

Trabajo Final:
Introducción a la Astrofísica de Agujeros Negros

Agujero negro regular en la geometría
de Schwarzschild-de Sitter

Carolina Soledad Negrelli

La Plata, Mayo de 2014

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
Universidad Nacional de La Plata

Índice

1. Introducción	1
1.1. Agujeros negros singulares	1
1.2. Primeras ideas sobre agujeros negros regulares	1
2. Geometría de de Sitter	3
3. Agujero negro de Schwarzschild-de Sitter	3
3.1. Vacío esféricamente simétrico	3
3.2. Métrica de Schwarzschild-de Sitter	4
3.2.1. El tensor de Einstein	4
3.2.2. El tensor de energía-impulso	5
3.2.3. La función $m(r)$	5
3.2.4. La solución	6
3.3. El tensor de energía-impulso	6
3.4. Los horizontes	7
3.5. Las coordenadas de Eddington-Finkelstein y la regularidad de la métrica . .	8
3.6. El escalar de Riemman	8
4. Agujero negro regular como producto del colapso gravitatorio	8
4.1. Ecuaciones de Einstein	8
4.2. Ecuación de estado	9
4.3. La solución	11
4.4. Equilibrio de la configuración interna	13
4.4.1. Termodinámica de la materia dentro del horizonte	14
4.4.2. Equilibrio termodinámico	16
4.4.3. Equilibrio dinámico	19
5. Conclusiones	19

1. Introducción

1.1. Agujeros negros singulares

La solución a las ecuaciones de Einstein más estudiada es la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

con

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (2)$$

donde M es la masa de la fuente medida por un observador distante. La geometría de Schwarzschild describe al campo gravitacional producido por una masa esférica en un espacio-tiempo vacío.

Esta métrica esféricamente simétrica es usada para describir el resultado del colapso gravitatorio, i.e. un agujero negro, cuando el momento angular, la carga eléctrica y magnética de la estrella colapsante son nulas. En este caso, el tensor de energía-impulso responsable de la geometría es igual a cero en todo punto excepto en $r = 0$, donde la densidad de energía es infinita. Además, los invariantes de Riemman también tienden a infinito cuando $r \rightarrow 0$ y la noción estandar de la geometría espacio-temporal pierde sentido allí. Decimos entonces, que en $r = 0$ hay una singularidad.

Hemos aprendido a aceptar la idea que la Teoría de la Relatividad General predice agujeros negros y también singularidades. Sin embargo, la presencia de esta última suele ser una motivación para remarcar que esta teoría es inadecuada para describir el espacio-tiempo debajo de una cierta escala de longitudes.

Esto ha incentivado la búsqueda de una teoría de la gravedad más completa que incluya los efectos cuánticos. Se espera que esta teoría admita un estado con curvatura finita como resultado final del colapso gravitatorio. Otro punto de vista, es pensar que la presencia de las singularidades simplemente refleja nuestra falta de entendimiento de las propiedades de la materia bajo condiciones extremas. Se sugiere que las singularidades podrían ser evitadas si se relajan algunas de las condiciones impuestas a la materia colapsante. También se han hecho muchos esfuerzos para llevar la teoría de Einstein al límite tratando de evitar la singularidad.

Es interesante entonces, considerar si las singularidades pueden ser evitadas en presencia de horizontes. A las soluciones en las que esto sucede se las llama agujeros negros regulares.

1.2. Primeras ideas sobre agujeros negros regulares

Una singularidad inevitable como estado final del colapso de un cuerpo masivo es el resultado de los teoremas de singularidades probados por Penrose, Hawking y Geroch en la segunda mitad de los años sesenta. Una de las condiciones en las que se basan estos

teoremas es la Condición Fuerte de Energía, que establece que para cada vector tipo tiempo u^α

$$\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right)u^\alpha u^\beta \geq 0. \quad (3)$$

Esta condición garantiza que en el colapso gravitatorio la contracción sea ilimitada.

La primer semilla de lo que eventualmente llevaría a la idea de agujero negro regular fue la propuesta de A. D. Sakharov a mediados de los años sesenta que consideraba que *presión=-densidad de energía* era la ecuación de estado apropiada para describir el estado de la materia y energía a altas densidades. Esta ecuación de estado es la misma que obedece la constante cosmológica.

Luego en 1966, E. B. Gliner sugirió que a muy altas densidades todo tipo de partícula pierde su identidad de materia sufriendo una transición a un estado de vacío descrito por el tensor de energía impulso $T_{\alpha\beta} = \varepsilon g_{\alpha\beta}$ y la geometría de de Sitter. La característica más importante de la geometría de de Sitter es la divergencia de las geodésicas. La gravedad actúa de forma tal que las partículas libres se comportan como si fueran repelidas desde el centro. Con esto en mente, Gliner sugirió que si un estado físico de vacío de este tipo puede lograrse durante un colapso, entonces la contracción podría ser detenida y un estado de vacío sería el estado final de un colapso gravitatorio, en vez de una singularidad. Esta propuesta, que debería haber ayudado a deshacerse de la singularidad, no fue avalada en ese tiempo por una solución exacta a las ecuaciones de Einstein.

La primer solución regular de las ecuaciones de Einstein con horizontes fue obtenida en 1968 por J. M. Bardeen. Esta es solución a las ecuaciones en presencia de un campo eléctrico, como la bien conocida solución de Reissner-Nordström, y es parametrizada por la masa m y la carga e . Para r pequeños, la métrica se comporta como la de de Sitter y es asintóticamente Schwarzschild para r grandes. Es decir que, la solución de Bardeen es el primer caso concreto que plasma las ideas de Sakharov y Gliner reemplazando la singularidad por un núcleo de de Sitter regular.

A partir de estas ideas, es natural que se pensara en reemplazar el interior de un agujero negro de Schwarzschild por el espacio-tiempo de de Sitter. En 1988, E. Poisson y W. Israel postularon que la transición de un espacio-tiempo de Schwarzschild a uno de de Sitter es posible pero que es necesario interponer una capa de material no-inflacionario en la interfase.

Vamos a tratar de mostrar cómo la solución de de Sitter y la física subyacente pueden arrojar luz en uno de los más dramáticos problemas físicos: el problema de las singularidades. En la primer parte de este trabajo encontraremos cuál es la geometría generada por un espacio-tiempo vacío con constante cosmológica no nula y mostraremos que esta geometría describe un agujero negro regular. En la segunda parte, consideraremos a este agujero negro regular como el resultado de un colapso gravitatorio y analizaremos cómo debe ser el tensor de energía-impulso y que propiedades debe tener la materia involucrada. Luego, analizaremos la propiedades termodinámicas del modelo y mostraremos que es termodinámica y dinámicamente inestable.

2. Geometría de de Sitter

En 1917 Willem de Sitter publicó su solución cosmológica

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - (r^2/r_0^2)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4)$$

con $r_0^2 = 3/\Lambda$ donde la constante cosmológica Λ es la responsable de la geometría.

Recién quince años después, se comprendió que la métrica de de Sitter es la solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica. Por lo tanto, la geometría de de Sitter es generada por un vacío con densidad de energía no nula $\varepsilon = \Lambda c^4/8\pi G$ descrita por el tensor de energía-impulso

$$T_{\alpha\beta} = \varepsilon g_{\alpha\beta}, \quad (5)$$

con ecuación de estado

$$p = -\varepsilon \quad (6)$$

donde p es la presión del fluido.

De la ecuación de conservación $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ se obtiene que ε es constante, implicando p constante. Por lo tanto, el tensor de energía-impulso (5) describe un vacío isotrópico.

Los resultados de la última década del WMAP han confirmado que nuestro universo es descrito por el modelo cosmológico Λ CDM cuya componente de energía oscura es equivalente a una constante cosmológica $\Lambda > 0$. Esta energía oscura representa casi tres cuartos del contenido total de energía del universo ($0,728 \leq \Omega_\Lambda \leq 0,738$).

El primer indicio de la existencia de la componente de energía oscura fue obtenido en 1998 cuando el análisis de datos de supernovas tipo Ia deo nos mostró una expansión acelerada del universo. La responsable de esta expansión acelerada sería la energía oscura. Esto es debido a su presión negativa $p = \omega\rho$, con $\omega < -1/3$. El mejor ajuste para ω es $\omega = -1$ que se corresponde con una constante cosmológica $\Lambda > 0$.

A pesar de que Λ haya tenido una contribución despreciable en el universo temprano, la densidad de energía de todas las demás componentes (materia normal, materia oscura fría radiación, neutrinos y ondas gravitacionales) decrece a medida que el universo se expande. Entonces, Λ tuvo que volverse dominante en algún momento del pasado y por eso hoy tenemos una expansión acelerada. En un futuro distante, todas las demás componentes serán varios órdenes de magnitud menores que Λ y se volverán despreciables. En este estado final, el tensor de energía-impulso va a estar dado por (5). Como vimos, la solución a las ecuaciones de Einstein con esta fuente es el espacio-tiempo de de Sitter.

3. Agujero negro de Schwarzschild-de Sitter

3.1. Vacío esféricamente simétrico

El vacío es definido como el tipo de materia que no permite un marco de referencia preferencial. Entonces, cualquier marco de referencia es comóvil con el vacío. Esta propiedad

no solo se cumple para el vacío estandar $T_{\alpha\beta} = 0$. Por ejemplo, el tensor de energía-impulso (5) describe un vacío isotrópico. También existen otras posibilidades.

Si exigimos simetría esférica el tensor de energía-impulso debe cumplir que $T_2^2 = T_3^3$ con todas sus componentes espaciales cruzadas nulas. Un tensor de energía-impulso de la forma

$$T_2^2 = T_3^3 \quad \text{y} \quad T_0^0 = T_1^1 \quad (7)$$

tiene un conjunto infinito de marcos de referencia comóviles, de acuerdo con la clasificación de Petrov. Entonces, puede ser interpretado como el tensor de energía-impulso que describe al vacío esféricamente simétrico. En general, este vacío es anisotrópico. De la clasificación de Petrov se tiene que existe solo un tipo de estructura algebraica del tensor de energía-impulso que describe al vacío esféricamente simétrico.

Mostraremos que el vacío esféricamente simétrico puede generar una solución de agujero negro que es regular en $r = 0$ y en cualquier otro punto.

3.2. Métrica de Schwarzschild-de Sitter

3.2.1. El tensor de Einstein

La métrica esféricamente simétrica y estática más general tiene la forma

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (8)$$

donde hemos considerado $c = 1$. A partir de los coeficientes $g_{\mu\nu}$ podemos calcular las conexiones

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (9)$$

el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma, \quad (10)$$

el escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (11)$$

y el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (12)$$

Las primeras dos componentes de este último son

$$G_{00} = \frac{e^{-\lambda+\nu} (-1 + e^\lambda + r\lambda')}{r^2} \quad (13)$$

$$G_{11} = \frac{1 - e^\lambda + r\nu'}{r^2} \quad (14)$$

donde $\lambda' = d\lambda/dr$ y $\nu' = d\nu/dr$.

3.2.2. El tensor de energía-impulso

Utilizando la ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (15)$$

donde consideramos $G = 1$, encontramos que

$$G_0^0 = g^{0\mu} G_{\mu 0} = g^{00} G_{00} = -e^{-\nu} G_{00} = 8\pi T_0^0 \quad (16)$$

$$G_1^1 = g^{1\mu} G_{\mu 1} = g^{11} G_{11} = e^{-\lambda} G_{11} = 8\pi T_1^1. \quad (17)$$

Como en nuestro caso pedimos que $T_0^0 = T_1^1$, entonces $-e^{-\nu} G_{00} = e^{-\lambda} G_{11}$. Lo cual nos lleva a la condición

$$\lambda' + \nu' = 0. \quad (18)$$

Dado que estamos buscando una solución esféricamente simétrica y estática, al integrar obtenemos que $\lambda + \nu = 0$.

Debemos asumir una forma específica para el tensor de energía-impulso (7). Pedimos que

$$T_0^0 = T_1^1 = \varepsilon \exp\left(-\frac{r^3}{r_0^2 r_s}\right), \quad (19)$$

donde

$$r_0^2 = \frac{3}{8\pi\varepsilon}. \quad (20)$$

3.2.3. La función $m(r)$

Definimos una nueva función $m(r)$ como :

$$m(r) = \frac{r}{2} (1 - e^\nu). \quad (21)$$

Resolviendo la ecuación (16) y considerando que el tensor de energía-impulso es el de un fluido ideal se encuentra

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 T_0^0, \quad (22)$$

que coincide con la fórmula estandar de la masa

$$m(r) = 4\pi \int_0^r T_0^0 r^2 dr. \quad (23)$$

Reemplazando (19) obtenemos

$$m(r) = \frac{r_s}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^3}{r_0^2 r_s}\right)\right). \quad (24)$$

Cuando $r \rightarrow \infty$ nos da la masa total M que está relacionada con r_s según (2).

Despejando (21) tenemos que

$$e^\nu = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (25)$$

y considerando que $\lambda + \nu = 0$, entonces

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}. \quad (26)$$

3.2.4. La solución

Definimos

$$R_g(r) = 2m(r) = r_s \left[1 - \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right) \right] \quad (27)$$

con

$$r_*^3 = r_0^2 r_s. \quad (28)$$

Reemplazando $R_g(r)$ en (8) llegamos finalmente a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_g(r)}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - (R_g(r)/r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (29)$$

Esta es una solución exacta a las ecuaciones de Einstein con simetría esférica. Para $r \gg r_*$ coincide con la solución de Schwarzschild (1), y para $r \ll r_*$ se comporta como la solución de de Sitter (4).

3.3. El tensor de energía-impulso

Queremos obtener las componentes restantes del tensor de energía-impulso. Como pedimos simetría esférica, i.e $T_2^2 = T_3^3$, solo será necesario calcular una de las dos componentes.

De la misma forma que obtuvimos (16) y (17) encontramos que

$$G_{22} = \frac{r}{4} e^{-\lambda} [2\nu' + r\nu'^2 - \lambda' (2 + r\nu') + 2r\nu'']. \quad (30)$$

A partir de las ecuaciones de Einstein (15) y considerando (25) y (27) llegamos a que

$$T_2^2 = T_3^3 = \varepsilon \left(1 - \frac{3r^3}{2r_*^3} \right) \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right). \quad (31)$$

Entonces, nuestro vacío esféricamente simétrico es anisotrópico pues (19) y (31) no tienen por qué ser iguales. Sin embargo, cuando $r \ll r_*$ tenemos isotropía pues $T_0^0 = T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = \varepsilon$. Lo mismo sucede para $r \gg r_*$, pues todas las componentes del tensor tienden rápidamente a cero $T_0^0 = T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = 0$ y obtenemos el vacío estándar que es isotrópico.

3.4. Los horizontes

La métrica (29) tiene dos horizontes, el externo r_+ y el interno r_-

$$r_+ = r_s \left[1 - \exp\left(-\frac{r_s^2}{r_0^2}\right) \right] \quad r_- = r_0 \left(1 - \frac{r_0}{4r_s} \right). \quad (32)$$

Para encontrar estas expresiones hay que ver dónde divergen las componentes de la métrica. Por lo tanto, buscamos que

$$R_g = r_s \left[1 - \exp\left(-\frac{r^3}{r_*^3}\right) \right] = r. \quad (33)$$

Debido a que $g_{00}(r_+) = 0$, la métrica (29) describe un objeto con las mismas propiedades que aquellas que definen a un agujero negro: no puede enviar ninguna señal al exterior y solo interactúa con su ambiente a través de su campo gravitacional. Es decir, el horizonte exterior r_+ es un horizonte de eventos.

El horizonte interno r_- es un horizonte de Cauchy. Es decir, que dentro de él no puedo hacer predicciones con los datos que conozco. La caída de la predictibilidad supone un serio problema tanto para el interior de un agujero negro como para múltiples espacio-tiempos conectados.

r_+ y r_- coinciden para una dada masa M_{cr} que se corresponde con el llamado agujero negro extremo. Este valor pone un límite inferior a la masa del agujero negro. Es interesante remarcar que si $M < M_{cr}$ la geometría de Schwarzschild - de Sitter describe una estructura tipo partícula autogravitante sin horizontes llamada G-lump tal como se muestra en la Figura 1.

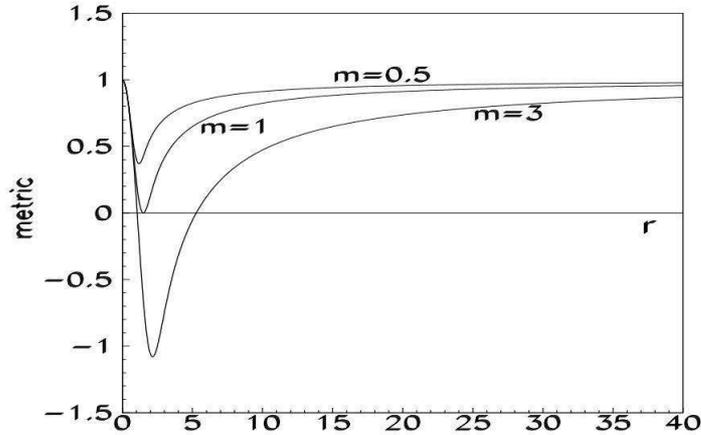


Figura 1: La función $g(r) = 1 - R_g(r)/r$ para la configuración de Schwarzschild - de Sitter. La masa M está normalizada de forma tal que $M_{cr} = 1$. Si $M > M_{cr}$ la métrica describe un agujero negro no singular con dos horizontes. Si $M = M_{cr}$ se corresponde con un agujero negro extremo cuyos horizontes coinciden. Si $M < M_{cr}$ no hay horizontes y tenemos un G-lump.

Ambos horizontes son singularidades que pueden ser removidas de la métrica por medio de un cambio de coordenadas apropiado.

3.5. Las coordenadas de Eddington-Finkelstein y la regularidad de la métrica

Para encontrar la extensión analítica máxima de la métrica (29) debemos introducir las coordenadas isotrópicas de Eddington-Finkelstein. En éstas la solución (29) está dada por

$$ds^2 = - \left| 1 - \frac{R_g(r)}{r} \right| dudv + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (34)$$

que es regular en r_+ y r_- . Además, cuando $r \rightarrow 0$ podemos aproximar la exponencial dentro de R_g de forma tal que $R_g(r) \rightarrow r^3/r_0^2$ y vemos que la métrica también es regular en este límite. Por lo tanto, la solución aquí presentada es regular en todo punto.

3.6. El escalar de Riemman

El invariante cuadrado del tensor de Riemann $\mathcal{R}^2 = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ tiene la forma

$$\mathcal{R}^2 = 4 \frac{R_g^2(r)}{r^6} + 4 \left(\frac{3}{r_0^2} e^{-r^3/r_*^3} - \frac{R_g(r)}{r^3} \right)^2 + \left(\frac{2R_g(r)}{r^3} - \frac{9r^3}{r_0^4 r_s} e^{-r^3/r_*^3} \right). \quad (35)$$

Para $r \rightarrow 0$, \mathcal{R}^2 es finito y tiende al valor de de Sitter $\mathcal{R}_0^2 = 24/r_0^4$ que naturalmente parece ser el límite al valor de la curvatura espacio-temporal. Todos los demás invariantes son también finitos.

4. Agujero negro regular como producto del colapso gravitatorio

4.1. Ecuaciones de Einstein

Por simplicidad, asumimos que un objeto colapsante puede ser descrito razonablemente por una geometría estática y con simetría esférica como la de la ecuación (8). A partir de la ecuaciones de Einstein (15) obtenemos

$$8\pi\rho(r) = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (36)$$

$$8\pi p_r(r) = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (37)$$

$$8\pi p_\perp(r) = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) \quad (38)$$

donde $\rho = -T_0^0$ es la densidad de energía, $p_r = T_1^1$ es la presión radial y $p_\perp = (p_\theta = T_2^2) = (p_\varphi = T_3^3)$ es la presión tangencial. Por lo tanto, tenemos un fluido anisotrópico con $T_2^2 = T_3^3 \neq T_1^1 \neq T_0^0$.

4.2. Ecuación de estado

Debemos construir la ecuación de estado $p_r(\rho)$ en la dirección radial que reproduzca las características de un cuerpo colapsado con las simetrías indicadas. Por otro lado, la ecuación de estado de la presión tangencial $p_\perp(\rho)$ la derivaremos luego a partir de las ecuaciones de Einstein usando la función de la presión radial $p_r(\rho)$ construida.

Las principales características que vamos a pedirle a nuestra ecuación de estado $p_r(\rho)$ son

1. que cambie desde la ecuación de estado asociada con la materia usual, a bajas densidades, hasta la asociada con la geometría de de Sitter a densidades muy altas cerca del centro de la configuración;
2. que este cambio sea bien comportado.

Consideramos la siguiente forma genérica para la ecuación de estado

$$p_r = \left[\alpha - (\alpha + 1) \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^m \right] \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^{\frac{1}{n}} \rho \quad (39)$$

donde m y $1/n$ son números reales y positivos y α es un parámetro libre a encontrar. Esta ecuación implica la presencia de una densidad máxima ρ_{\max} concentrada en una región de radio $r_0 = \sqrt{1/\rho_{\max}}$, que consideramos como el núcleo de la configuración.

A bajas densidades, i.e

$$\left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^m < \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad (40)$$

la ecuación de estado se reduce a una polítropa de índice n

$$p_r \propto \rho^{1+1/n}. \quad (41)$$

Mientras que para

$$\left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^m > \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad (42)$$

la presión decrece de forma tal que

$$p_r = -\rho_{\max} = -\varepsilon \quad (43)$$

con ε la densidad de energía en el espacio de de Sitter.

Dado que la ecuación (39) ya cumple con las características generales que requerimos para el modelo, su forma específica (basada en la elección apropiada de los índices m , n y del parámetro α) la elijiremos teniendo en cuenta las siguientes condiciones básicas

1. no tiene que tener patologías, es decir, la velocidad del sonido $dp/d\rho$ no puede ser máxima en $\rho = 0$. Además, la velocidad máxima en el punto donde $d^2p/d\rho^2 = 0$ tiene que estar dada por $dp/d\rho = c_s^2 = c = 1$;
2. tiene que satisfacer la condición de energía débil, $\rho \geq 0$, $\rho + p_r \geq 0$, y la condición de energía dominante, $\rho \geq 0$, $p_r \in [-\rho, +\rho]$.

Los casos

- $m = 1, 1/n = 0;$
- $m = 2, 1/n = 0$

son patológicos. Los siguientes casos más simples son

- $m = 1, n = 1;$
- $m = 2, n = 1$

En estos últimos no hay patologías y $c_s \rightarrow 0$ cuando $\rho \rightarrow 0$.

Si les pedimos que satisfagan $dp/d\rho = 1$ y $d^2p/d\rho^2 = 0$ obtenemos, en el primer caso, dos valores posibles para el parámetro α , mientras que en el segundo, sólo uno. Usaremos este último por simplicidad.

Entonces,

$$p_r = \left[\alpha - (\alpha + 1) \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^2 \right] \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \rho, \quad (44)$$

con $\alpha = 2,2135$. El comportamiento de esta función se puede ver de la Figura 2

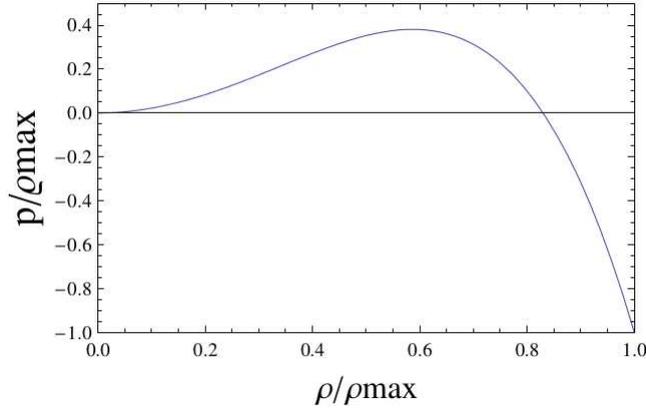


Figura 2: Ecuación de estado: $P_r(\rho)$

No es nuestra intención estudiar la evolución dinámica del colapso. Asumimos que el cuerpo colapsado ya ha llegado a un estado de equilibrio.

Esperamos tener cuatro regiones en el espacio-tiempo:

Región I Vacío de Schwarzschild con $p = \rho = 0$ si $R < r < \infty$.

Región II Campos de materia regular con $0 < p \leq \rho$ y $\rho > 0$ si $0,4R < r < R$.

Región III Campos de materia exótica con $0 < \rho < \rho_{\max}$ y $-\rho_{\max} < p < 0$ si $r_0 < r < 0,4R$.

Región IV Vacío con constante cosmológica Λ con $p = -\rho = -\rho_{\max}$ si $0 \leq r \leq r_0$.

Donde

$$R^3 = 8r_s r_0^2, \quad (45)$$

con r_s el radio de Schwarzschild (2) y $r_0^2 = 3/8\pi\rho_{\max}$ de (20).

Por lo tanto, pedimos que la solución a las ecuaciones (36), (37) y (38) satisfaga las siguientes condiciones:

1. El espacio-tiempo debe ser asintóticamente Schwarzschild para valores grandes de r , es decir, $R < r < \infty$. La métrica tendrá la forma (1). R es tal que $R < 2M$ con M la masa total del agujero negro $M = 4\pi \int_0^\infty \rho(r)r^2 dr$.
2. El espacio-tiempo deber ser asintóticamente de Sitter para $0 \leq r \leq r_0$. La métrica tomará la forma (4).

Estas condiciones asintóticas implican que hay una región interior delimitada por la región I por fuera y por la IV por dentro. El espacio-tiempo debe satisfacer condiciones de regularidad en las interfaces $r = R$ y $r = r_0$. Debemos garantizar la continuidad de la función de masa y de la presión a través de las interfases. Otra característica deseable para el modelo es que estas funciones sean suaves y continuas entre las regiones II y III.

4.3. La solución

Usando la ecuación de estado para integrar las ecuaciones (36), (37) y (38), obtenemos

$$e^{-\lambda} = 1 - 8\pi \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' = \frac{1 - 2m(r)}{r} \quad (46)$$

$$e^\nu = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) e^{\int_0^r 8\pi r \left[\alpha - (\alpha+1) \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2\right] \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \rho \frac{dr}{1 - \frac{2m(r)}{r}}}. \quad (47)$$

Introduciéndolas en la métrica (8) encontramos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) e^{\Gamma(r)} dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (48)$$

donde

$$\Gamma(r) = 8\pi r \left[\alpha - (\alpha + 1) \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2 \right] \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) \rho \frac{dr}{1 - \frac{2m(r)}{r}}. \quad (49)$$

Esta métrica es la solución más general para nuestro modelo. Describe un agujero negro regular con materia y un núcleo de Sitter.

Para completar formalmente la solución debemos encontrar $p_{\perp} = \{p_{\theta}, p_{\varphi}\}$. Se obtiene que

$$p_{\perp} = p_r + \frac{r}{2} p_r' + \frac{1}{2} (p_r + \rho) \left[\frac{m(r) + 4\pi r^3 p_r}{r - 2m(r)} \right]. \quad (50)$$

El comportamiento de esta función se muestra en la Figura 3. Observemos que cuando $\rho \rightarrow 0$ y $m(r) \rightarrow M$, $e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}$ y por lo tanto, fuera de la masa, el espacio-tiempo es asintóticamente Schwarzschild. Además, en el límite $r \rightarrow r_0$, $\rho \rightarrow \rho_{\max}$ tanto p_r como p_{\perp} tienden a $-\rho_{\max}$. Entonces, para $0 \leq r < r_0$ el fluido tiene una densidad constante positiva ρ_{\max} y una presión constante negativa $-\rho_{\max}$ por lo que toma la forma de un espacio-tiempo de de Sitter cuya ecuación de estado es $p = -\rho_{\max}$.

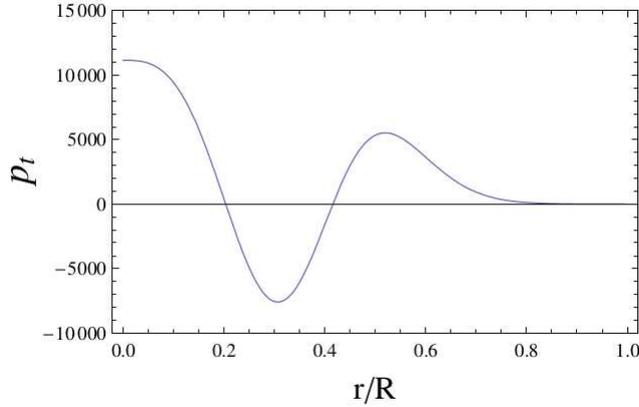


Figura 3: Presión tangencial como función de la coordenada radial

Para estudiar en detalle el comportamiento de la métrica para r pequeños es necesario elegir un perfil de densidad. Por su simplicidad puede utilizarse el perfil dado por la ecuación (19)

$$\rho(r) = \rho_{\max} \exp\left(-\frac{r^3}{r_s r_0}\right), \quad (51)$$

que en función de (45) es

$$\rho(r) = \rho_{\max} \exp\left(-8\frac{r^3}{R^3}\right). \quad (52)$$

De esta expresión podemos ver que casi toda la masa está contenida en una esfera de radio R que se corresponde con la superficie del objeto y que está contenida dentro del horizonte.

La introducción de la función densidad en la métrica (48) nos da una solución particular para el modelo. La presión radial como función de la coordenada r se muestra

en la Figura 4. Podemos ver que la presión sigue la ecuación $p = -\rho$ en el núcleo de la configuración, y es cero en $r/R = 1$ que es la superficie de la región con materia. También hay otro cero localizado en $r/R = 0,28$, dos puntos de inflexión en $r/R = 0,26$ y $r/R = 0,5$ y un máximo absoluto en $r/R = 0,4$. La materia exótica, que es aquella en la que la presión decrece cuando aumenta r , ocupa la región $r/R < 0,4$.

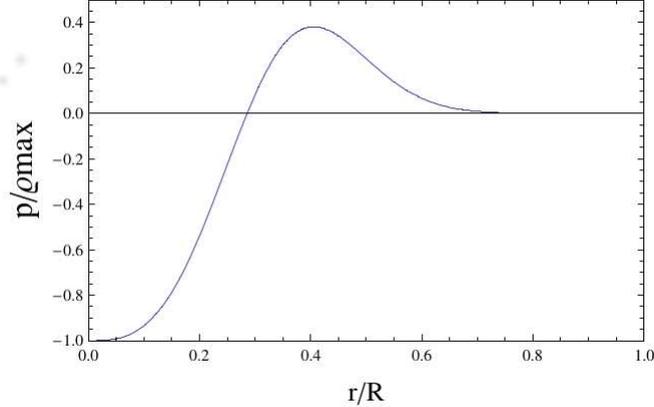


Figura 4: Presión radial como función de la coordenada r .

Por lo tanto, las ecuaciones (48) - (50) junto con el perfil de densidad describen el espacio-tiempo de un agujero negro regular que contiene materia y un núcleo de de Sitter.

El campo cuya presencia nos permite pasar suavemente del vacío estándar a la relación asintótica $p = -\rho$ no lo hemos especificado. Existe más de una propuesta en la literatura pero todas ellas comparten una característica: en el interior del agujero negro debemos tener un fluido con presión negativa que soporte al campo de materia en la región exterior previniendo el colapso.

4.4. Equilibrio de la configuración interna

Como ya hemos dicho, asumimos que el cuerpo ha alcanzado una configuración de equilibrio. Es decir que, en el interior del agujero negro, el colapso gravitatorio se ha balanceado con la repulsión generada por la materia exótica. Por lo tanto, asumiremos también que la materia se encuentra en equilibrio termodinámico. Como mostraremos, los resultados obtenidos bajo esta hipótesis son incorrectos implicando que el sistema es inestable tanto termodinámica como dinámicamente.

4.4.1. Termodinámica de la materia dentro del horizonte

La temperatura de la materia como función del radio puede ser estimada utilizando las leyes de la termodinámica

$$TdS = d(\rho V) + p_r dV, \quad (53)$$

donde dV es un elemento de volumen en el sistema de referencia propio del fluido. Usando que

$$\partial^2/\partial V \partial T = \partial^2/\partial T \partial S, \quad (54)$$

obtenemos

$$dp_r = \frac{\rho + p_r}{T} dT. \quad (55)$$

Reemplazando (19) y (39) e integrando obtenemos la temperatura como función de la coordenada radial. El resultado se muestra en la Figura 5. Notemos que la temperatura tiende a cero cerca del núcleo. Hay sólo un máximo en $r/R = 0,4$. Los puntos de inflexión se encuentran en $r/R = 0,31$ y $r/R = 0,57$.

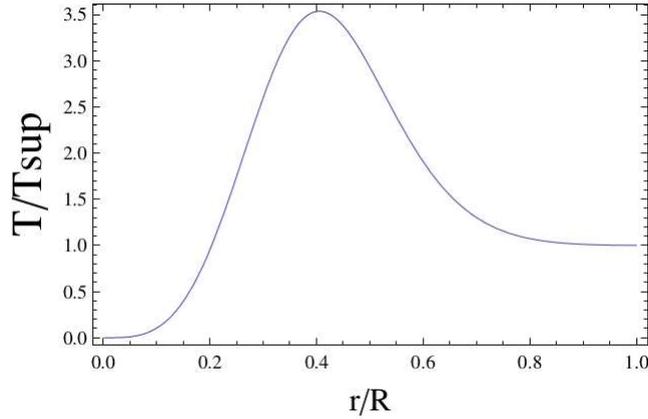


Figura 5: Temperatura como función de r . T_{sup} es la temperatura de la materia en $r = R$.

Sustituyendo $T(r)$ en (53) encontramos la expresión de la entropía como función de la coordenada radial

$$S \equiv \frac{\rho + p}{T} V \quad (56)$$

El resultado se muestra en la Figura 6. La entropía tiende a cero cuando $r \rightarrow 0$. Su máximo está aproximadamente en $r/R = 0,4$, en la región de mayor densidad de la materia normal.

La densidad de entropía también puede ser calculada en función de r y de ρ . Los resultados los mostramos en las Figuras 7 y 8 respectivamente. Podemos ver que la densidad de entropía diverge en el origen como resultado de que el volumen se vuelve nulo. En el caso de la densidad de entropía como función de la densidad, hay un punto de inflexión en ρ/ρ_{max} que se corresponde con $r/R = 0,34$.

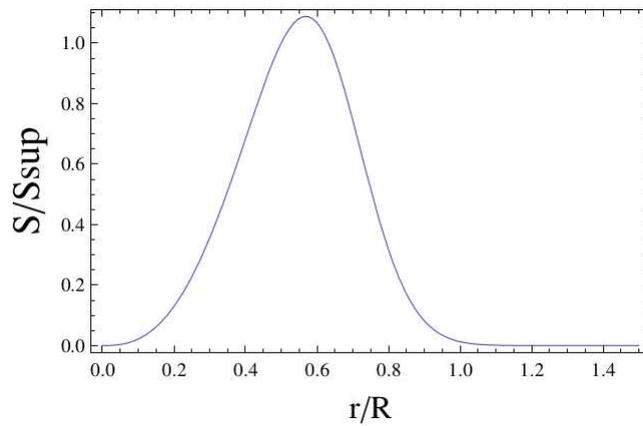


Figura 6: Entropía del campo de materia como función de la coordenada radial. S_{sup} es la entropía en $r = R$.

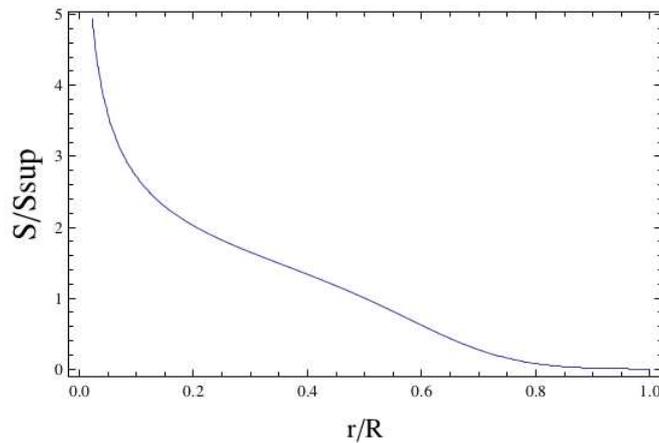


Figura 7: Densidad de entropía en función de r .

La velocidad del sonido radial se calcula considerando que $v_r^2 = dp/d\rho$. El resultado se muestra en la Figura 9.

De las Figuras 4 y 9 vemos que la velocidad del sonido es cero cuando la presión es máxima. Además, la velocidad del sonido toma valores complejos para $r/R < 0,4$, lo cual concuerda con la pendiente negativa de la ecuación de estado. El hecho de que las ondas sonoras no se propaguen en esta regiones una consecuencia del comportamiento del fluido exótico que allí se encuentra. La variación en la presión genera una expansión en lugar de una compresión.

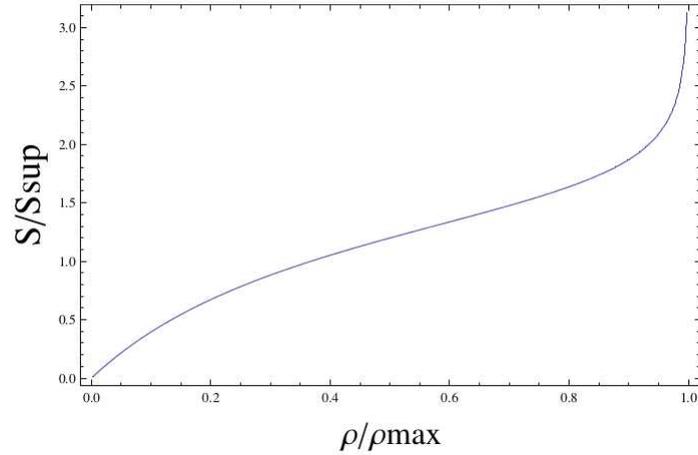


Figura 8: Densidad de entropía en función de la densidad ρ

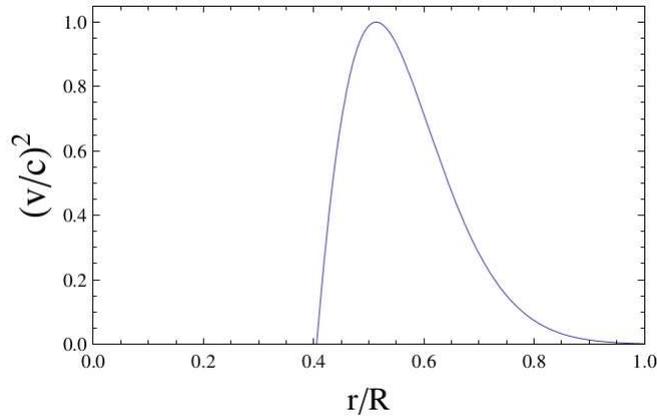


Figura 9: Velocidad del sonido como función de r .

4.4.2. Equilibrio termodinámico

La condición para que un sistema esté en equilibrio termodinámico estable es que, dado un valor de la entropía y del volumen, la energía debe ser mínima. Esto es equivalente a pedir que el calor específico a volumen constante satisfaga

$$C_V > 0. \quad (57)$$

Considerando que

$$C_V = T \left(\frac{dS}{dT} \right)_V, \quad (58)$$

y usando las expresiones antes deducidas se encuentra la función $C_V(r)$ mostrada en la Figura 10. Podemos ver que C_V es negativo para $r/R < 0,4$ y positivo para $r/R > 0,4$. Para $r/R = 0,4$ no está definido. El cambio de signo puede ser entendido

a partir de las Figuras 5 y 8 teniendo en cuenta que podemos escribir

$$C_V = T \left(\frac{dS}{d\rho} \right)_V \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_V. \quad (59)$$

Como la pendiente de la entropía como función de la densidad es siempre positiva, el cambio de signo está determinado por $d\rho/dT = (d\rho/dr)(dr/dT)$. La densidad como función de r es una función exponencial decreciente, entonces $d\rho/dr < 0$ para cualquier valor del radio. De la Figura 5 vemos que para $r/R < 0,4$, $dr/dT < 0$ y $d\rho/dT < 0$. En cambio, para $r/R > 0,4$, $dr/dT < 0$ y $d\rho/dT > 0$ en la región de materia normal.

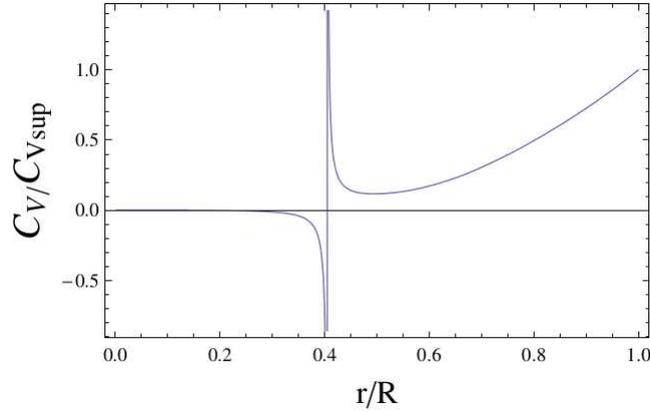


Figura 10: Calor específico a volumen constante en función de r . $C_{V_{\text{sup}}}$ es el calor específico a volumen constante en $r = R$.

De forma similar podemos calcular el calor específico a presión constante:

$$C_P = T \left(\frac{dS}{dT} \right)_P. \quad (60)$$

El resultado lo vemos en la Figura 11. A $r/R = 0,57$ vemos que $C_P = 0$, este punto coincide con uno de los puntos de inflexión de la temperatura. C_P es positivo para $r/R < 0,4$ y $r/R > 0,57$. En la región $0,4 < r/R < 0,57$, C_P es negativo.

Podemos escribir

$$C_P = T \left(\frac{dS}{dr} \right)_P \left(\frac{dr}{dT} \right)_P. \quad (61)$$

Vemos de la Figura 6 que $dS/dr > 0$ para $r/R < 0,57$ y $dS/dr < 0$ para $r/R > 0,57$. Como la pendiente de $T(r)$ es positiva para $r/R < 0,4$ y negativa para $r/R > 0,4$ entonces C_P tiene un cambio de signo.

El comportamiento discontinuo de C_P y C_V en $r/R = 0,4$ es típico de una transición de fase de segundo orden y sugiere que el sistema es termodinámicamente inestable. Además, el calor específico no está definido para el valor de r/R donde la

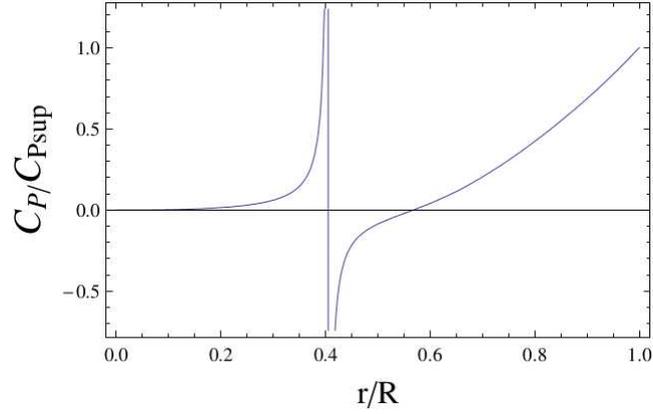


Figura 11: Calor específico a presión constante en función de r . $C_{V_{\text{sup}}}$ es el calor específico a presión constante en $r = R$.

velocidad del sonido es nula, reforzando la existencia de una región de inestabilidad para la materia normal. El cambio de signo en ambas cantidades termodinámicas es debido a la presencia de materia exótica en el núcleo del objeto que estamos analizando.

En resumen, las discontinuidades en las derivadas segundas de las funciones de estado indican que la materia dentro del agujero negro no puede estar en equilibrio termodinámico. El cálculo de la velocidad transversal en función de la coordenada radial puede ser calculada considerando que $v_{\perp}^2 = dp_{\perp}/d\rho$, las ecuaciones (39) y (50). El resultado se muestra en la Figura 12. El gráfico nos muestra no sólo la inestabilidad que hemos discutido, sino también una nueva en la zona de materia normal.

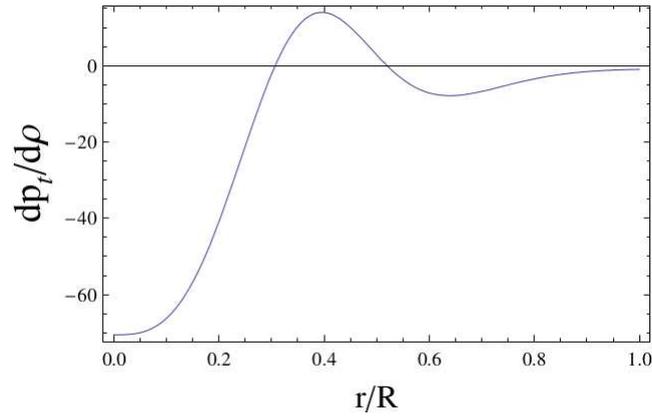


Figura 12: Velocidad del sonido tangencial como función de la coordenada radial.

4.4.3. Equilibrio dinámico

Recordemos que en la región de materia exótica no hay propagación de las ondas sonoras. La ecuación para la velocidad del sonido radial en esta zona podemos escribirla como

$$v_r^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta \rho}. \quad (62)$$

De aquí podemos ver que si la presión aumenta, la densidad disminuye. Pero si la densidad decrece, la presión sigue creciendo. En este proceso, la presión y la densidad están relacionadas de forma tal que si el sistema es perturbado, el fluido nunca deja de expandirse. La gran acumulación de energía que ocurre en este proceso podría ser la responsable de las divergencias que indican la inestabilidad del sistema.

5. Conclusiones

El espacio-tiempo de de Sitter es la solución más simple a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica positiva. Es esféricamente simétrica y describe un universo en expansión acelerada. La solución de Schwarzschild es la solución esféricamente simétrica más simple a las ecuaciones de Einstein sin constante cosmológica. La geometría de Schwarzschild - de Sitter es una combinación de ambas.

La solución de Schwarzschild - de Sitter representa un agujero negro que contiene un núcleo vacío de de Sitter en vez de una singularidad. El tensor de energía-impulso responsable de esta geometría describe una suave transición desde un estado de vacío estándar en el infinito hasta un estado de vacío isotrópico con densidad de energía no nula cuando $r \rightarrow 0$. Esta transición se hace pasando por un estado de vacío anisotrópico en la región intermedia, lo que concuerda con la predicción de Poisson-Israel que considera materia no inflacionaria en la interfase.

Hemos sugerido un posible modelo para un agujero negro regular como producto de un colapso gravitacional. Este modelo está basado en una elección prudente de la ecuación de estado de la materia colapsada que reemplaza al vacío anisotrópico anteriormente encontrado. A altas densidades, esta ecuación viola algunas de las condiciones de energía originalmente usadas para justificar la existencia de la singularidad en el interior de los agujeros negros. En nuestro modelo, esta violación nos conduce a un colapso no singular.

La solución describe un espacio-tiempo con fluido material en la región exterior (región II). Si nos movemos hacia adentro, pasamos a la región III, de la cual no hemos hablado en detalle, y luego a la región IV que es el núcleo más interno que tiene las características del espacio-tiempo de de Sitter. Las regiones III y IV son las que proveen la presión negativa necesaria para sostener la materia externa en equilibrio. La solución tiene el comportamiento asintótico requerido, reduciéndose al vacío de Schwarzschild fuera del campo de materia y a la solución de de Sitter cuando nos aproximamos al centro del agujero negro. La región III es la responsable de que

el campo de materia y la región de de Sitter se unan suavemente. La transición a este estado exótico de materia ocurre dentro del horizonte de Schwarzschild.

Por último, hemos calculado las cantidades termodinámicas que describen a la fuente de materia del agujero negro regular y hemos visto que la región de materia exótica es inestable. También hay evidencia de inestabilidad dinámica.

Referencias

- [1] Akcay, S. & Matzner, R. A., *Class. Quant. Grav.* **28** 085012 (2010).
- [2] Ansoldi, S., *arXiv:0802.0330v1* (2008).
- [3] Dymnikova, I., *Gen. Relat. Gravit.* **24**, 235-242 (1992).
- [4] Dymnikova, I., *Int. J. Mod. Phys. D***12**, 1015-1034 (2003).
- [5] Dymnikova, I. & Korpusik, M., *Grav. Cosmol.* **17**, 35-37 (2011).
- [6] Mbonye, M. R.; Kazanas, D., *Phys. Rev. D***7** 024016 (2005).
- [7] Pérez, D.; Romero, G. E.; Perez-Bergliaffa, S. E.; *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* **03**, 396-407 (2011).