Problemas 5

1) **Modelos Cosmológicos analíticos.** En general, la dependencia del factor de escala com el tiempo debe ser calculada numericamente, pero para algunos valores particulares de los parámetros, existe solución analítica. (a) Los modelos sin constante cosmológica son llamados modelos de Friedmann. A partir de la ecuación

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2\left(\Omega_{\mathrm{m},0}\,a^{-1} + \Omega_{\mathrm{r},0}\,a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + 1 - \Omega_{\mathrm{m},0} - \Omega_{\mathrm{r},0} - \Omega_{\Lambda,0}\right).$$

estudie el comportamiento de *da/dt* en el límite $a \to \infty$, para cada valor de *k.* (b) Para los modelos de Friedmann que contienen solamente polvo, muestre que la solución es

$$a(t) = \left(\tfrac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}.$$

($k = 0$),

$$a = \frac{\Omega_{\mathrm{m},0}}{2(\Omega_{\mathrm{m},0}-1)}(1-\cos\psi), \qquad t = \frac{\Omega_{\mathrm{m},0}}{2H_0(\Omega_{\mathrm{m},0}-1)^{3/2}}(\psi - \sin\psi),$$

(k = 1), y

$$a = \frac{\Omega_{\mathrm{m},0}}{2(1-\Omega_{\mathrm{m},0})}(\cosh\psi - 1), \qquad t = \frac{\Omega_{\mathrm{m},0}}{2H_0(1-\Omega_{\mathrm{m},0})^{3/2}}(\sinh\psi - \psi).$$

(c) Muestre que la solución para los modelos que contienen sólo radiación es

$$a(t) = (2H_0 t)^{1/2}.$$

($k = 0$),

$$a(t) = \left(2H_0\Omega_{\mathrm{r},0}^{1/2}t\right)^{1/2}\left(1 + \frac{1-\Omega_{\mathrm{r},0}}{2\Omega_{\mathrm{r},0}^{1/2}}H_0 t\right)^{1/2}.$$

($k = \pm 1$). (d) Muestre que para o modelo de Friedmann con radiación y matéria,

$$H_0 t = \frac{2}{3\Omega_{\mathrm{m},0}^2}\left[(\Omega_{\mathrm{m},0}a + \Omega_{\mathrm{r},0})^{1/2}(\Omega_{\mathrm{m},0}a - 2\Omega_{\mathrm{r},0}) + 2\Omega_{\mathrm{r},0}^{3/2}\right].$$

(e) Los modelos de Friedmann com constante cosmológica no nula son llamados modelos de Lemâitre. Considere el modelo de Lemâitre sin radiación y muestre que cuando *a* es pequeño,

$$a(t) = \left(\tfrac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}\,t\right)^{2/3}$$

mientras que para *a* grande,

$$a(t) \propto \exp\left(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}\,t\right)$$

Encuentre el valor de *a* para el cual ocurre el punto de inflexión (la aceleración cambia de signo). (f) El modelo de deSitter tiene es un modelo de Lemâitre sin radiación ni matéria. Encuentre la dependencia del factor de escala com el tiempo.

2) El tiempo conforme (adimensional) η es definido por la ecuación

$$\frac{1}{t_0}\frac{dt}{d\eta} = a(\eta).$$

Integre la ecuación de FLRW para encontrar el factor de expansión en función del tiempo conforme para el caso em que sólo hay materia y radiación. El resultado es

$$k>0: \quad \begin{cases} a = a_0\left[\alpha(1-\cos\eta)+\beta\sin\eta\right] \\ t = a_0\left[\alpha(\eta-\sin\eta)+\beta(1-\cos\eta)\right] \end{cases}$$

$$k=0: \quad \begin{cases} a = a_0\left[\frac{1}{2}\alpha\eta^2+\beta\eta\right] \\ t = a_0\left[\frac{1}{6}\alpha\eta^3+\frac{1}{2}\beta\eta^2\right] \end{cases}$$

$$k<0: \quad \begin{cases} a = a_0\left[\alpha(\cosh\eta-1)+\beta\sinh\eta\right] \\ t = a_0\left[\alpha(\sinh\eta-\eta)+\beta(\cosh\eta-1)\right] \end{cases}$$

donde

$$\alpha = a_0^2 H_0^2 \Omega_{m0}/2 \qquad \beta = (a_0^2 H_0^2 \Omega_{\gamma 0})^{1/2}$$

3) Calcule la distancia de luminosidad hasta el tercer orden em el *redshift* z. El resultado es

$$d_L(z) = \frac{c\,z}{H_0}\left\{1+\frac{1}{2}\left[1-q_0\right]z-\frac{1}{6}\left[1-q_0-3q_0^2+j_0+\frac{kc^2}{H_0^2a_0^2}\right]z^2 \right.$$
$$+\frac{1}{24}\left[2-2q_0-15q_0^2-15q_0^3+5j_0+10q_0j_0+s_0+\frac{2kc^2(1+3q_0)}{H_0^2a_0^2}\right]z^3$$
$$\left. +O(z^4)\right\}.$$

Interprete el término de orden 0. (Ref: *Jerk and the cosmological equation of state*, M. Visser, Class. Quant.Grav. **21**:2603-2616,2004, e-Print: gr-qc/0309109**).**

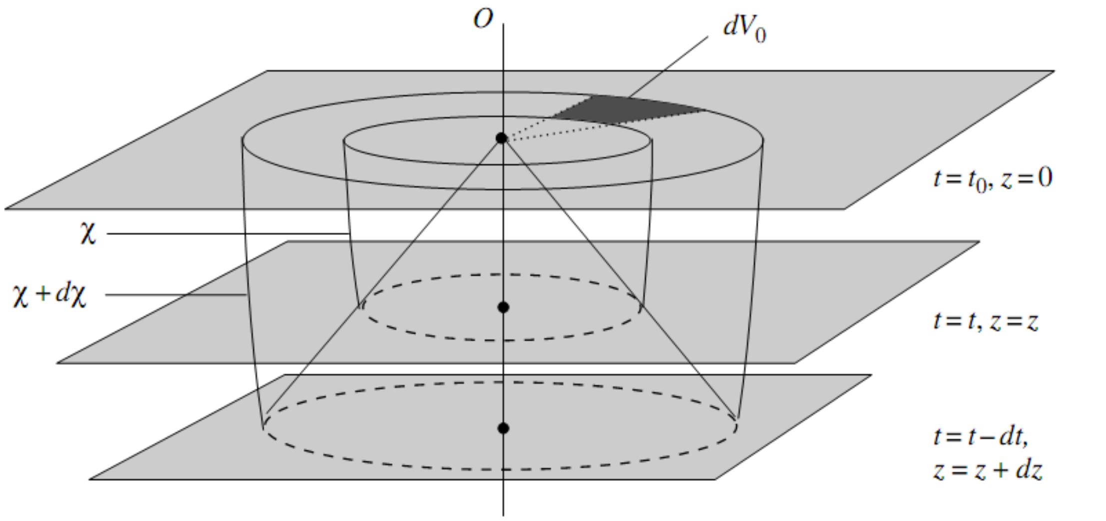
4) En algunas observaciones em Cosmologia es preciso conocer como varia el volumen próprio de una region comovil. (a) En el caso de la métrica de FLRW dada por

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - R^2(t)\left[d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)\right],$$

muestre que el volumen comovente de la región comprendida entre χ y $\chi + d\chi$ en $t = t_0$ que subtiende un ángulo sólido $d\Omega$ es

$$dV_0 = R_0^3 S^2(\chi)\,d\chi\,d\Omega.$$

(la figura muestra este volumen com una dimensión espacial suprimida).



(b) Muestre que en función del redshift,

$$dV_0 = \frac{cR_0^2 S^2(\chi(z))}{H(z)}\, dz\, d\Omega,$$

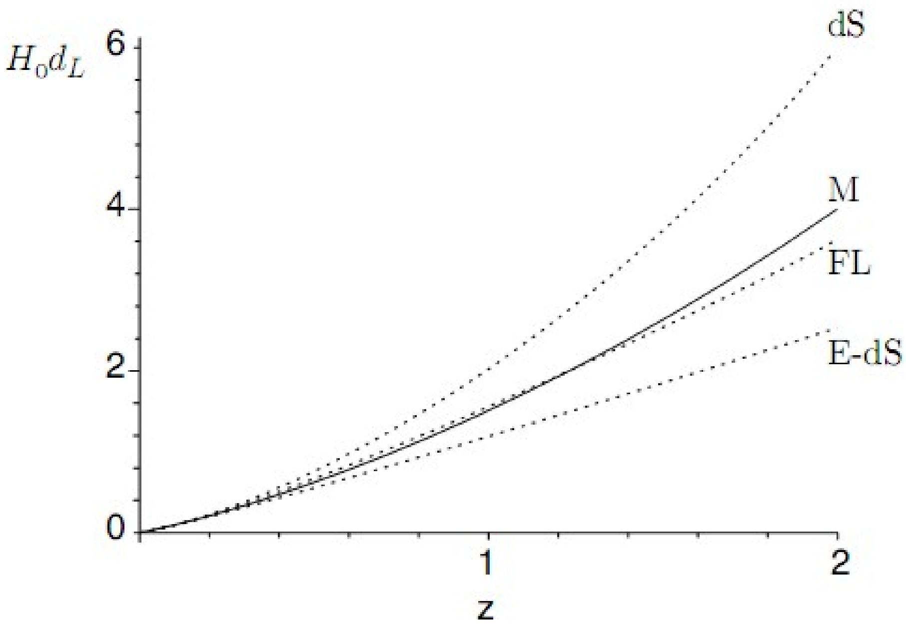
(c) Muestre que para un redshift z,

$$dV(z) = \frac{cR_0^2 S^2(\chi(z))}{(1+z)^3 H(z)}\, dz\, d\Omega.$$

(d) Si la densidad própria de galaxias de un cierto tipo en el redshift z es $n(z)$, y es conservada, y suponiendo que esas galaxias son creadas en $z=z_f$ y que observamos n_0 galaxias de ese tipo por unidad de volumen próprio hoy, muestre que el numero total de galaxias de ese tipo en todo el cielo viene dado por

$$N = 4\pi c n_0 R_0^2 \int_0^{z_f} \frac{S^2(\chi(z))}{H(z)}\, dz.$$

5)Reproduzca em el Maple el gráfico de la distancia de luminosidad contra el redshift para los modelos de DeSitter (dS)(que tiene solamente constante cosmológica), Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FL) con $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_m = 0.3$, Milne (M)($\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_m = 0$), y Einstein-deSitter ($\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_m = 1$) (figura).

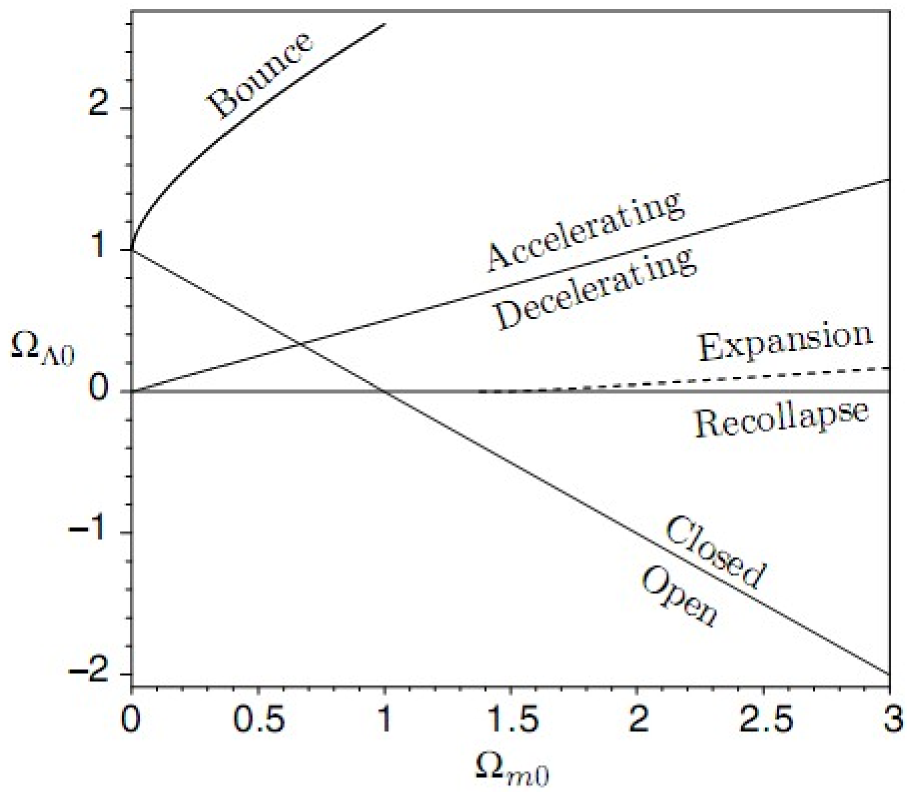


6)Encuentre la expresión analítica de las diferentes curvas del grafico en el plano ($\Omega_{\Lambda 0}$, Ω_{m0}), que describen las diferentes posibilidades para la evolución del universo (figura), a partir de las ecuaciones

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{\mathrm{m},0}\, a^{-3} + \Omega_{\mathrm{r},0}\, a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}\, a^{-2}\right)$$

$$q = \tfrac{1}{2}(\Omega_\mathrm{m} + 2\Omega_\mathrm{r} - 2\Omega_\Lambda). \qquad \Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{r} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1.$$

Note que la condición para pasar de expansión para recolapso es que $H(t_c) = 0$, que es una ecuación cúbica para a. La existencia de raices reales de esta ecuación puede ser analizada considerando los casos $\Omega_{\Lambda,0} > 0$ o 0 (el caso negativo sigue de la ecuación para q). Referencia: libro de Hobson, Efstathiou y Lasenby.



7) La ecuación de Raychaudhuri relaciona la expansión de una congruencia de geodésicas con el resto de los parámetros cinemáticos:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\xi^c\xi^d$$

En esta ecuación, τ es el tiempo próprio y ξ el vector tangente a la geodésica, normalizado segun $\xi.\xi = -1$ (todo em la convención "-+++"). (a) Utilizando las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica y con un fluido perfecto como fuente, substituya el tensor de Ricci por cantidades relacionadas con el fluido y la constante cosmológica, recordando que

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b)$$

(b) Usando las expresiones obtenidas anteriormente para los parámetros cinemáticos del modelo de FLRW, simplifique la ecuación obtenida en (a). (c) Analice en cuales casos es posible evitar el "big bang" em este modelo.