Problemas 4

1) La métrica

$$ds^2 = [dt + H(r)d\phi]^2 - D^2(r)d\phi^2 - dr^2 - dz^2\,,$$

$$H(r) \;=\; \frac{4\omega}{m^2}\sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right)\,, \qquad\qquad D(r) \;=\; \frac{1}{m}\sinh(mr)\,,$$

describe a la geometria de Gödel. Esta métrica depende de los parámetros *m* y ω, que satisfacen

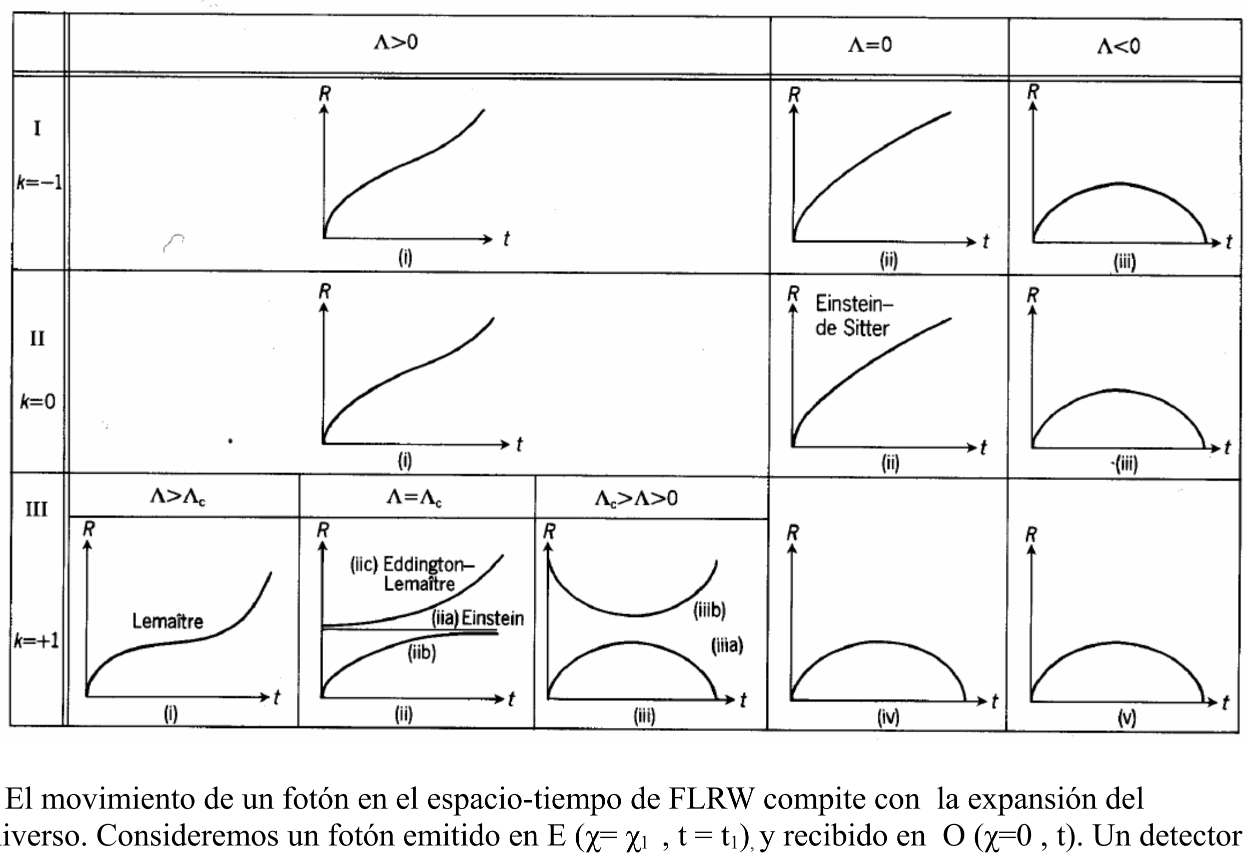
$$\omega^2 > 0, \qquad\qquad -\infty < m^2 < \infty.$$

(a) Estudie las características de las curvas t = cte., z = cte., r = cte. en los casos $m = 0$, $m < 0$, y $m > 0$. Para que valores de r estas curvas son tipo tiempo? Son geodésicas? (b) Encuentre una base coordenada em la que la métrica tome la forma

$$ds^2 = \eta_{AB}\,\theta^A\theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2$$

(c) Usando el GRtensor, escriba las ecuaciones de Einstein en esta base em el caso de un fluido con densidad ρ, sin presión, y con constante cosmológica Λ. Cuales valores de *m,* ω, ρ, y Λ son necesarios para satisfacer las ecuaciones de Einstein? (d) Calcule las cantidades cinemáticas asociadas a la geometria de Gödel usando el Grtensor.

2) Explique cualitativamente cada una de las curvas de la figura usando las ecuaciones de FLRW



3) El movimiento de un fotón en el espacio-tiempo de FLRW compite con la expansión del universo. Consideremos un fotón emitido en E ($\chi = \chi_1$, $t = t_1$), y recibido en O ($\chi=0$, t). Un detector en O recibiria para tiempos entre t_1 y t fotones emitidos em $t = t_1$ provenientes de χ menor o igual que χ_1. La coordenada comóvil χ_1 de E viene dada por

$$\chi_1 = c\int_{t_1}^{t} \frac{d\bar{t}}{R(\bar{t})}.$$

Si la integral converge para $t_1 \to 0$, χ_1 no puede exceder un cierto valor para un dado t, que es el horizonte de partículas. Al tiempo t, la coordenada χ del horizonte de partículas está dada por

$$\chi_p(t) = c\int_0^t \frac{d\bar{t}}{R(\bar{t})} = c\int_0^{R(t)} \frac{dR}{R\dot{R}}$$

y la correspondiente distancia própria es

$$d_p(t) = R(t)\chi_p(t)$$

(a) Muestre que χ_p es finito caso la expansión del universo haya sido siempre desacelerada. (b) Calcule $d_p(t)$ en el caso de un universo dominado por materia, y en el de universo dominado por radiación. (c) La función $d_p(t_e)$ para todos los $t_e < t_0$ describe el conjunto de puntos en nuestro cono de luz pasado. Calcule $d_p(t_e)$ en el caso de un universo dominado por la materia. Grafique $d_p(t_e)$ y explique la forma de la curva.

4) (a) Calcule el campo de velocidades u^μ del fluido perfecto en la métrica

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2\right)\right],$$

usando las ecuaciones de Einstein con el fluido perfecto como fuente, dado por el tensor de energia-impulso

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}.$$

(b) Calcule usando el GRTensor los parámetros cinemáticos (θ, σ, ω, y la aceleración) del campo de velocidades calculado en (a). (c) Es posible probar que una condición necesaria y suficiente para que una métrica dada represente al modelo cosmológico de LFRW es que σ, ω, y la aceleración del campo de sean cero (esto dá un criterio invariante para decidir si una métrica representa al espacio-tiempo de FLRW). Muestre que la métrica

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - R^2(t)\left[\mathrm{d}x^2 + \mathrm{e}^{2Cx}\left(\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)\right]$$

describe al espacio-tiempo de FLRW.

5) (a) Calcule usando el GRTensor el tensor de Weyl del modelo de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker. (b) En el caso del modelo de FLRW "cerrado", cuya métrica es

$$\mathrm{d}s^2 = K^2(ct)\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right] - c^2\,\mathrm{d}t^2,$$

muestre usando el Grtensor que las transformaciones

$$T = \int\frac{\mathrm{d}t}{K(ct)}, \quad r = \frac{2\sin\chi}{\cos\chi + \cos cT}, \quad c\eta = \frac{2\sin cT}{\cos\chi + \cos cT}$$

llevan la métrica a la forma

$$\mathrm{d}s^2 = \tfrac{1}{4}K^2(ct)\left[\cos\chi + \cos cT\right]^2\left[\mathrm{d}r^2 + r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right) - c^2\,\mathrm{d}\eta^2\right]$$

que difiere de la de Minkowski solamente por un factor multiplicativo. Explique la relación entre este resultado y el teorema siguiente: el tensor de Weyl es invariante frente a la transformación

$$g_{ab} = \Omega^2\,\hat{g}_{ab},$$

Esta transformación es llamada transformación conforme, y se dice entonces que la métrica de FLRW es conformemente plana.