**Problemas – 3**

1) **Órbitas circulares de partículas com masa no nula en Schwarszchild y Kerr.** En el caso de un movimiento circular en $r = r_c$ , $dr/dt = 0$, $d^2r/dt^2 = 0$. (a) Muestre que en el caso de la métrica de Schwarszchild, el radio de la órbita circular es

$$r = \frac{h}{2\mu c^2}\left(h \pm \sqrt{h^2 - 12\mu^2 c^2}\right).$$

Calcule el valor de $h$ (momento angular por unidad de masa) y $k$ (energia por unidad de masa) para esta órbita. Para que valor del momento angular por unidad de masa existe solo un radio? Cual es el radio de la última órbita estable correspondiente?
(b) En el caso de Kerr, em la la notación usada en la clase, las condiciones satisfechas por el radio de la órbita circular se traducen em

$$V_{\text{eff}}(r_c; h, k) = \tfrac{1}{2}c^2(k^2 - 1) \qquad \left.\frac{dV_{\text{eff}}}{dr}\right|_{r=r_c} = 0.$$

(c) Haciendo las substituciones $u = 1/r$ y $x = h\text{-}ack$ , muestre que estas dos ecuaciones toman la forma

$$c^2k^2 = c^2(1 - \mu u) + \mu x^2 u^3,$$
$$2xacku = x^2u(3\mu u - 1) - c^2(a^2u - \mu).$$

Obtenga una cuadrática para $x^2$ y muestre (usando el Maple) que la solución es

$$x^2 = \frac{c^2(a\sqrt{u} \pm \sqrt{\mu})^2}{u(1 - 3\mu u \mp 2a\sqrt{\mu u^3})}.$$

El signo "+" para $x$ es descartado ya que corresponde a una órbita inestable, y queda descartado (el signo "+" del doble signo entre paréntesis corresponde a órbitas en la dirección de rotación del agujero negro) . Muestre que

$$k = \frac{1 - 2\mu u \mp a\sqrt{\mu u^3}}{(1 - 3\mu u \mp 2a\sqrt{\mu u^3})^{1/2}}, \qquad h = \mp\frac{c\sqrt{\mu}(1 + a^2u^2 \pm 2a\sqrt{\mu u^3})}{\sqrt{u}(1 - 3\mu u \mp 2a\sqrt{\mu u^3})^{1/2}}.$$

Muestre que para $a \rightarrow 0$ , estos resultados se reducen a los correspondientes em Schwarszchild. (d ) La condición de estabilidad marginal para una órbita de radio circular es $d^2V_{ef}/ dr^2 = 0$, que se traduce en $d^2V_{ef}/ du^2 = 0$. Muestre que esto implica la relación

$$u = \frac{x^2 + 2ackx + a^2c^2}{6\mu x^2} = \frac{h^2 - a^2c^2(k^2 - 1)}{6\mu x^2}.$$

Usando las expresiones para $k$ y $h$ obtenga la ecuación

$$r^2 - 6\mu r - 3a^2 \mp 8a\sqrt{\mu r} = 0,$$

Grafique $r$ por unidad de masa contra $a$ por unidad de masa. (e) La diferencia entre $E = km_0c^2$ y $m_0c^2$ es la energia de ligadura gravitacional de la órbita. Grafique $k$ contra $a$ por unidad de masa. La eficiencia se define como $\varepsilon = 1- k$. Justifique esta definición. A partir del gráfico, cual es la mayor eficiencia posible? Para que valor del $a$ por unidad de masa es obtenida la eficiencia máxima?

2) (a) **Efecto Lense-Thirrring.** Muestre que en el límite de rotación lenta $a << 1$, la métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist toma la forma

$$ds^2 = ds^2_{\text{Schwarzschild}} + \frac{4GJ}{c^2 r}\sin^2\theta\, d\phi\, dt,$$

(b) Muestre que em el límite de campo débil, esta métrica se escribe

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \left(1+\frac{2GM}{c^2 r}\right)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2)$$
$$+\frac{4GJ}{c^2 r}\sin^2\theta\, d\phi\, dt. \qquad (13$$

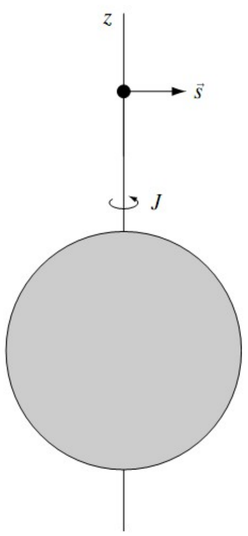
(c ) Usando el Grtensor, muestre que em coordenadas cartesianas definidas por

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad y = r\cos\theta, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

la forma de esta métrica es

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \left(1+\frac{2GM}{c^2 r}\right)(dx^2+dy^2+dz^2)$$
$$+\frac{4GJ}{c^2 r^3}(x\,dy - y\,dx)\,dt,$$

(d) Considere un objeto con momento angular $\boldsymbol{S}$ em caída libre siguiendo la geodésica del eje de rotación com velocidad $\boldsymbol{u}$ de un objeto em rotación lenta, como muestra la figura. $\boldsymbol{S}$ no puede tener




componente 0 en el sistema de reposo instantáneo del cuerpo → $\boldsymbol{S}.\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ a lo largo de la geodésica. Como $\boldsymbol{u}$ es transportado paralelamente sobre la geodésica, $\boldsymbol{S}$ también lo es, para conservar el producto escalar. Inicialmente tenemos que

$$[u^\mu] = (u^t, 0, 0, u^z) \qquad [s^\mu] = (0, s^x, s^y, 0).$$

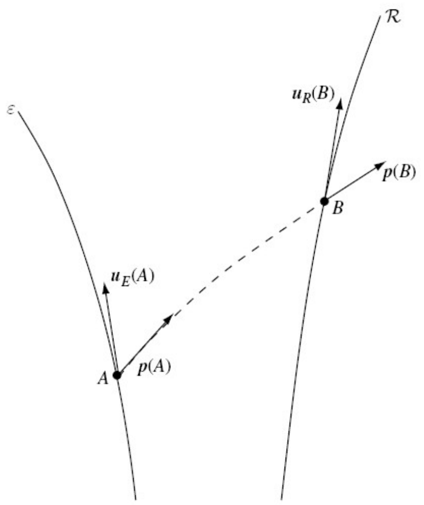
Esta forma de los vectores es conservada debido a la conservación del producto escalar. Calcule las dos equaciones que siguen de $(\boldsymbol{u}.\blacktriangledown)\,\boldsymbol{S} = 0$, y los símbolos de Christoffel necesarios (usando el GRtensor). (e) Muestre que en el límite no relativista, dado por $u^t \approx 1$, $u^z \approx 0$ , las ecuaciones para las componentes de $\boldsymbol{S}$ se reducen a

$$\frac{ds^x}{d\tau} = -\frac{2GJ}{c^2 z^3}s^y \qquad \frac{ds^y}{d\tau} = \frac{2GJ}{c^2 z^3}s^x.$$

(f ) Calcule a partir de estas ecuaciones la frecuencia de precesión.

3) La solución de Kerr no tiene horizontes en el caso $a > M$ . Suponga que queremos aumentar $a$ arrojando partículas desde muy lejos en un agujero negro de Kerr extremo ( $a = M$ ) . Cada partícula tiene masa ( $mE$ ) y momento angular ( $mL$ ) mucho menores que los del agujero negro. (a) Muestre que el cambio en $a = J/M$ será mayor que el cambio en $M$ solamente si $L > 2ME$. (b) Utilizando el potencial efectivo, muestre que partículas con $L > 2ME$ no atraviesan el horizonte, sino que describen órbitas abiertas (esto es, vuelven a infinito).

4) **El *redshift* gravitacional.** En un espacio-tiempo arbitrario, un foton es emitido por algun aparato con linea de universo $E$ y recibido por outro con línea de universo $R$, segun muestra la figura. El foton es emitido en el evento $A$ con momento $\boldsymbol{p(A)}$ y recibido por $R$ en el evento $B$. La energia del foton en $A$ y $B$ vienen dadas por




$$E(A) = \boldsymbol{p}(A) \cdot \boldsymbol{u}_E(A) = p_\mu(A) u_E^\mu(A),$$
$$E(B) = \boldsymbol{p}(B) \cdot \boldsymbol{u}_R(B) = p_\mu(B) u_R^\mu(B).$$

y como $E = h\,\nu,$ el cambio em frecuencia (*redshift*) es

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{p_\mu(B) u_R^\mu(B)}{p_\mu(A) u_E^\mu(A)}.$$

(a) Muestre que em el caso en que el emisor y el receptor están em reposo,

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{p_0(B)}{p_0(A)} \left[\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}\right]^{1/2}.$$

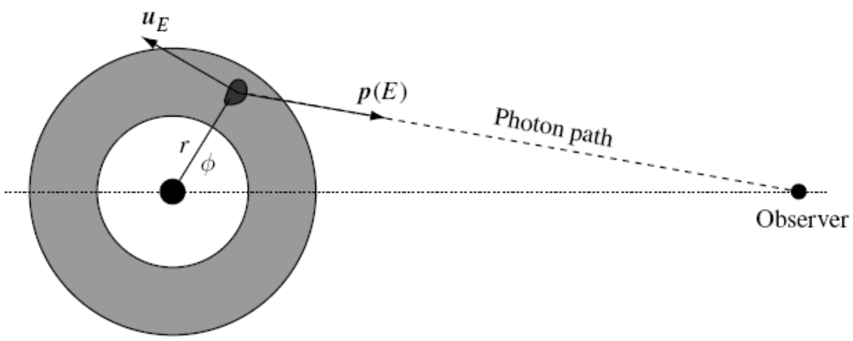
(b) Muestre que en el caso em que la métrica satisfaga la condición

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0.$$

esto es, que sea estacionaria, el redshift se reduce a

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left[\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}\right]^{1/2},$$

5) Los fotones que provienen de átomos en la parte mas interna del disco de acreción traen información sobre el régime de campo fuerte de la gravitación. Estos fotones sufren un cambio em frecuencia debido a dos efectos: el *redshift* gravitacional, y el efecto Doppler debido al movimiento del material com relación al observador. Considere el disco de acreción en torno de un agujero negro de Schwarszchild, em la situación de la figura.




(a) Suponga que el material se mueve em órbitas circulares en el ecuador. El observador en infinito tiene cuadrivelocidad

$$\left[u_R^\mu\right] = (1, 0, 0, 0).$$

Muestre que la cuadrivelocidad del material, dada por

$$\left[u_E^\mu\right] = \left(u_E^0, 0, 0, u_E^3\right).$$

puede ser escrita de la forma

$$[u_E^\mu] = u_E^0(1, 0, 0, \Omega), \qquad \Omega \equiv d\phi/dt = (GM/r^3)^{1/2}$$

(b) A partir de la condición de normalización de la velocidad, muestre que

$$u_E^0 = \left(1 - \frac{3\mu}{r}\right)^{-1/2}.$$

y obtenga la expresión

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left(1 - \frac{3\mu}{r}\right)^{1/2} \left[1 \pm \frac{p_3(E)}{p_0(E)} \Omega\right]^{-1}$$

( c) A partir de la expresión

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = 0$$

restringida al plano ecuatorial, obtenga el cociente

$$p_3(E)/p_0(E)$$

en los casos $\Phi = 0$ o $\pi$ (movimiento de la fuente transversal al receptor), y en los casos $\Phi = +\pi/2$ y $\Phi = -\pi/2$ (movimiento de la fuente alejandose o acercandose al receptor). Muestre que

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left(1 - \frac{3\mu}{r}\right)^{1/2} \qquad \frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{(1 - 3\mu/r)^{1/2}}{1 \pm (r/\mu - 2)^{-1/2}}.$$

respectivamente. (d) Cual seria el resultado para el redshift en el caso en el que el el receptor vé la una de las caras del disco (em lugar del borde, como en la figura)? (e) Calcule el redshift em todos los casos para fotones emitidos em la última órbita circular estable de la geometria de Schwarszchild.

6) La métrica de Kerr-Newman es uma solución estacionaria com simetria axial de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, dada por

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta' \Sigma}{\mathcal{A}'}\right) dt^2 + \frac{\mathcal{A}' \sin^2\theta}{\Sigma}(d\varphi - \omega' dt)^2 + \left(\frac{\Sigma}{\Delta'}\right) dr^2 + \Sigma \, d\theta^2 \qquad (11.1($$

$$\boldsymbol{A} = -\frac{Qr}{\Sigma}(\boldsymbol{dt} - a \sin^2\theta \, \boldsymbol{d\varphi})$$

donde $\boldsymbol{A}$ es la 1-forma asociada al potencial vector (las 1-formas $\boldsymbol{d}t$ y $\boldsymbol{d}\varphi$ deben ser evaluadas em la base coordenada. En otras palabras, $\boldsymbol{A}$ tiene dos componentes, uma en $t$ y la otra en $\varphi$), $Q$ es la carga em unidades geométricas, y

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{a}{\mathcal{A}'}(2mr - Q^2) \\ \Delta' &= r^2 + a^2 - 2mr + Q^2 \\ \mathcal{A}' &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta' \sin^2\theta \, . \end{aligned}$$

Esta solución se reduce a la de Kerr em el caso $Q = 0$, a la de Reissner-Nordstrom em el caso $a = 0$, y a la de Schwarszchild en el caso $Q = a = 0$. Fue probado por Robinson em 1975 que la solución de Kerr-Newman es la única solución de las ecs. de Einstein que describe un espacio-tiempo com un campo eléctrico como fuente, que admite un horizonte, y que es asintóticamente plana, estacionaria y axisimétrica. Note que está caracterizada solamente por tres parámetros: $M$, $Q$, y $a$ . (a) A partir de la ecuación que define al horizonte, dada por $\Delta' = 0$, encuentre la condición que deben satisfacer $M$, $a$, y $Q$, para que exista un horizonte. (b) Usando el GRTensor, calcule los vectores de Killing de la métrica. ( c) A partir del lagrangiano

$$\mathscr{L} = \frac{\mu}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + e A_i \dot{x}^i$$

calcule las cantidades conservadas. (d) Muestre que para el potencial vector dado arriba, la fuerza de Lorentz que acelera a las partículas com carga $e$ segun

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l = e F^i_{\ k} \dot{x}^k$$

está confinada al plano $\theta = \pi/2 \rightarrow$ si la partícula está inicialmente en el ecuador, permanecerá allí.