Ejercicios – 2

1)Obtenga usando el Grtensor las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right),$$

en el caso de uma estrella estática y esfericamente simétrica con un fluido perfecto como fuente:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu},$$

Compare sus resultados con los de algun libro de texto (tal como el Hobson et al). Obtenga las ecuaciones para los coeficientes métricos em términos de la densidad de energia ρ, la presion *p* y su derivada, y la función *m(r)* definida por

$$m(r) = 4\pi\int_0^r \rho(\bar{r})\bar{r}^2\,d\bar{r}.$$

Obtenga la ecuación de Oppenheimer-Volkoff:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{r^2}(\rho c^2 + p)\left[\frac{4\pi G}{c^4}pr^3 + \frac{Gm(r)}{c^2}\right]\left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right]^{-1}$$

En el caso de densidad constante, calcule la expresión del radio de la estrella em terminos de la densidad y de la presión en el centro de la estrella. Calcule la presión y los coeficientes métricos en función de *r* .Obtenga la conclusión del teorema de Buchdal de estas ecuaciones.

2) Calcule el escalar de Kretschmann para la métrica de Kerr em coordenadas *(t,x,y,z).* Muestre que la única región singular está descripta por la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ and } z = 0.$$

3) (a) Obtenga y analice la geometria de las superficies bidimensionales S^+ *y* S^- (superficies de redshift infinito). Que pasa en el límite $a = 0$? (b) Haga un embedding de una de estas superficies em R^3 y grafique la superficie resultante.

4) Obtenga las ecuaciones de las geodésicas nulas y no nulas e el ecuador de la solución de Kerr. Analice el potencial correspondiente en los dos casos para $aL > 0$ y $aL < 0$ (vea por ejemplo el libro de Schutz). Determine el radio de las órbitas circulares nulas y no nulas mas internas (vea por ejemplo el libro de Hobson et at). Adapte la hoja de Maple orbitasschw.mw al caso de las órbitas no nulas en el ecuador de la solución de Kerr, y grafique en coordenadas polares por lo menos uma órbita típica em cada caso posible.

5)Discuta el proceso de Penrose (vea por ejemplo Hobson et al). Usando valores "razonables", estime em cuanto tiempo seria extraida la energia de un agujero de Kerr de algunas masas solares usando "proyectiles" com $p_\phi = 0$.

6)Un tensor de Killing es definido por

$$\nabla_{(\sigma}\xi_{\mu_1\cdots\mu_n)} = 0\ .$$

Un ejemplo de tensor de Killing es la métrica del espacio-tiempo. A diferencia de los vectores de Killing, los tensores de Killing no corresponden a simetrias de la métrica. Muestre que en cualquier punto de una geodésica,

$$\xi_{\mu_1\cdots\mu_n}\frac{dx^{\mu_1}}{d\lambda}\cdots\frac{dx^{\mu_n}}{d\lambda} = \text{constant}\ .$$

En la métrica de Kerr existe un tensor de Killing dado por

$$\xi_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu}$$

con

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\Delta}\left(r^2 + a^2, \Delta, 0, a\right) \\ n^\mu &= \frac{1}{2\rho^2}\left(r^2 + a^2, -\Delta, 0, a\right) \ . \end{aligned} \qquad l^\mu l_\mu = 0 \ , \quad n^\mu n_\mu = 0 \ , \quad l^\mu n_\mu = -1 \ .$$

Usando el Grtensor muestre que este tensor satisface la ecuacion que define a un tensor de Killing. Muestre que la constante mencionada encima es

$$K = \frac{1}{\Delta}\left(p^t - a\Delta \sin^2\theta \, p^\phi\right)^2 - \frac{\varrho^4}{\Delta}(p^r)^2 - m^2 r^2$$

Esta cuarta cantidad conservada em la métrica de Kerr fué fundamental para que B. Carter mostrase que la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable, y así integrar las ecuaciones de las geodésicas (Phys. Rev. D 174, 1559 (1968)).