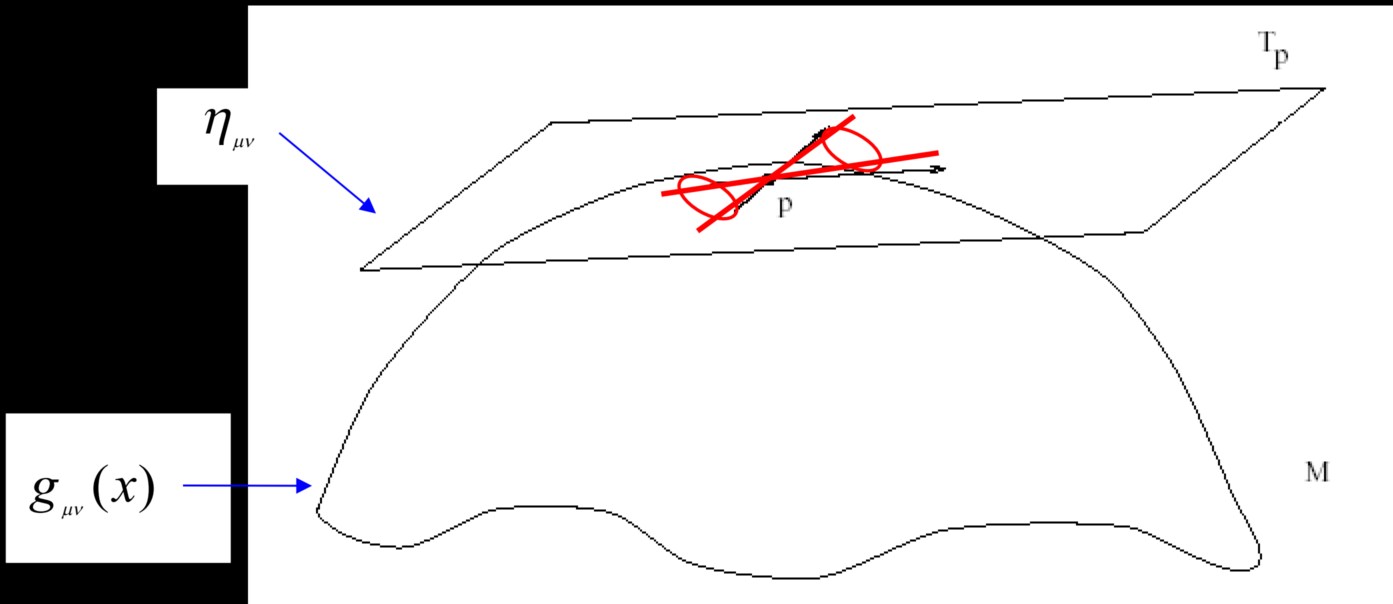
Note que el problema de Cauchy para las ecuaciones de Einstein está bien determinado (d'Inverno).



La materia “curva” a la geometria del espacio-tiempo



La geometria gobierna el movimiento de las partículas



M: Espacio-teimpo curvo

T_P: Espacio-tiempo plano (de Minkowski) tangente a M em el punto P

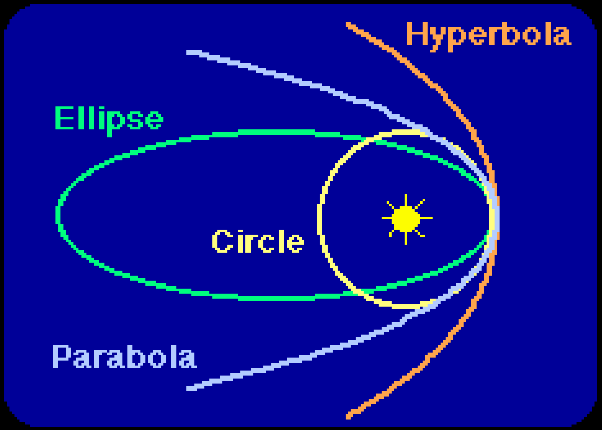
$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

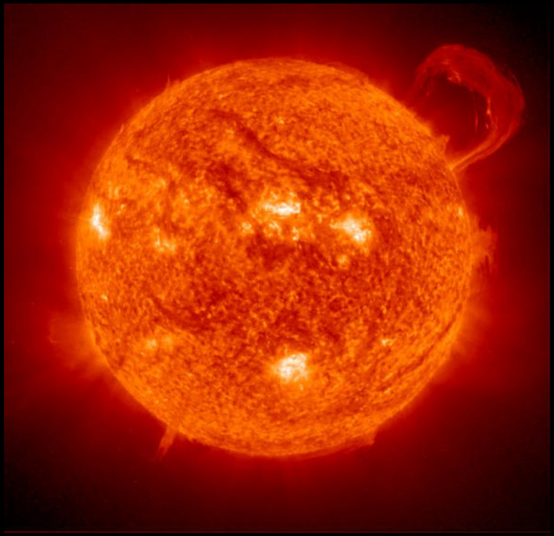
$$g_{\mu\nu}(x_p) = \eta_{\mu\nu}$$

$g_{\mu\nu}$(x) es solución de las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}$$

Teoria de la Gravitación de Newton:



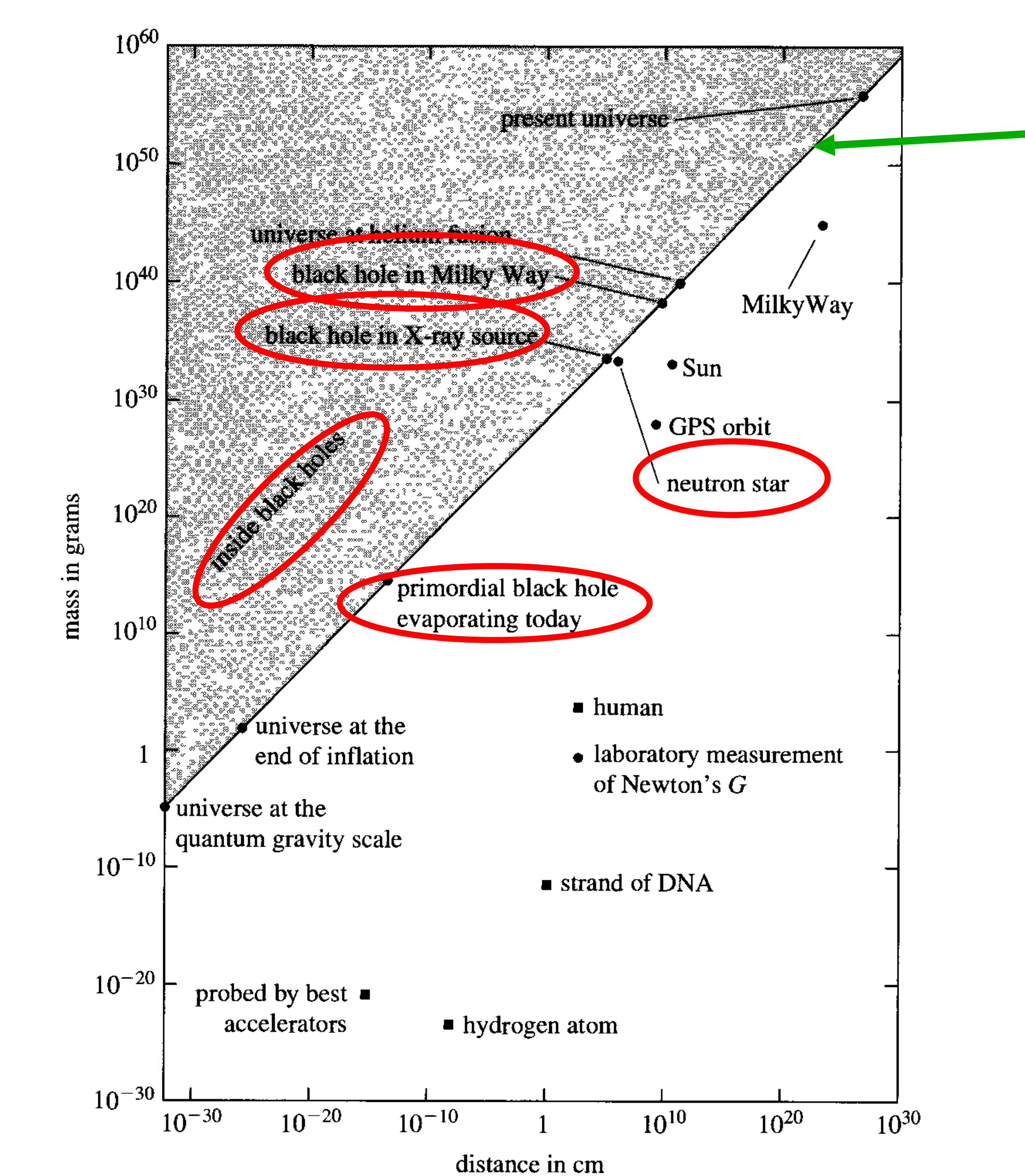


El Sol

Jupiter

Enana blanca (NGC 2440)

FCAGLP 2014



present universe
universe at helium fusion
black hole in Milky Way
black hole in X-ray source
inside black holes
MilkyWay
Sun
GPS orbit
neutron star
primordial black hole
evaporating today
human
laboratory measurement
of Newton's G
universe at the
end of inflation
universe at the
quantum gravity scale
strand of DNA
probed by best
accelerators
hydrogen atom
mass in grams
distance in cm

$$M = \frac{c^2 R}{G}$$