Problemas – 1

1) Una partícula realiza un movimiento descrito parametricamente em relación a un sistema inercial por

$$t(\sigma) = a^{-1}\sinh\sigma, \qquad x(\sigma) = a^{-1}\cosh\sigma$$

donde a es una constante, y sigma varia entre -∞ y +∞. (a) Calcule el tiempo próprio y parametrice la linea de universo em función del mismo. (b) Calcule la 4-velocidad, la 3-velocidad, y la aceleración de la partícula. (c) Calcule las componentes de los 4-vectores ortonormales que definen el sistema de referencia inercial local asociado a este movimiento. (d) Radiación com frecuencia ω es emitida por una fuente em reposo (en el sistema inercial) en la dirección del eje x. Cual es la frecuencia observada en el sistema inercial local calculado em (c)?

2) Considere uma esfera de radio a em un espacio euclideo tridimensional. (1) A partir de la ecuación de la esfera y de la expresión de la distancia entre dos puntos de este espacio, calcule la métrica **sobre** la esfera. Existen puntos em la esfera em los que esta métrica es singular? (2) Utilizando el GRTensor, calcule los tensores de Riemann, Ricci, Weyl, y el escalar de curvatura de la métrica encontrada em (1). Que puede decir sobre los puntos singulares de (1)?

3)Considere el espacio 3-dimensional com geometria dada por

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-2\mu/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2),$$

Calcule: a) el área de la esfera de radio coordenado $r = R$, (b) el 3-volumen de uma esfera con $r = R$, c) la distancia radial entre la esfera $r = 2\mu$ y la esfera $r = 3\mu$, d) el volumen contenido entre las dos esferas del punto c). Verifique que sus respuestas se reducen al caso euclideo cuando $\mu = 0$.

4)Usando el GRTensor, Calcule los simbolos de Christoffel de la métrica del espacio plano em 2d em coordenadas polares, y resuelva las ecuaciones de las geodésicas em este sistema.

5)Interprete la solución

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b}{\phi}\right) d\theta^2 - \left(1 - \frac{b}{\phi}\right)^{-1} d\phi^2 - \phi^2 dt^2 - \phi^2 \sin^2 t\, dr^2$$

en la que b es una constante,

6)Usando el GRTensor, transforme la métrica de un agujero negro en coordenadas de Schwarszchild usando la coordenada ρ definida por

$$r = \rho\left(1 + \frac{\mu}{2\rho}\right)^2,$$

7) (a)Usando el GRTensor, muestre que la métrica

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2\mu}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\mu}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2).$$

es solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica Λ. (b) Calcule las ecuaciones de movimiento de las geodésicas de partículas de masa no nula, y vea si se reducen a las del caso de Schwarszchild cuando $\Lambda=0$. (c)Defina el potencial efectivo y discuta los posibles movimientos en función de las cantidades conservadas. (d) Grafique el potencial efectivo em funcion de r/R y L/R en el Maple, donde R es el radio de Schwarschild.

8)(a) Usando el potencial efectivo, discuta los posibles movimientos de particulas de masa nula en la métrica correspondiente a un agujero negro em las coordenadas de Schwarzschild. (b) Adapte la hoja de Maple orbitasschw.mw (disponible en la página de Internet del curso) al caso de particulas de masa nula y obtenga un gráfico en coordenadas polares de cada uno de los tipos de movimiento discutidos em (a). En particular, examine el movimiento de partículas com energia próxima (pero menor) al máximo de potencial.