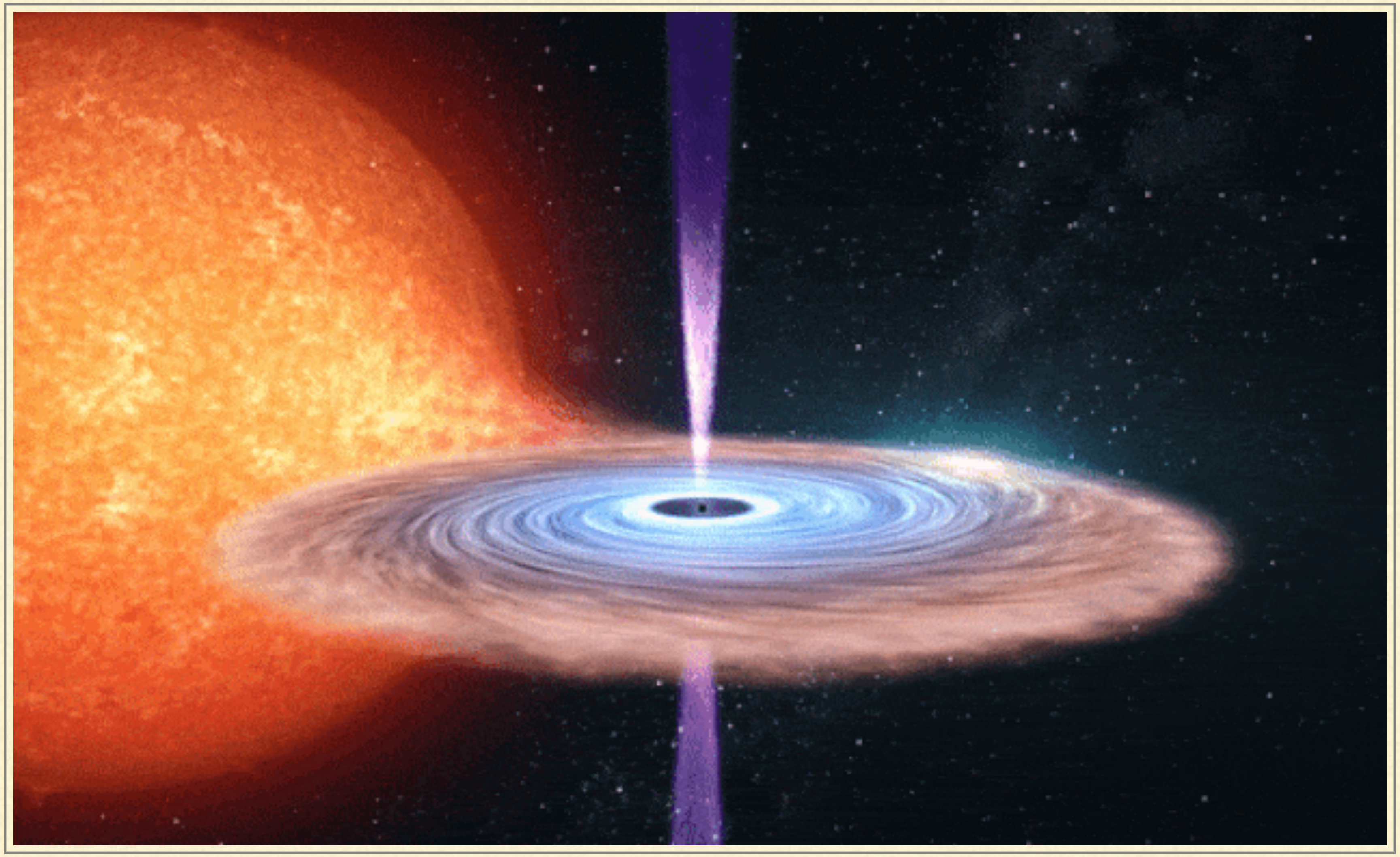


INTRODUCCIÓN A LA ASTROFÍSICA RELATIVISTA

Gustavo E. Romero
Cursada 2023, FCAyG/UNLP

Astronomía: estudio del universo, los objetos que lo forman y los procesos que les acontecen, a partir de la detección y medición de partículas y ondas que estos emiten.

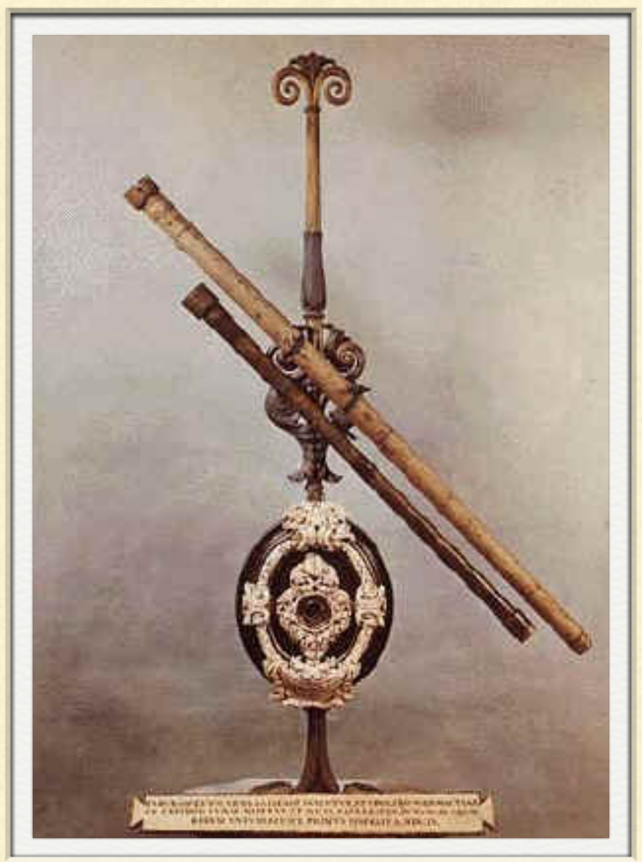
Astrofísica: investigación de la *naturaleza* de los objetos de estudio de la astronomía a partir de nuestro conocimiento de las leyes físicas. Aplica la física conocida a fin de poder generar representaciones conceptuales adecuadas de los objetos y procesos descubiertos por las astronomía.

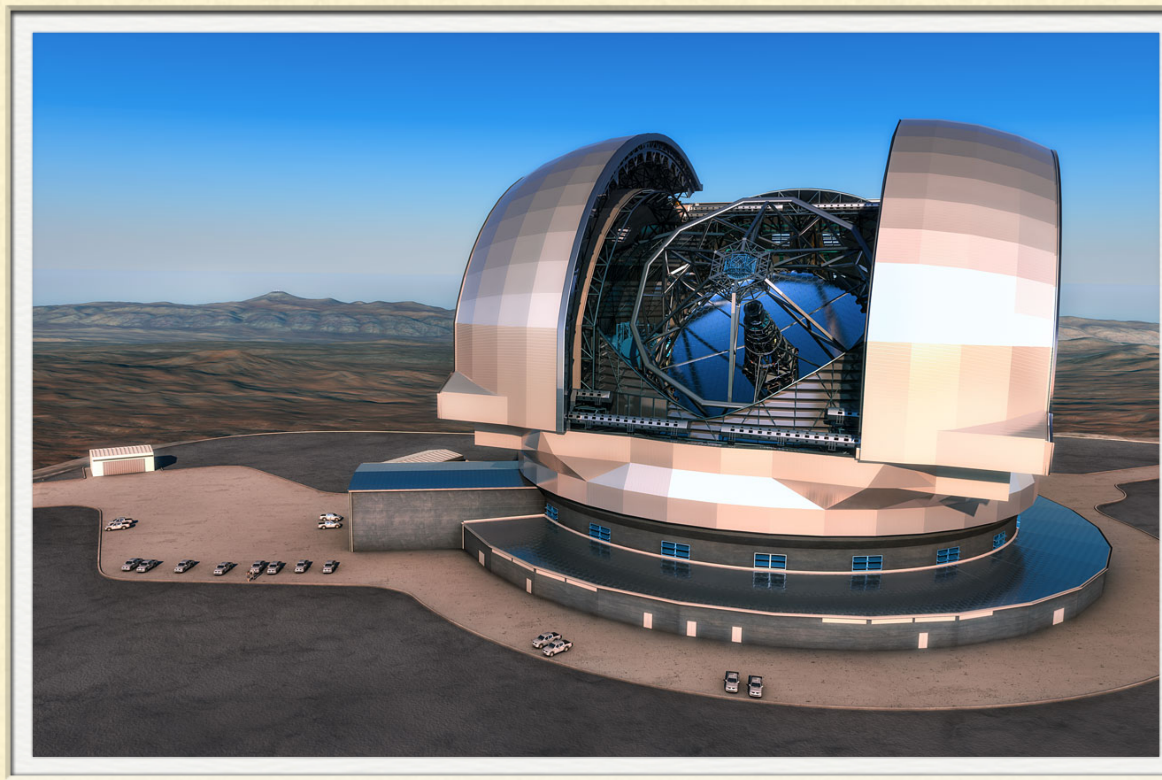
En forma similar podemos caracterizar la astroquímica y la astrobiología como la investigación de los sistemas químicos y biológicos cuya existencia se infiere por la astronomía.

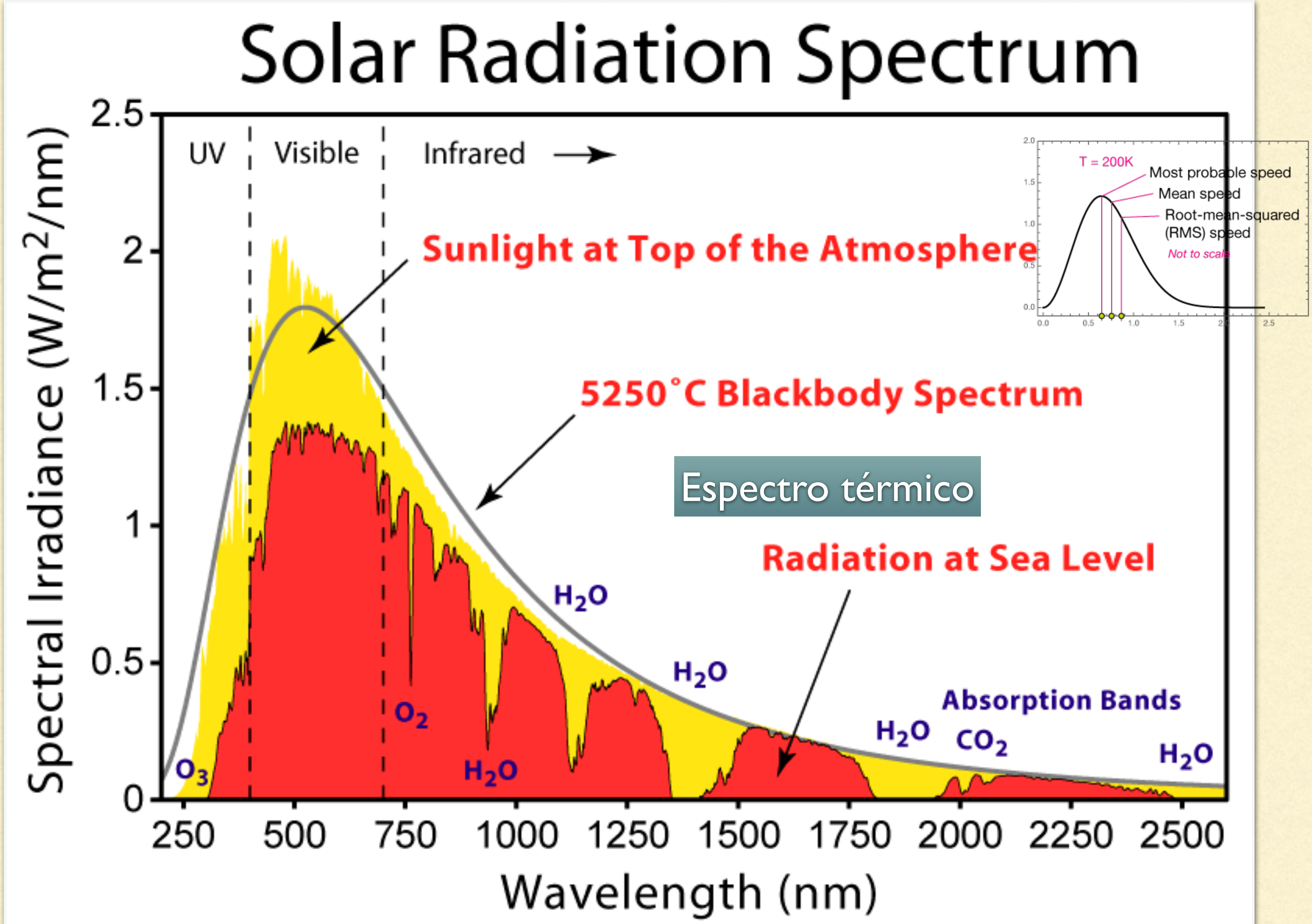
Durante la mayor parte de su historia, la Astronomía se ha limitado a un tipo muy específico de partículas de origen cósmico: fotones con una longitud de onda en el rango

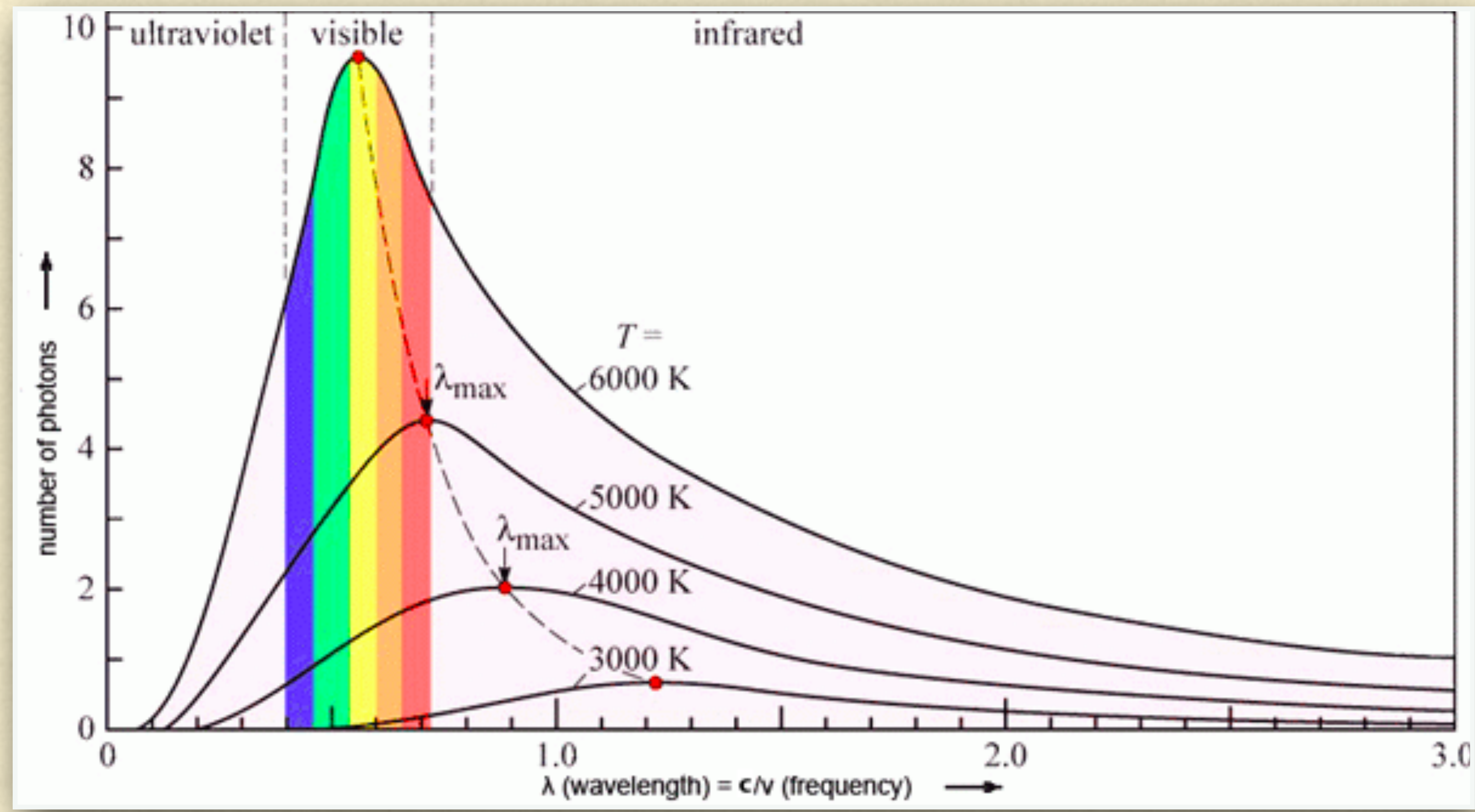
$$300\ \mathrm{nm} \leq \lambda \leq 1\ \mu\mathrm{m},$$

lo que corresponde a frecuencias entre 3×10^{14} y 10^{15} Hz. La radiación formada por estos fotones es conocida como "luz visible".

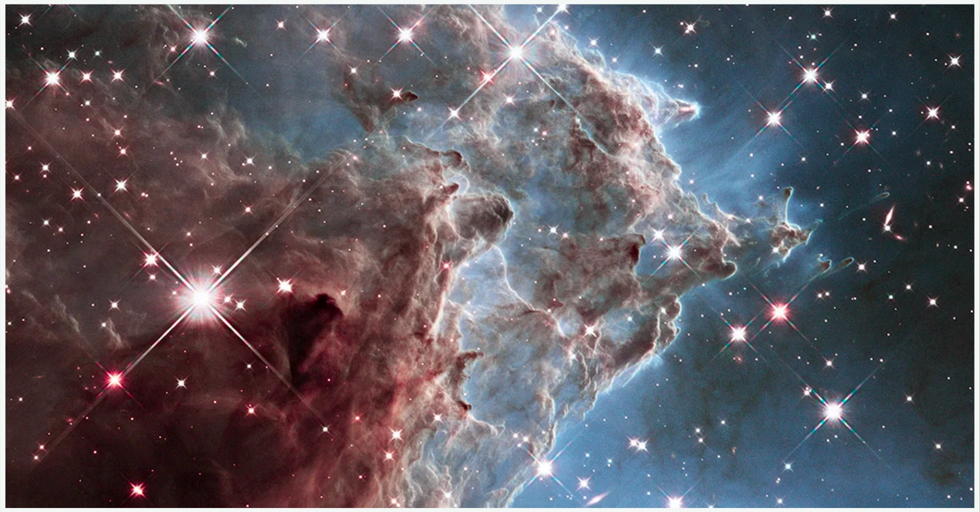


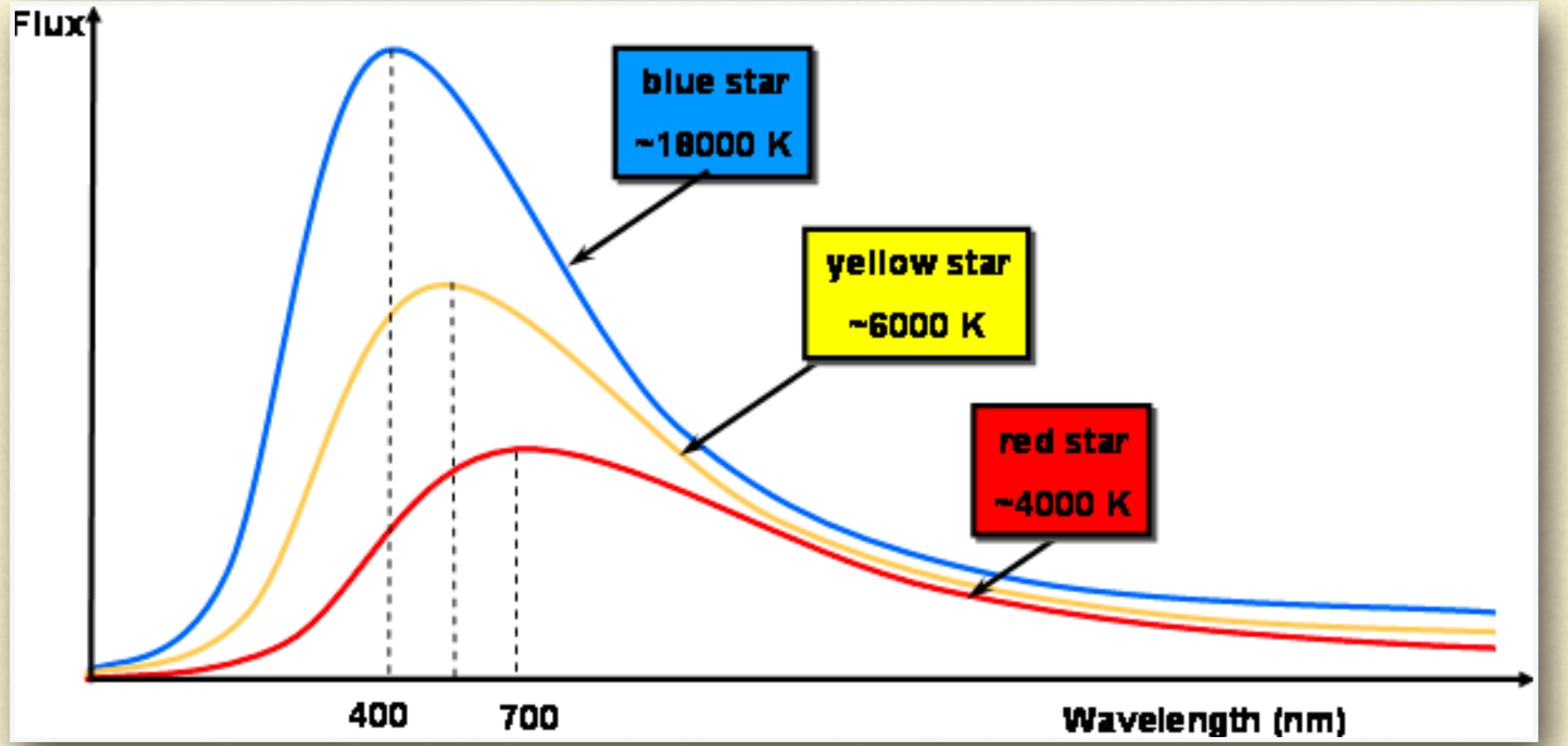



Solar Radiation Spectrum
Spectral Irradiance (W/m²/nm)
Wavelength (nm)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
250
500
750
1000
1250
1500
1750
2000
2250
2500
UV
Visible
Infrared
Sunlight at Top of the Atmosphere
5250°C Blackbody Spectrum
Radiation at Sea Level
Espectro térmico
Absorption Bands
O_3
O_2
H_2O
H_2O
H_2O
H_2O
CO_2
H_2O
T = 200K
Most probable speed
Mean speed
Root-mean-squared
(RMS) speed
Not to scale

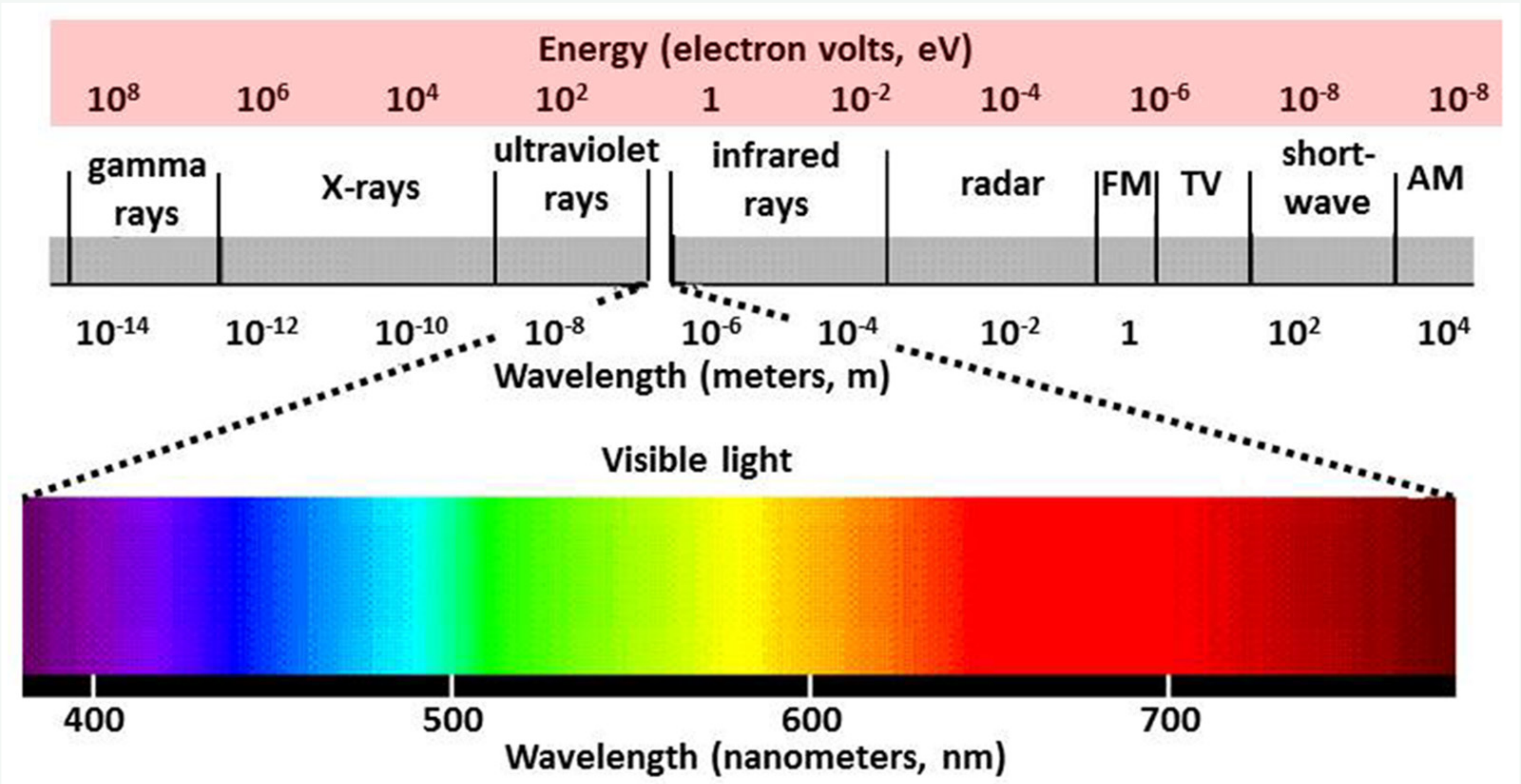


ultraviolet
visible
infrared
number of photons
$T =$
6000 K
5000 K
4000 K
3000 K
λ_{max}
λ_{max}
λ (wavelength) = c/v (frequency)
0
2
4
6
8
10
0
1.0
2.0
3.0

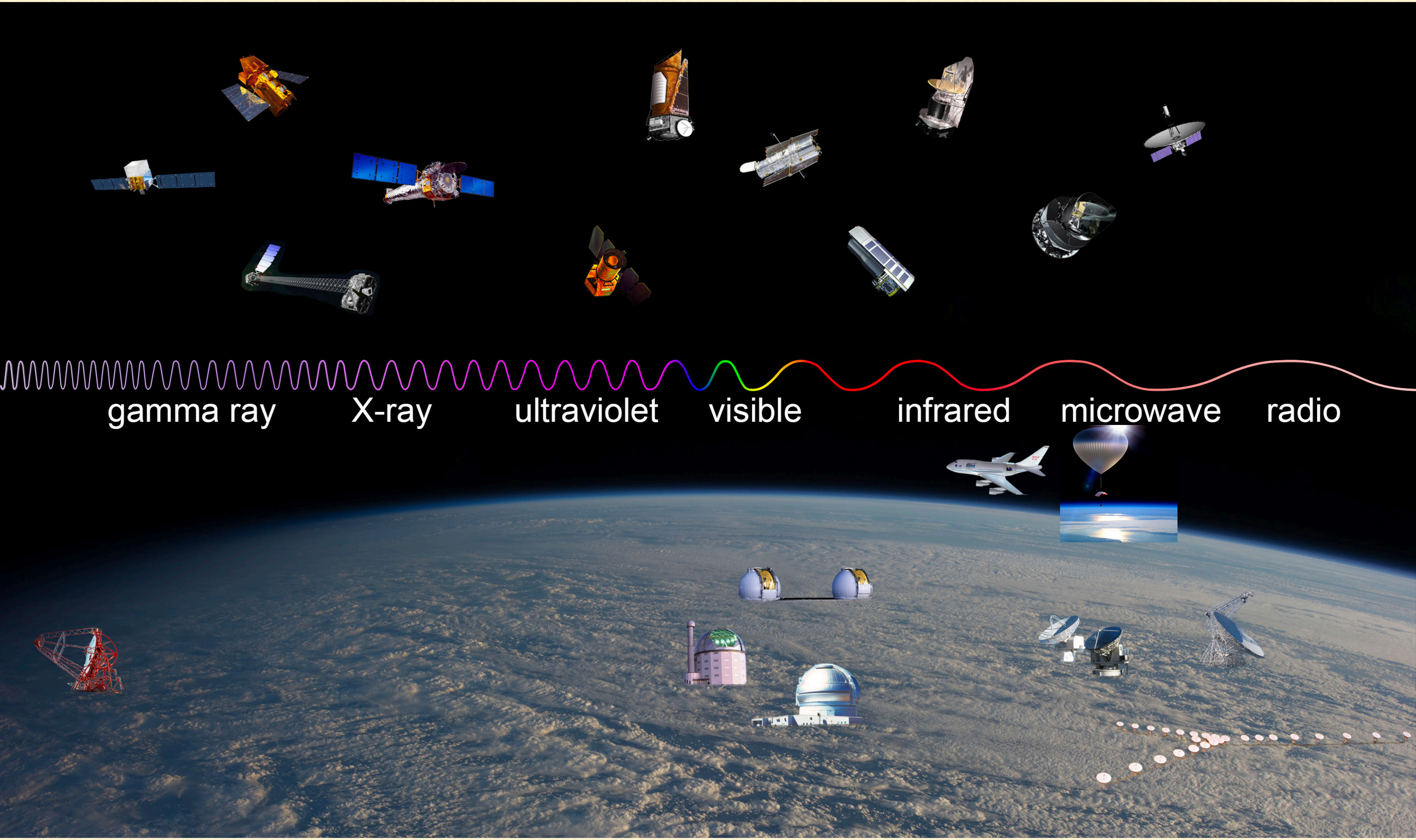




Flux
blue star
~18000 K
yellow star
~6000 K
red star
~4000 K
400
700
Wavelength (nm)

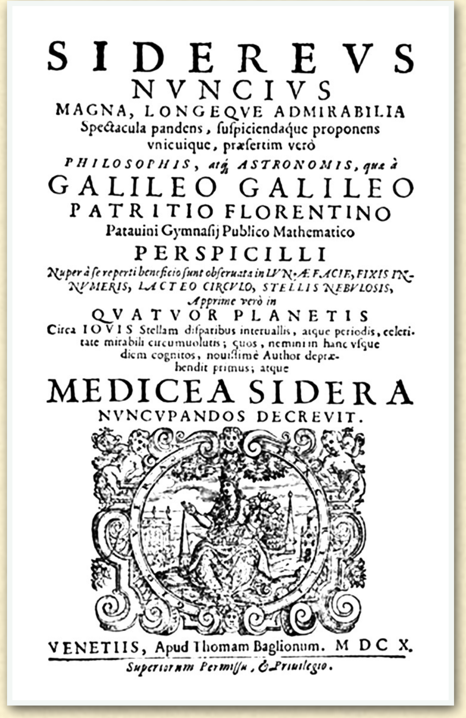


Los fotones rojos tienen aproximadamente 1.8 electrón-Volt (eV) de energía, mientras que cada fotón azul transmite aproximadamente 3.1 eV.


gamma ray
X-ray
ultraviolet
visible
infrared
microwave
radio

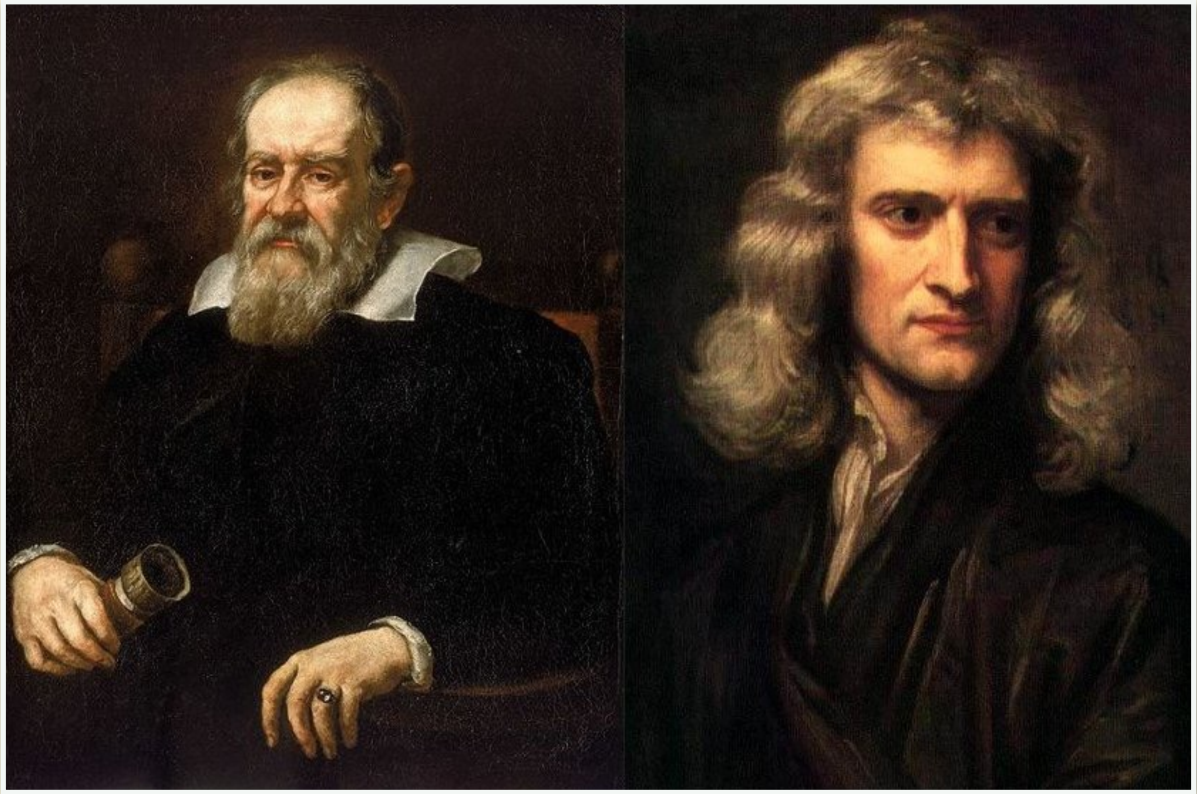
¿Qué es la astrofísica relativista?

Estado de la Física a fines del siglo XIX

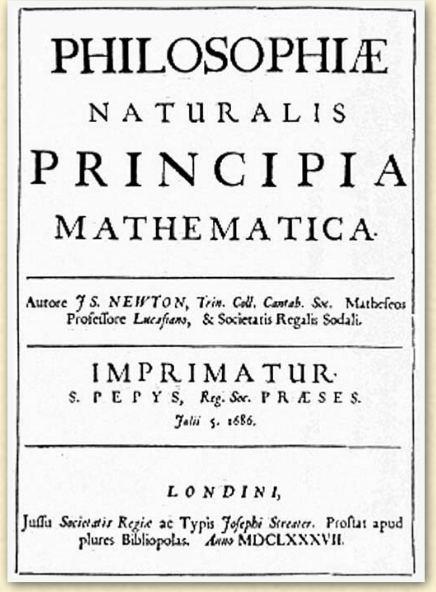


SIDEREVS
NVNCIVS
MAGNA, LONGEQVE ADMIRABILIA
Spectacula pandens, suspiciendaque proponens
vnicuique, præsertim verò
PHILOSOPHIS, atq; ASTRONOMIS, quæ à
GALILEO GALILEO
PATRITIO FLORENTINO
Patauini Gymnasij Publico Mathematico
PERSPICILLI
Nuper à se reperti beneficio sunt obseruata in LVNÆ FACIE, FIXIS IN-
NVMERIS, LACTEO CIRCVLO, STELLIS NEBVLOSIS,
Apprime verò in
QVATVOR PLANETIS
Circa IOVIS Stellam disparibus interuallis, atque periodis, celeri-
tate mirabili circumuolutis; quos, nemini in hanc vsque
diem cognitos, nouissimè Author depræ-
hendit primus; atque
MEDICEA SIDERA
NVNCVPANDOS DECREVIT.

VENETIIS, Apud Thomam Baglionum. M DC X.
Superiorum Permissu, & Priuilegio.



1564-1642 1643-1727



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos
Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud
plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Mecánica clásica: la masa se conserva, la energía se conserva, el momento se conserva. El cambio de movimiento de la materia se debe a interacciones locales entre cuerpos, excepto para la gravitación, que parece actuar a distancia.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{u}) + \nabla p = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(E + p)) = 0 \qquad E = \rho e + \frac{1}{2}\rho u^2 \qquad p = \rho w$$

Las ecuaciones anteriores representan la conservación de la masa, el momento y la energía.

$$a_s \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

Velocidad del sonido.

Ecuación de Navier-Stokes (incompresible):

$$\overbrace{\underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}_{\text{Variation}} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}}_{\text{Convection}}}^{\text{Inertia (per volume)}} \overbrace{- \underbrace{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{-\nabla w}_{\text{Internal source}}}^{\text{Divergence of stress}} + \underbrace{\mathbf{g}}_{\text{External source}} .$$

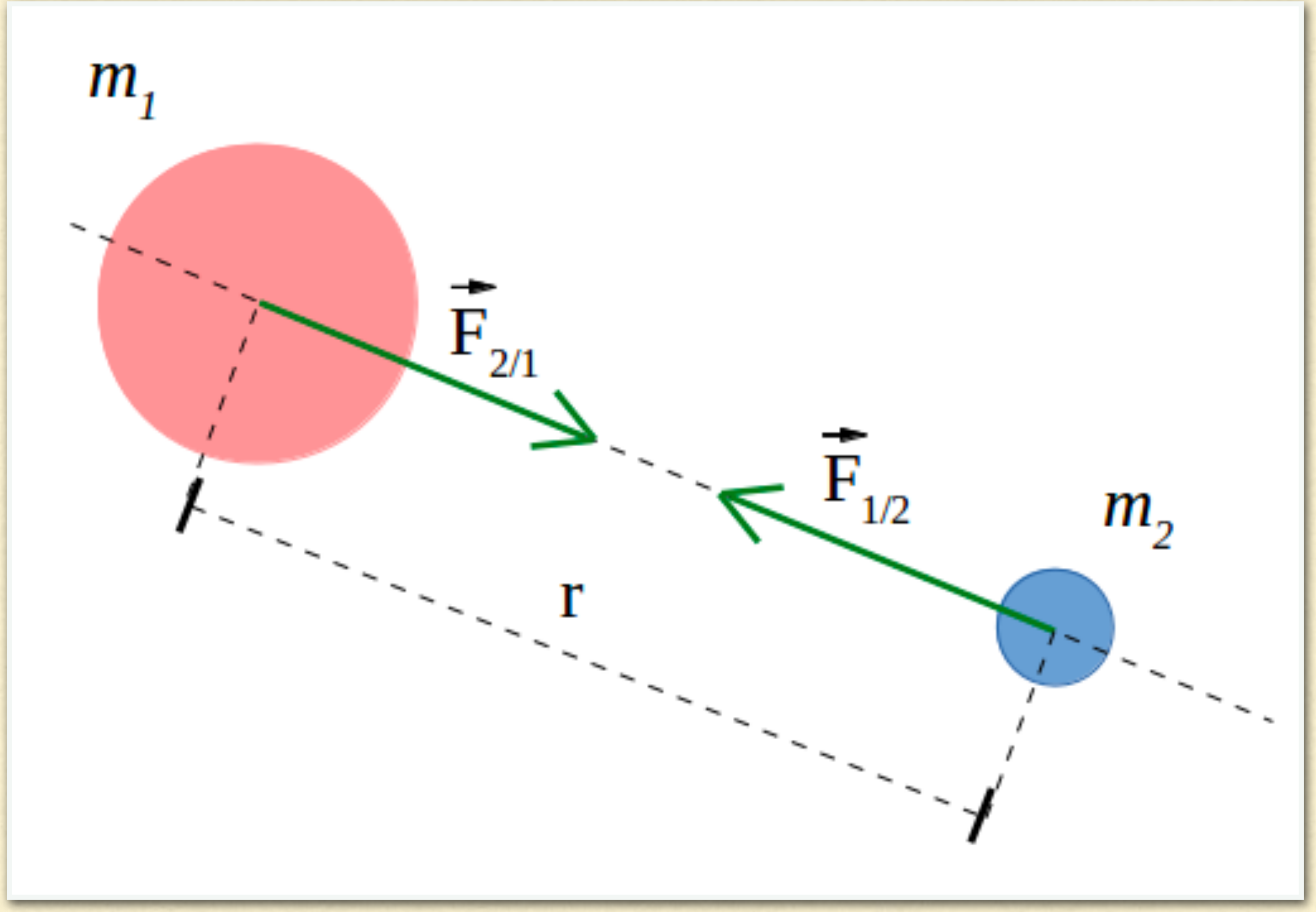
$$\frac{1}{\rho_0} \nabla p = \nabla \left(\frac{p}{\rho_0}\right) \equiv \nabla w$$

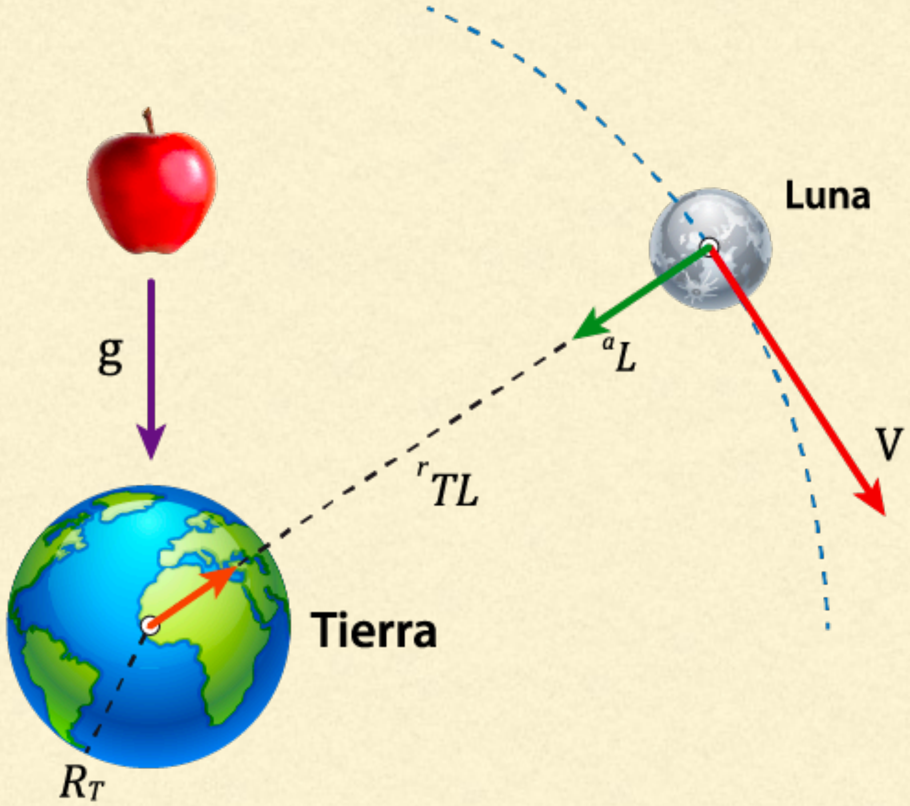
Gravitación Newtoniana: acción a distancia

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\vec{u}$$

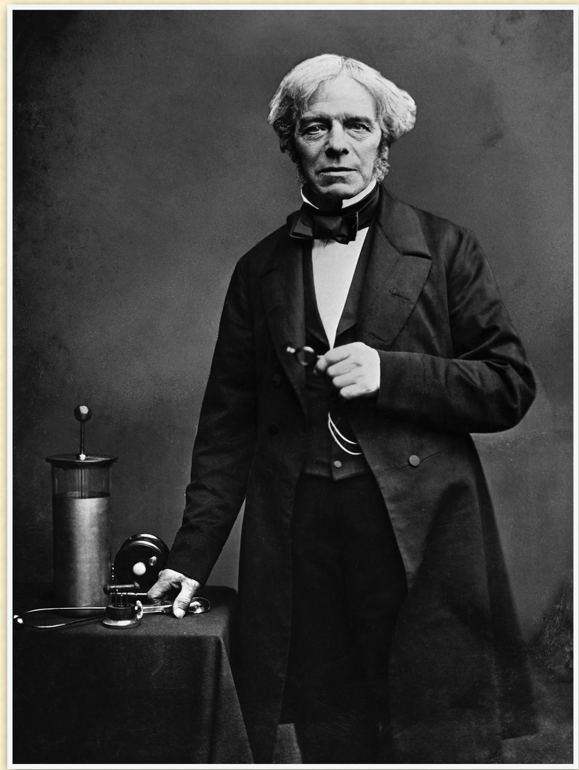
$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\vec{u}$$





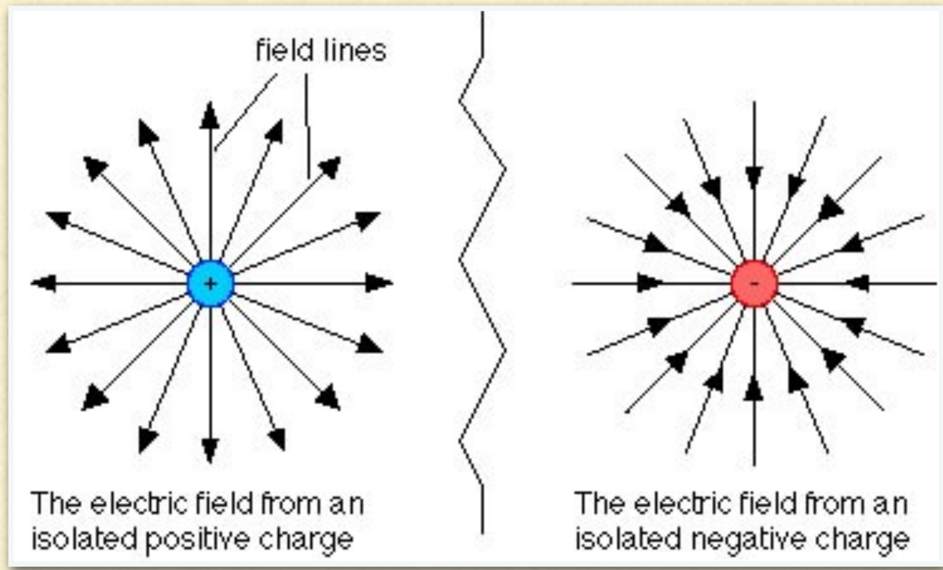
Las fuerzas sobre una partícula concreta debida a otras partículas depende de las posiciones de esas otras partículas en el mismo instante.

Michael Faraday introduce el concepto de campo

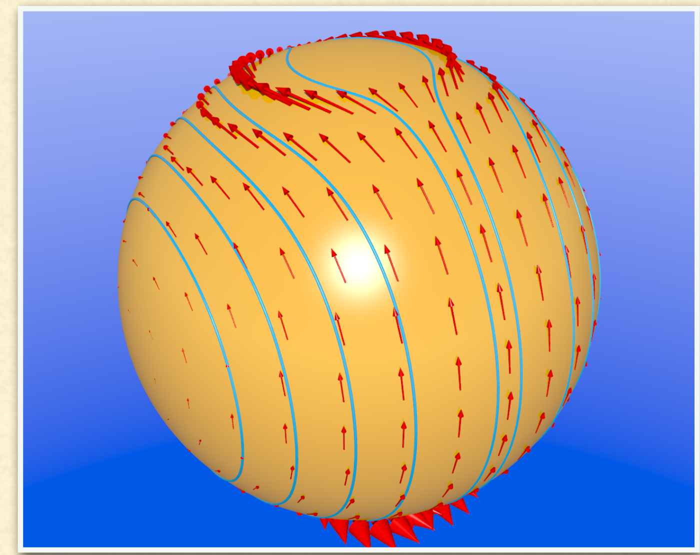


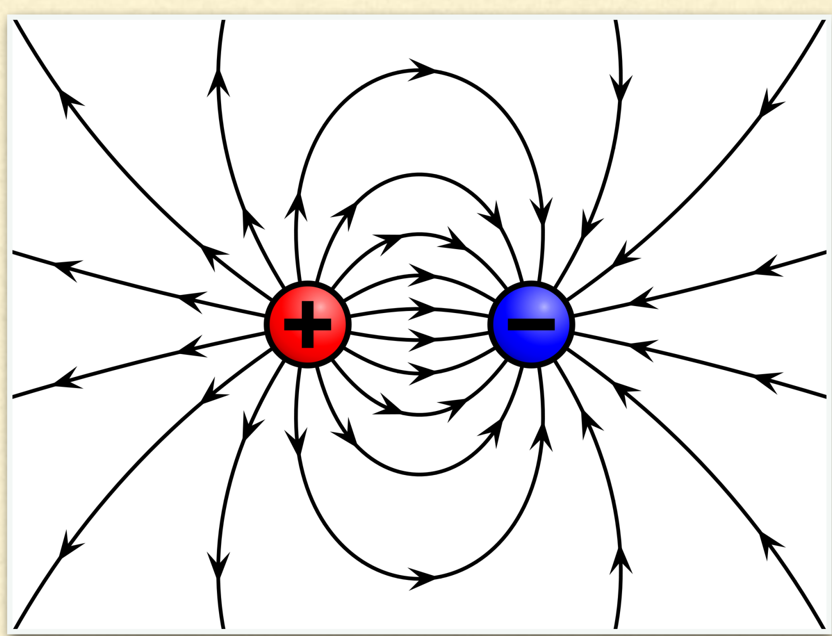
1791-1867

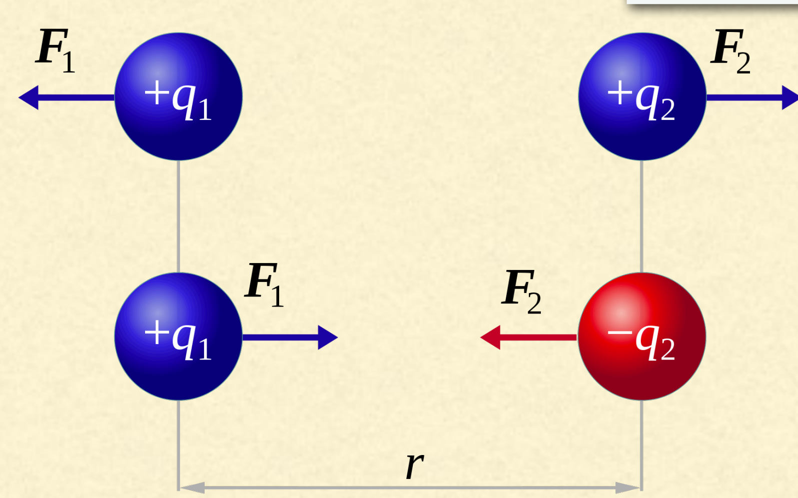
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$



<u>Campo</u>: sistema físico con infinitos grados de libertad.







$$|F_1| = |F_2| = k_e \frac{|q_1 \times q_2|}{r^2}$$

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \nabla \phi_1$$

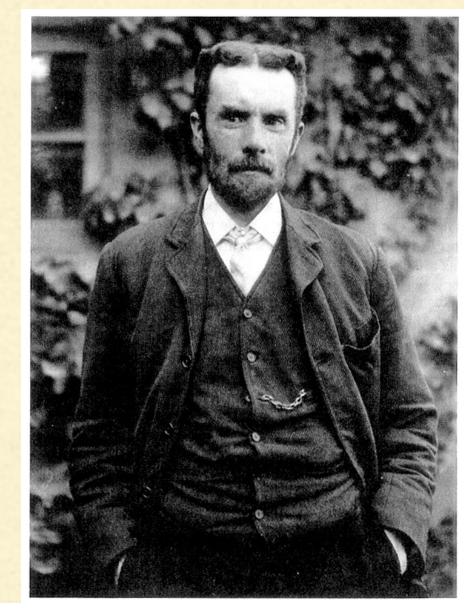
$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q_1}\|}$$

James Clerk Maxwell (1831-1879): electromagnetismo

Nombre	Forma diferencial
Ley de Gauss:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Ley de Gauss para el campo magnético:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Ley de Faraday:	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ley de Ampère generalizada:	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \, \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\mathbf{F} = q\left[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right]$$

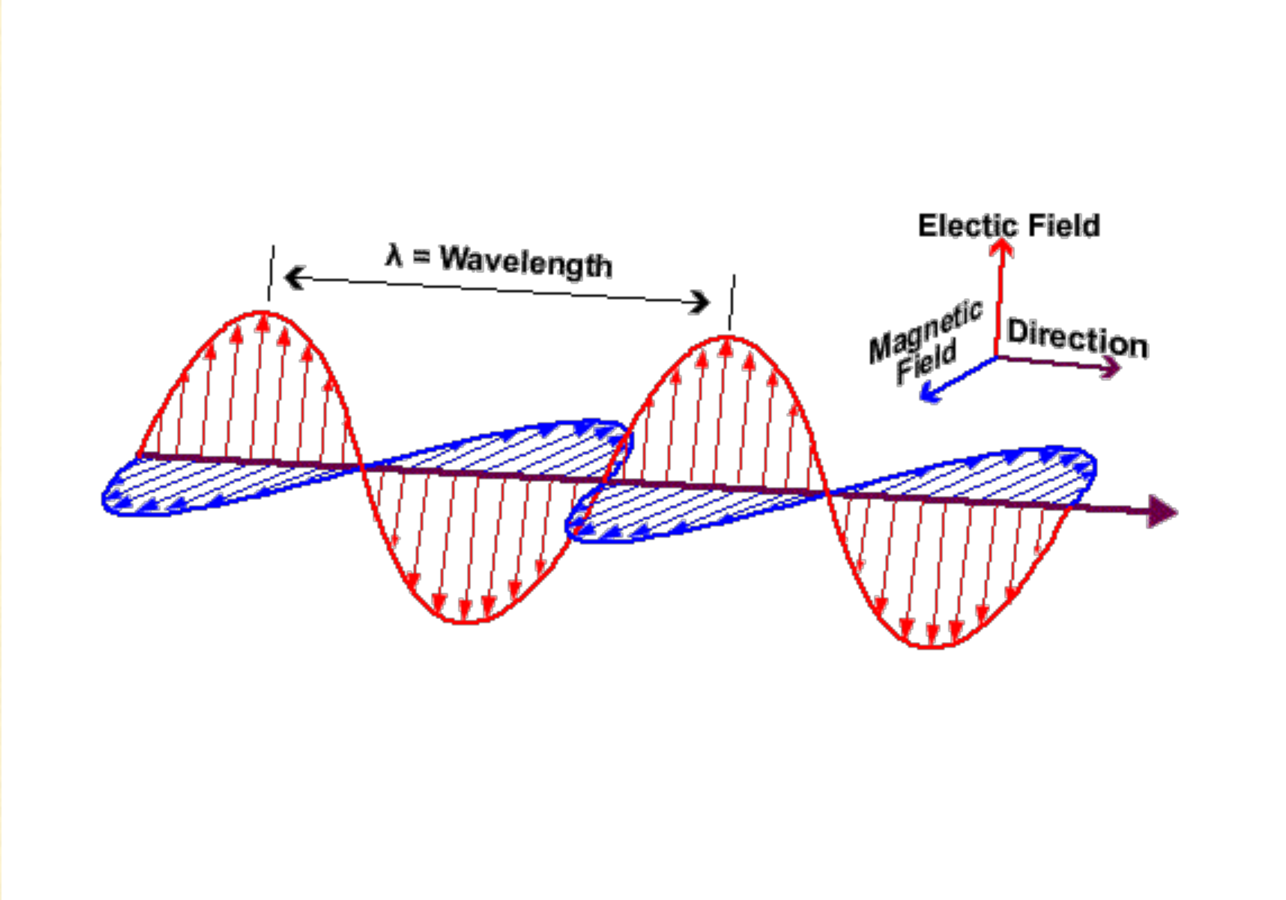
Henrik Lorentz (1853 – 1928)

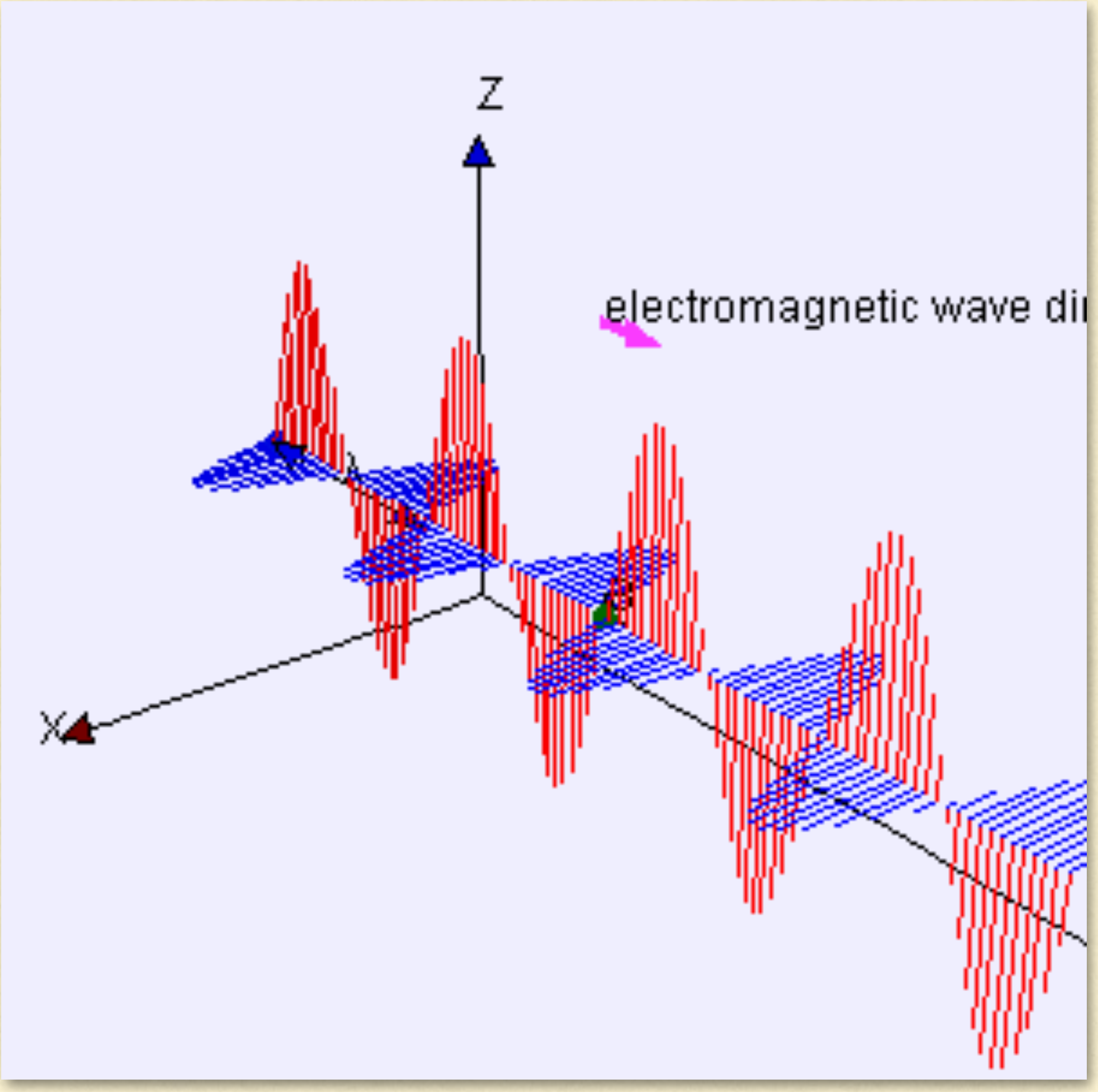


Oliver Heaviside (1850 – 1925)

Ondas electromagnéticas

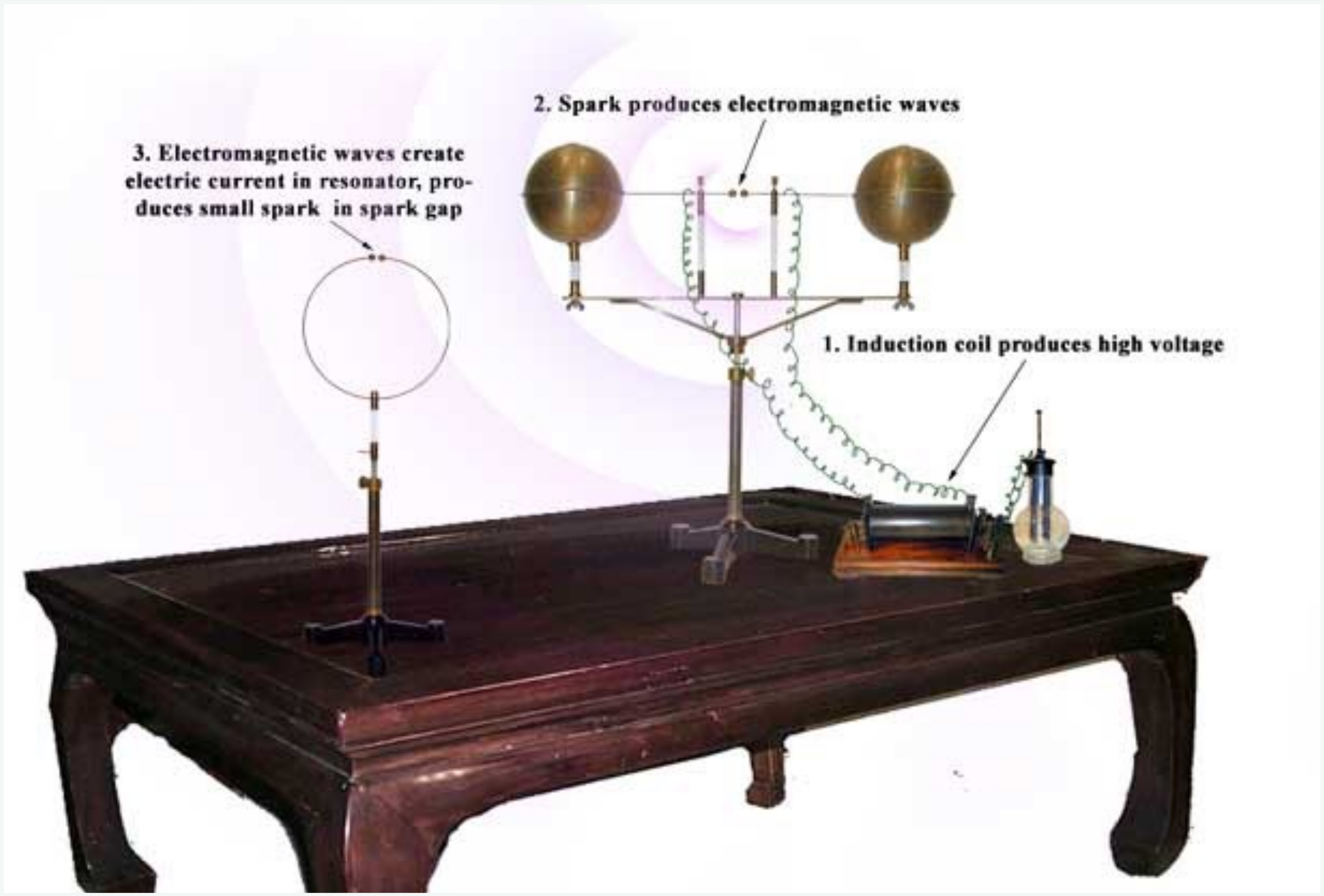
$$\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = \mathbf{0}$$
$$\left(c^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B} = \mathbf{0}$$



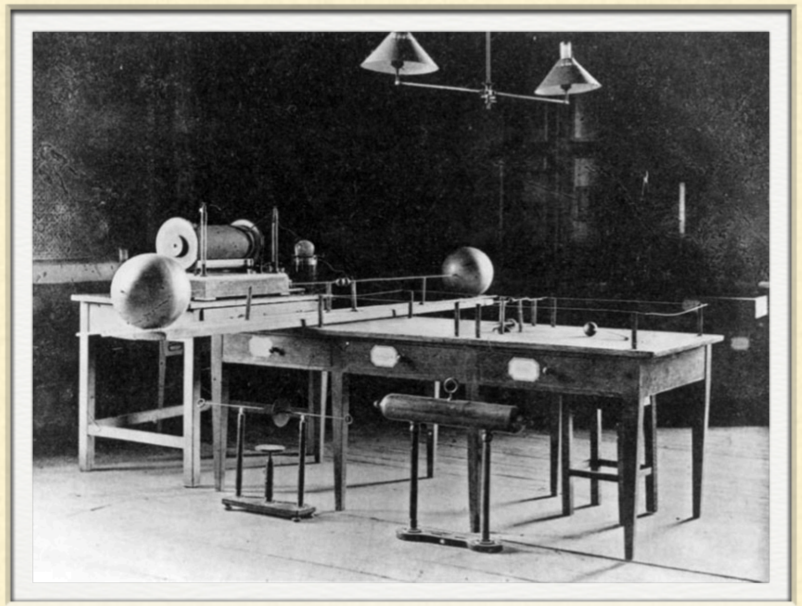

Z
electromagnetic wave di
X

Las ondas electromagnéticas existen y se propagan por el vacío

Heinrich Hertz 1857-1894

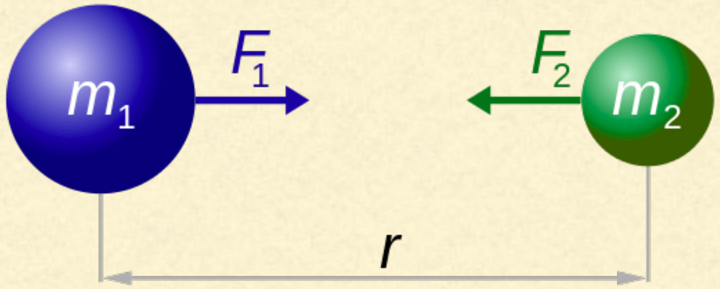


1887



Hertz's lab

Campo gravitational Newtoniano



$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{R}}{\mathrm{d}t^2} = -GM\frac{\hat{\mathbf{R}}}{|\mathbf{R}|^2} = -\nabla\Phi$$

$$\nabla\cdot\mathbf{g} = -\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho \qquad \phi(r) = \frac{-Gm}{r}.$$

$$\epsilon_{0g} = \frac{1}{4\pi G}, \quad \mu_{0g} = \frac{4\pi G}{c_g^2} \quad \Rightarrow \quad c_g = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{0g}\mu_{0g}}}$$

$$\nabla^2\phi_g - \frac{1}{c_g^2}\frac{\partial^2\phi_g}{\partial t^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_{0g}}$$

Heaviside 1893

$$\nabla^2\mathbf{g} = \frac{1}{c_g^2}\frac{\partial^2\mathbf{g}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2\mathbf{b} = \frac{1}{c_g^2}\frac{\partial^2\mathbf{b}}{\partial t^2}$$

gravito MLEs of HG
$\nabla\cdot\mathbf{g} = -4\pi G\rho_g = -\frac{\rho_g}{\epsilon_{0g}}$
$\nabla\cdot\mathbf{b} = 0$
$\nabla\times\mathbf{b} = +\mu_{0g}\mathbf{j}_g - \frac{1}{c_g^2}\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t}$
$\nabla\times\mathbf{g} = +\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}$
$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m_g\,[\mathbf{g} - \mathbf{u}\times\mathbf{b}]$
$\mathbf{b} = -\nabla\times\mathbf{A}_g$
$\mathbf{g} = -\nabla\phi_g - \frac{\partial\mathbf{A}_g}{\partial t}$

Tensión entre la mecánica clásica y la electrodinámica

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Transformaciones de Galileo

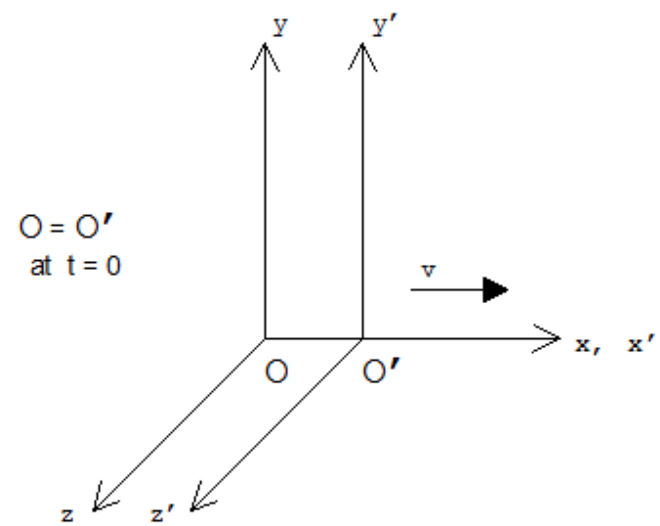


Figure 1. Two Inertial Frames in Standard Configuration

The Lorentz Transformation

(for motion in the x-direction)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t' = \frac{t - (v/c^2)\,x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Hendrik Lorentz (1853-1928)

Relatividad Especial

Ann.Physik 17 (1905), 891-921.

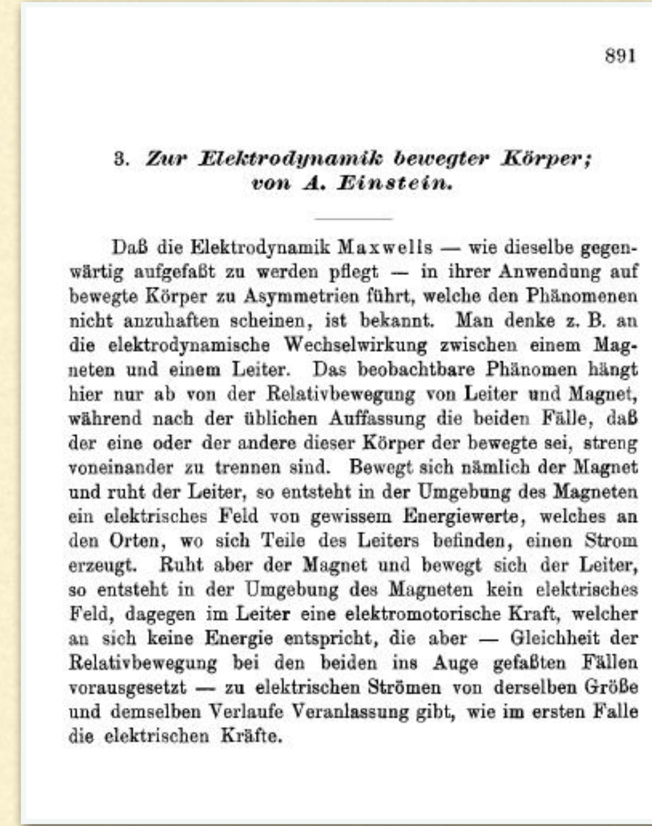
Electrodinámica de los cuerpos en movimiento

Albert Einstein

$$\overrightarrow{p} = \gamma m_0 \overrightarrow{v}$$

$$E = \gamma m_0 c^2$$

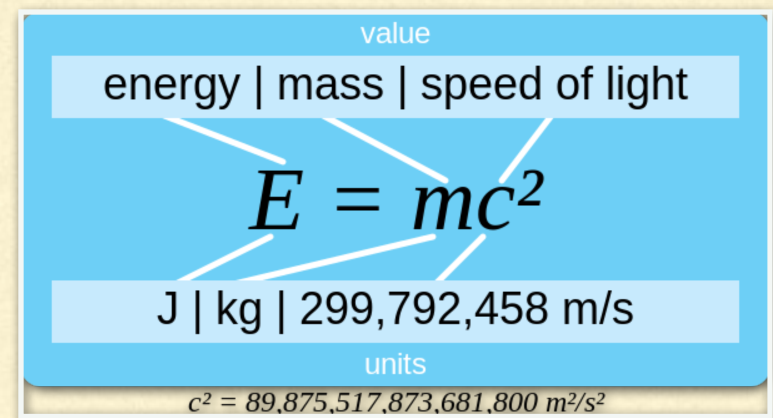
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$



891

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;*
von A. Einstein.

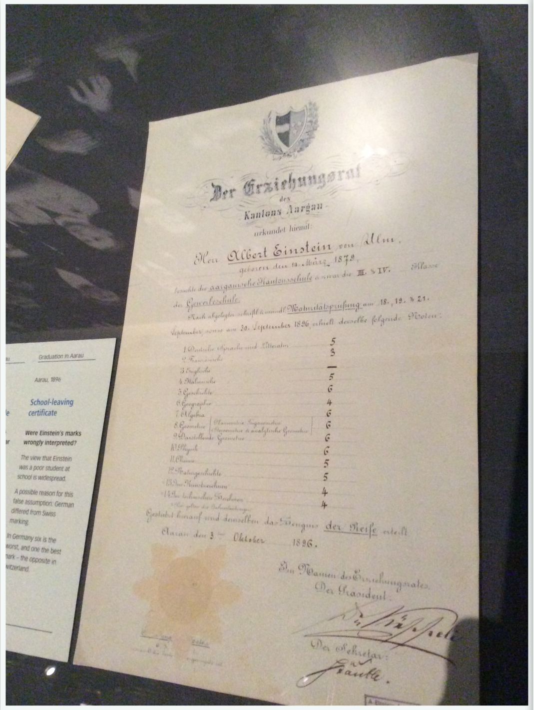
Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

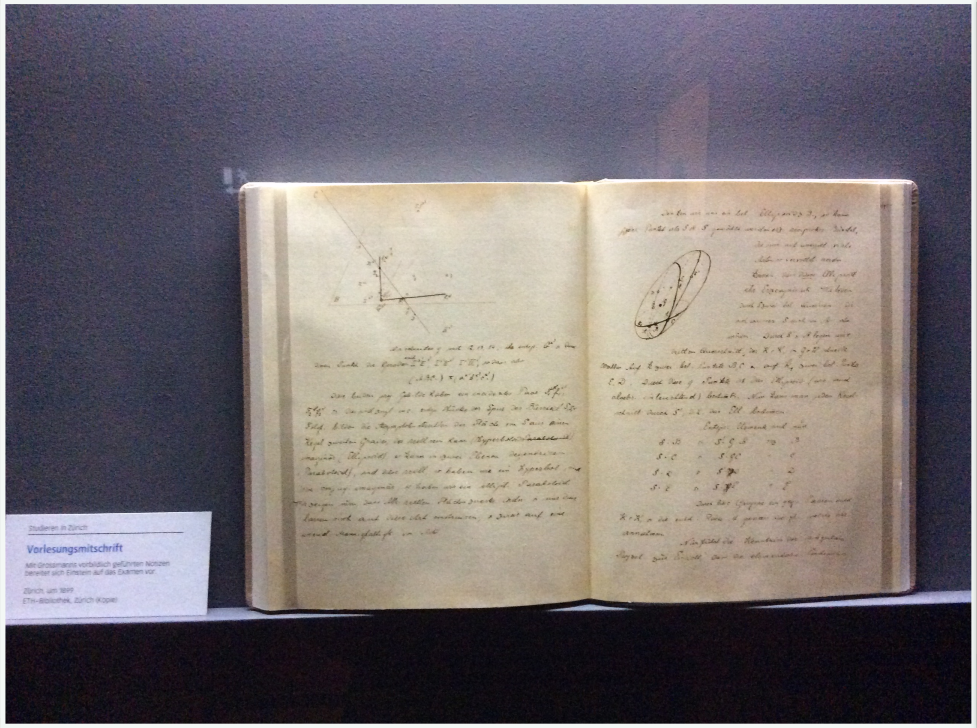


- Primer postulado. Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.
- Segundo postulado. La velocidad de la luz en el vacío es una constante universal, c, que es independiente del movimiento de la fuente de luz.


IN DIESEM HAVSE SCHVF
ALBERT EINSTEIN
IN DEN JAHREN 1903-1905
SEINE GRVNDLEGENDE
ABHANDLVNG VBER DIE
RELATIVITATSTHEORIE
Original Einstein Apartment
www.einstein-bern.ch


SCHMUCK-CAFE
EINSTEIN-HAUS

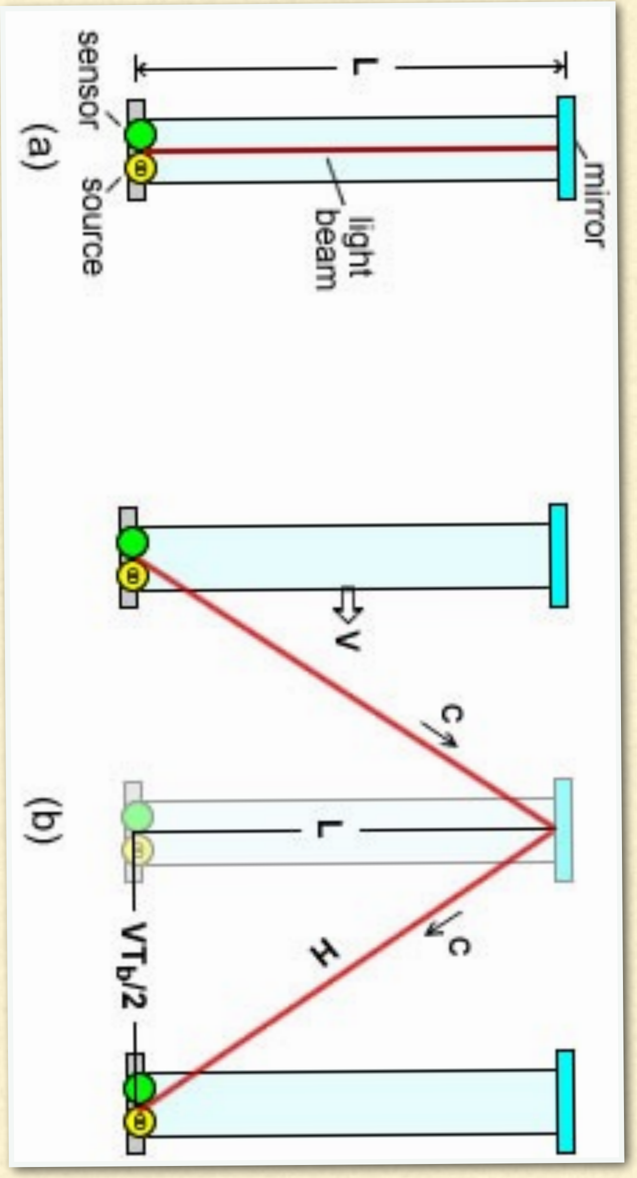

Der Erziehungsrat
des
Kantons Aargau
Albert Einstein


Vorlesungsmitschrift

$$(ct)^2 = L^2 + (Vt)^2$$

$$L = ct_0$$

$$L^2 = (ct)^2 - (Vt)^2$$



$$L = ct[1 - (V/c)^2]^{1/2}$$

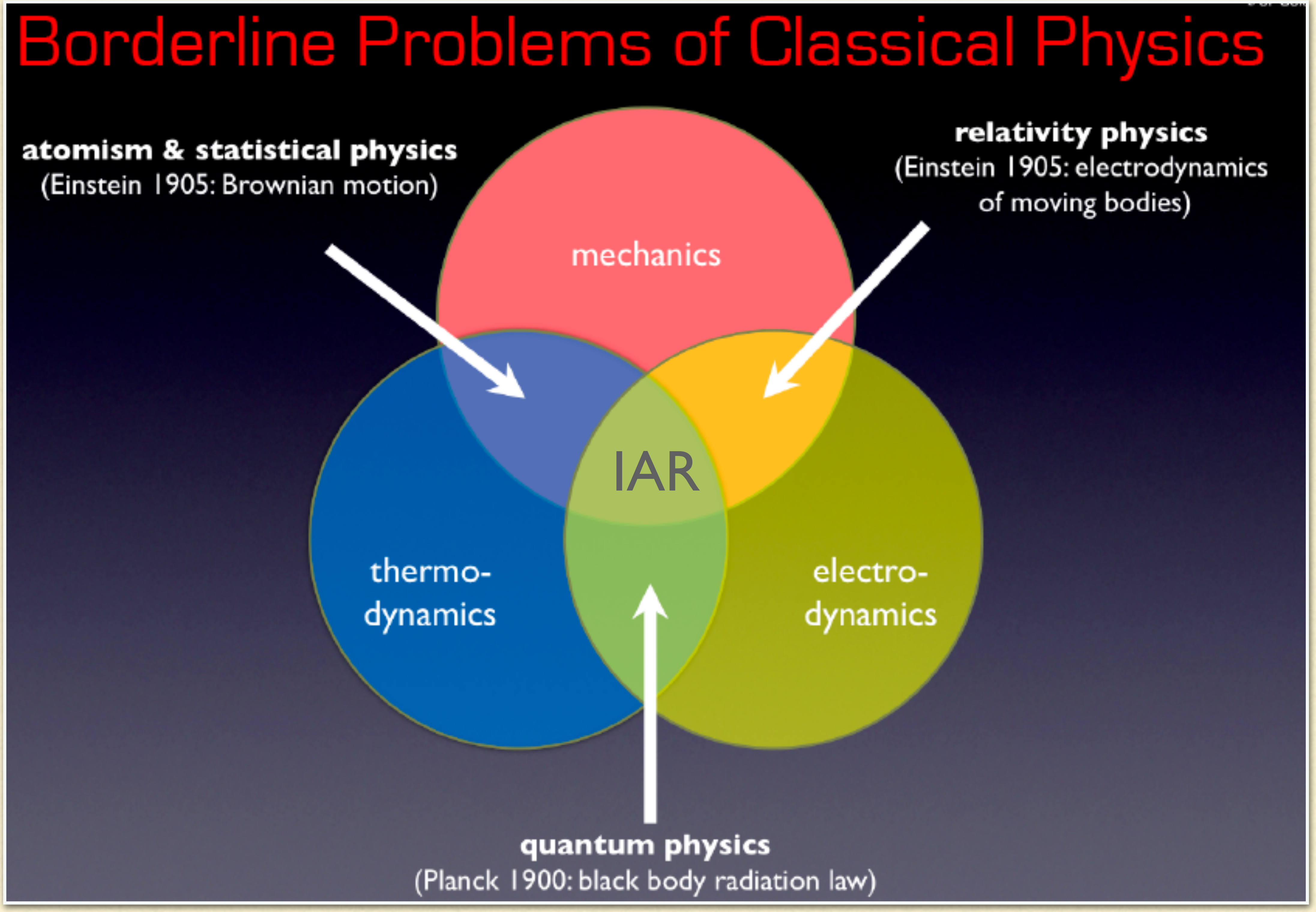
$$L = ct_0$$

$$t_0 = t\sqrt{1 - (V/c)^2}$$

$$t = \gamma t_0$$

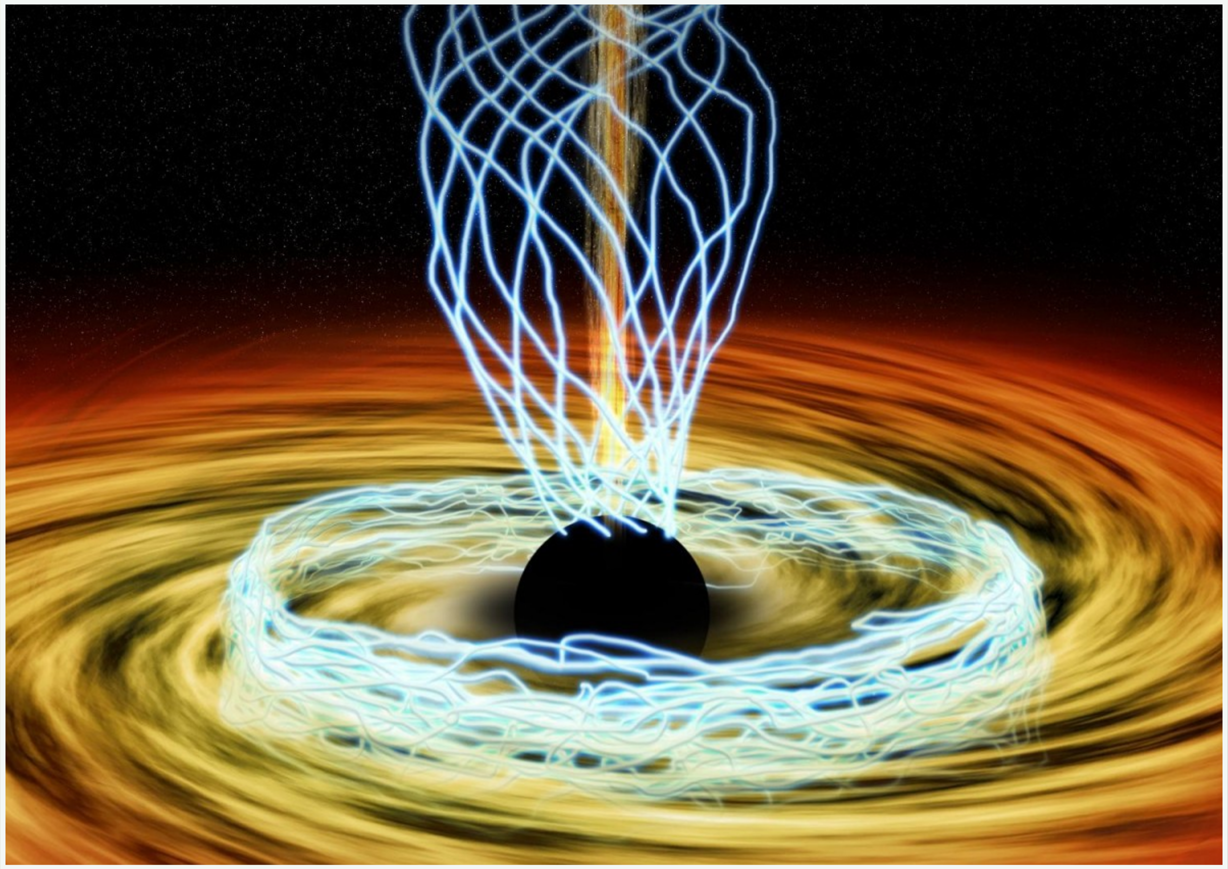
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{V}{c}$$

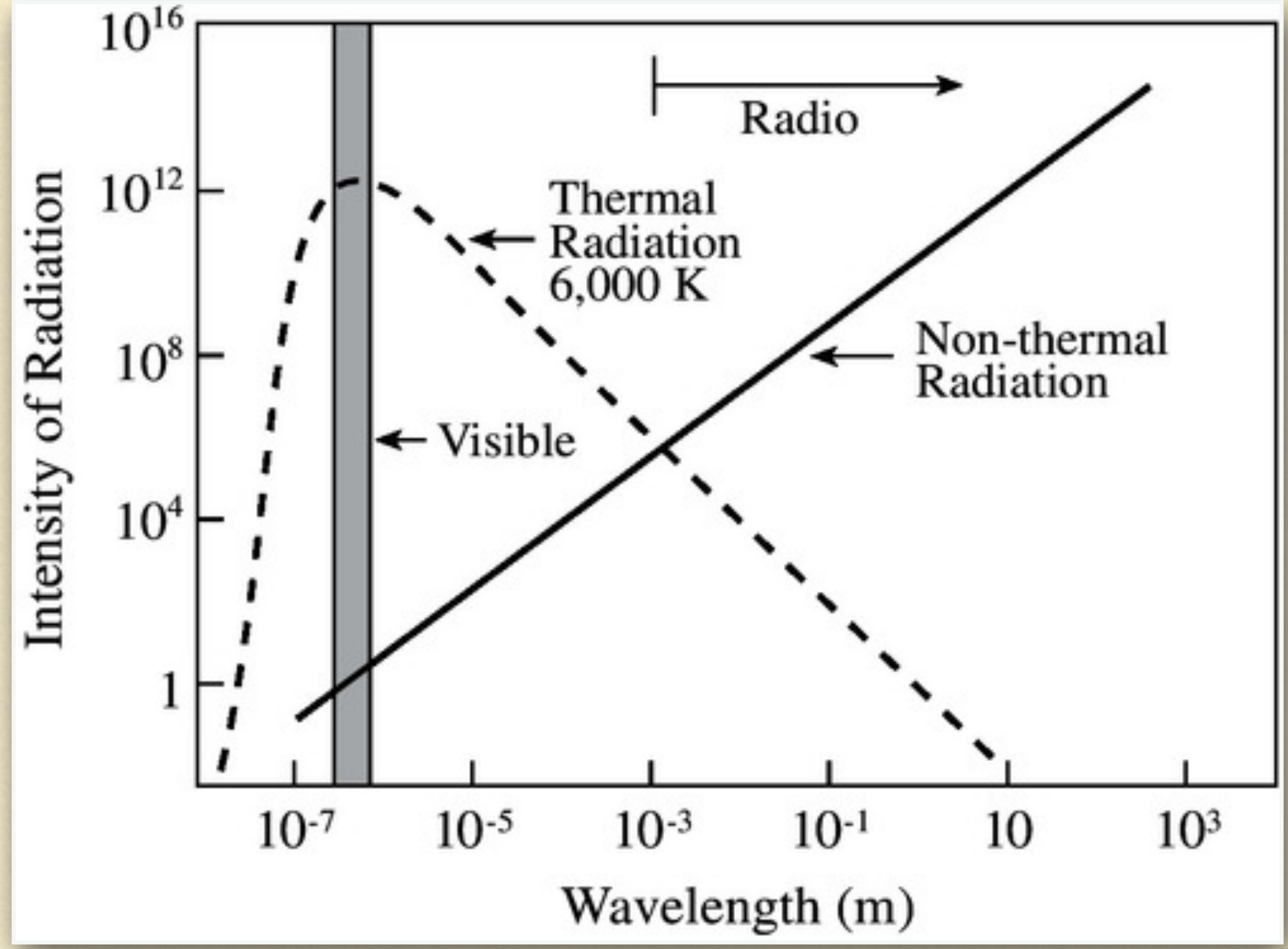
El tiempo es diferente en ambos sistemas.
No hay simultaneidad absoluta.


Borderline Problems of Classical Physics
atomism & statistical physics
(Einstein 1905: Brownian motion)
relativity physics
(Einstein 1905: electrodynamics of moving bodies)
mechanics
IAR
thermo-dynamics
electro-dynamics
quantum physics
(Planck 1900: black body radiation law)

La astrofísica relativista investiga los sistemas astrofísicos donde se genera radiación de origen no-térmico. Esta radiación es producida por partículas relativistas, que están fuera del equilibrio termodinámico.

El universo no-térmico, invisible al ojo humano, es donde se dan las manifestaciones más extremas de la naturaleza.



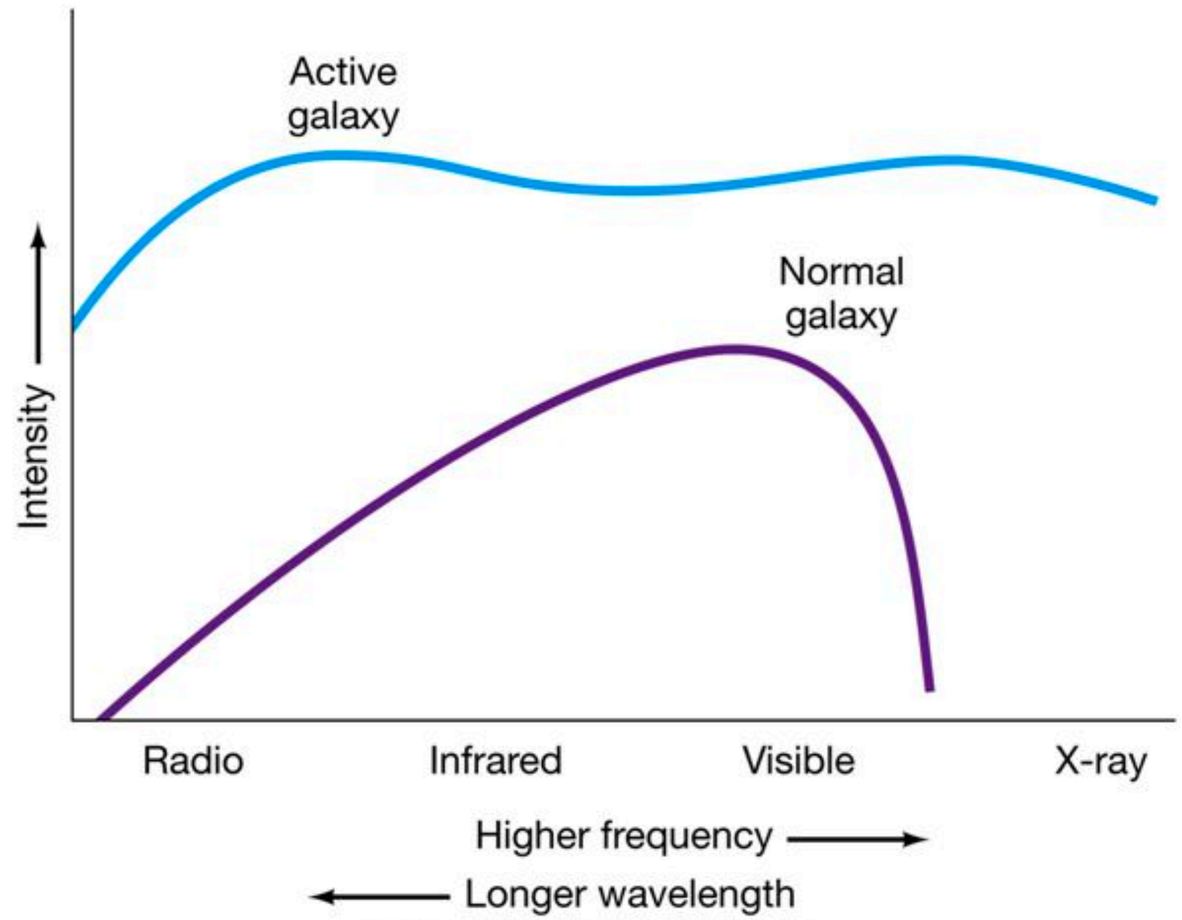


10^{16}
10^{12}
10^{8}
10^{4}
1
Intensity of Radiation
Radio
Thermal
Radiation
6,000 K
Non-thermal
Radiation
Visible
10^{-7}
10^{-5}
10^{-3}
10^{-1}
10
10^{3}
Wavelength (m)

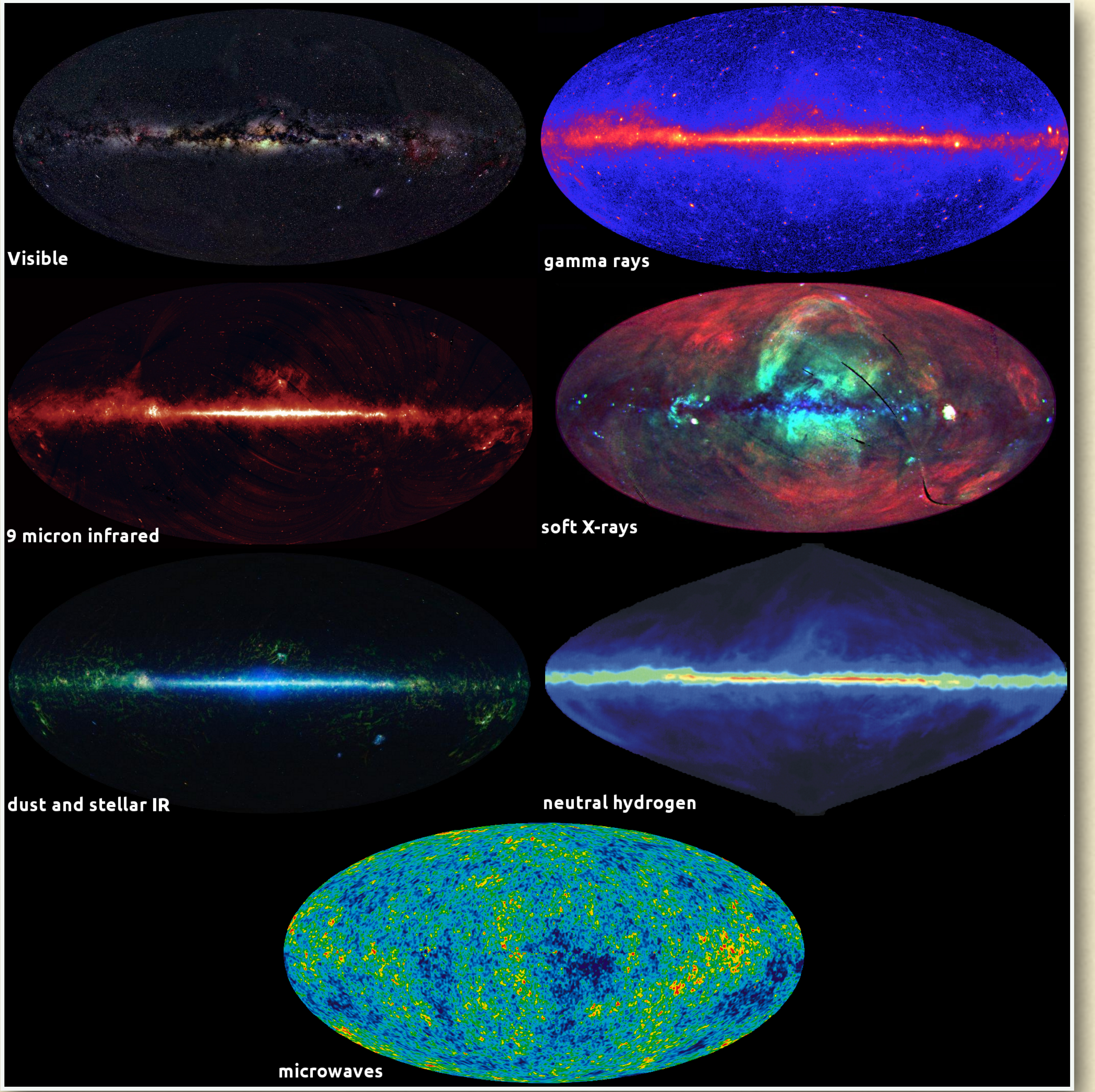
Thermal vs. Non-Thermal Spectra

Normal mostly from stars,

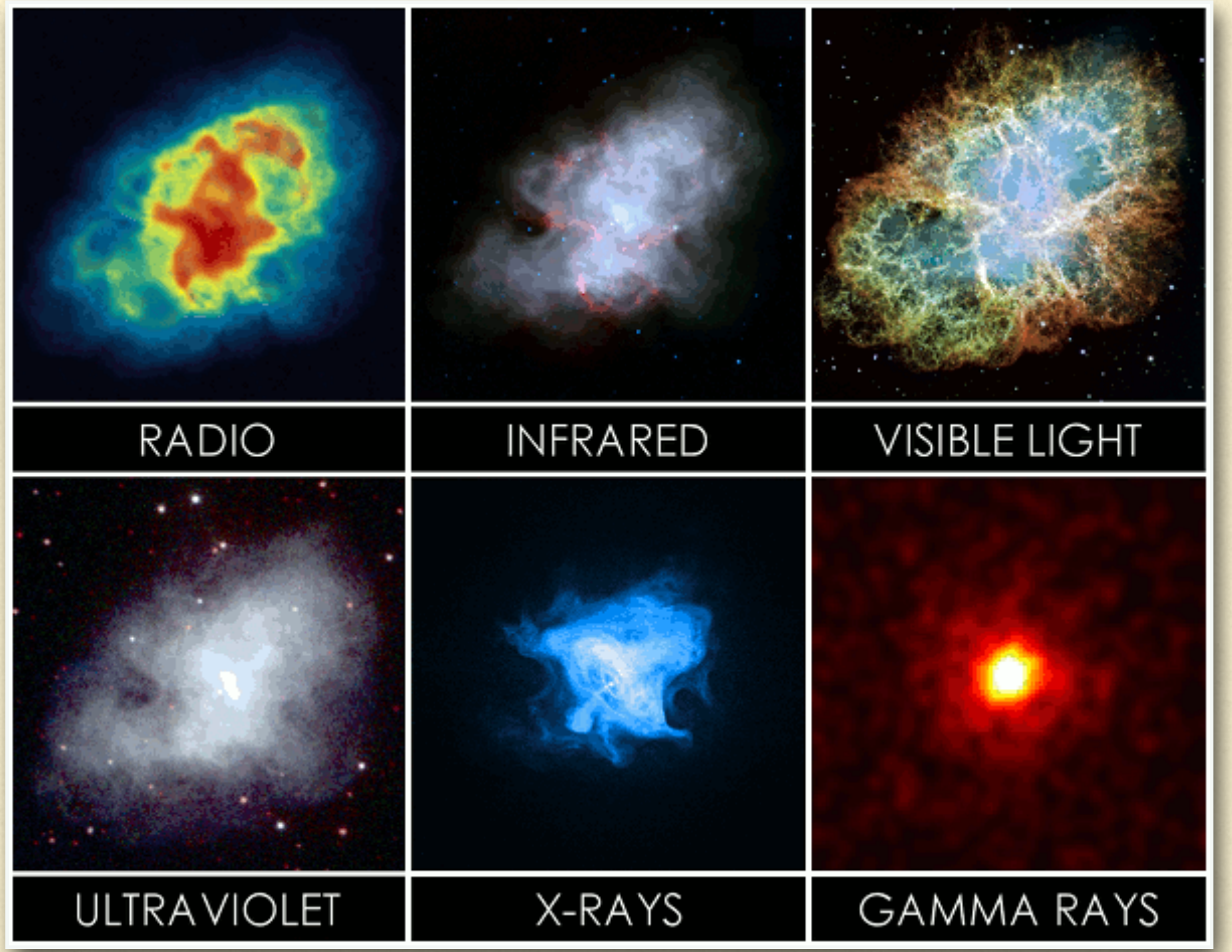
Active mostly synchrotron



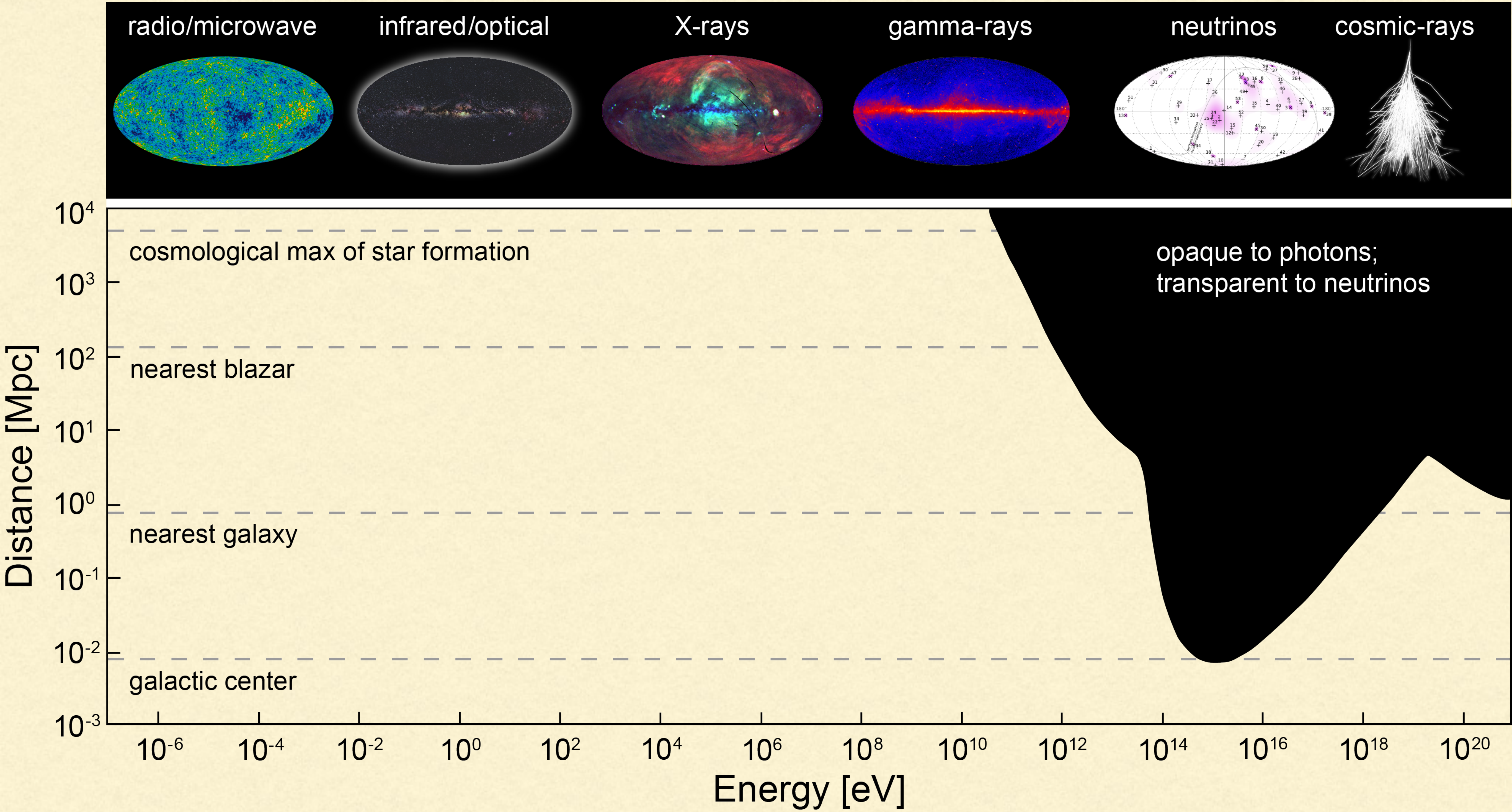
Multi-wavelength astronomy → New astrophysics

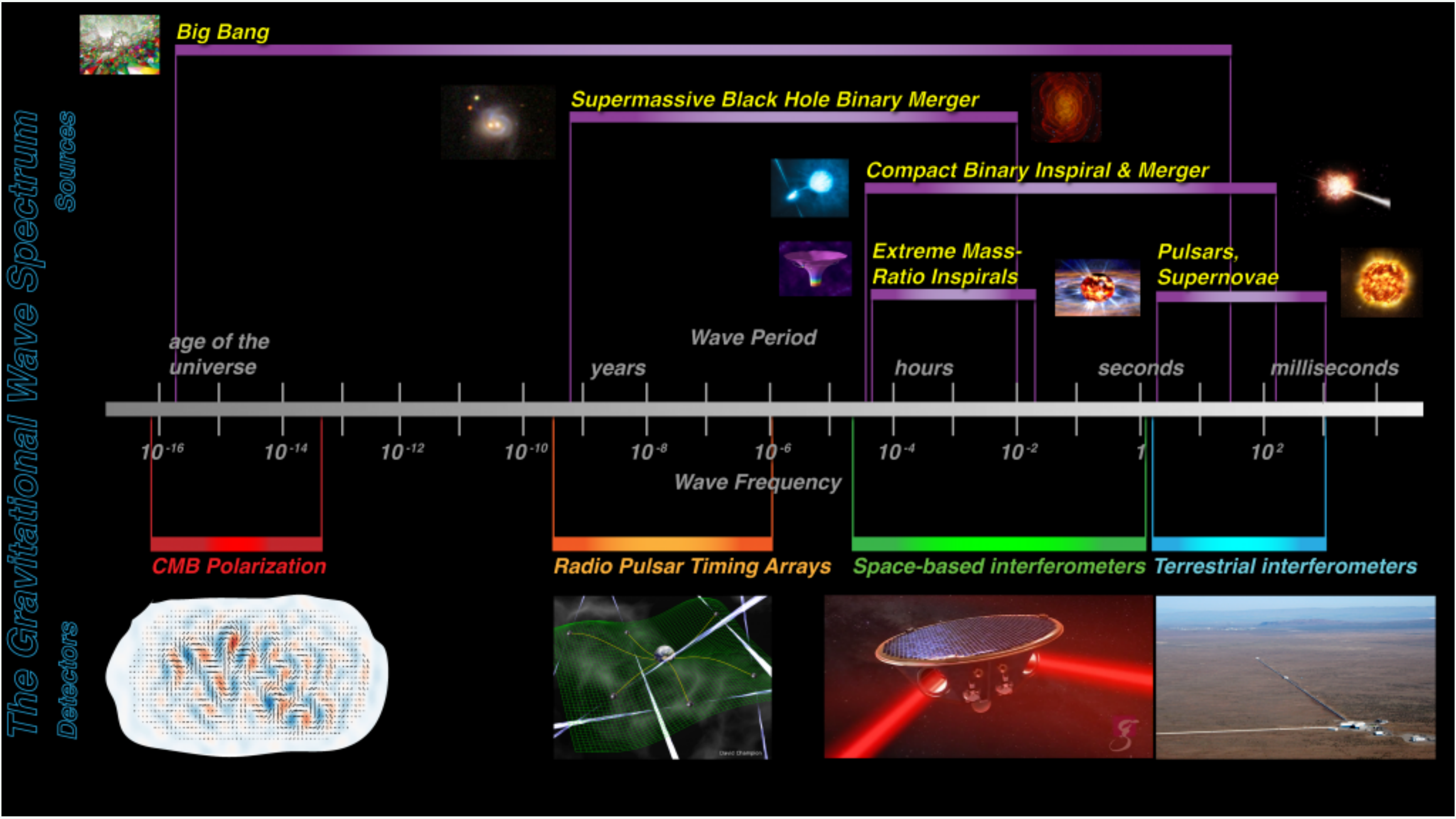


La nebulosa del Cangrejo



Otras señales que llegan del cosmos:
Astronomía de neutrinos, ondas gravitacionales, rayos cósmicos




The Gravitational Wave Spectrum
Sources
Detectors
Big Bang
Supermassive Black Hole Binary Merger
Compact Binary Inspiral & Merger
Extreme Mass-Ratio Inspirals
Pulsars, Supernovae
age of the universe
Wave Period
years
hours
seconds
milliseconds
10^{-16}
10^{-14}
10^{-12}
10^{-10}
10^{-8}
10^{-6}
10^{-4}
10^{-2}
1
10^{2}
Wave Frequency
CMB Polarization
Radio Pulsar Timing Arrays
Space-based interferometers
Terrestrial interferometers

El espacio-tiempo

El espacio-tiempo es un sistema físico que interactúa con todos los sistemas físicos.

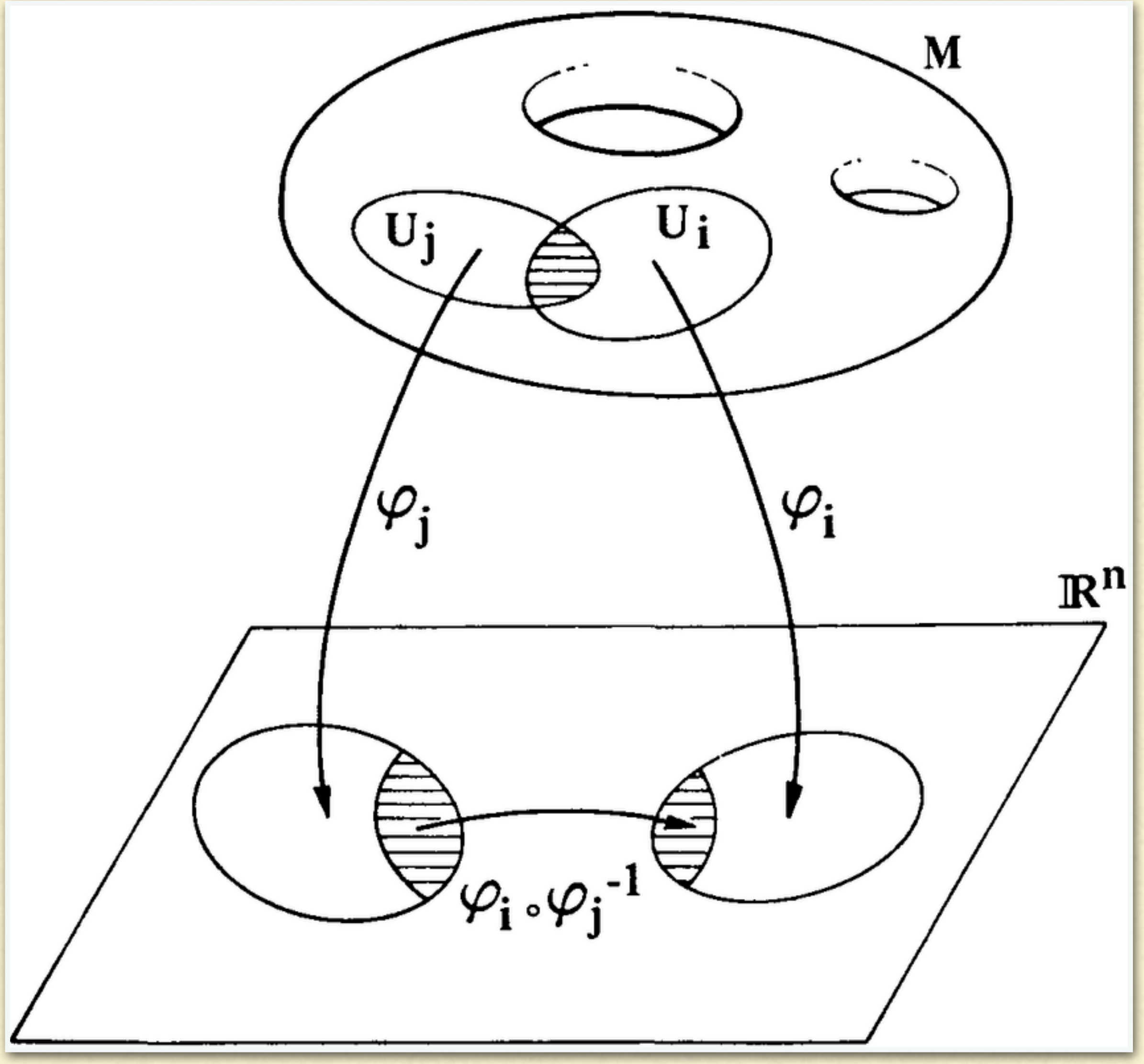
El espacio-tiempo "incluye" a todos los eventos.

Todo lo que ha ocurrido, ocurre o ocurrirá a alguna cosa puede considerarse un punto (elemento) del espacio-tiempo. Un proceso (sucesión de cambios) es una línea (o parte) del espacio-tiempo.

El espacio-tiempo no es un mero conjunto u objeto matemático, sino una entidad física: actúa sobre los diferentes campos y objetos y a su vez puede ser afectado por ellos.

El espacio-tiempo se representa por una variedad real cuadri-dimensional diferenciable.

Una *variedad real* es un conjunto que puede ser completamente cubierto por subconjuntos cuyos elementos pueden ser puestos en correspondencia 1 a 1 con subconjuntos de R^4 (si la variedad es cuadri-dimensional; R^n si es n-dimensional).



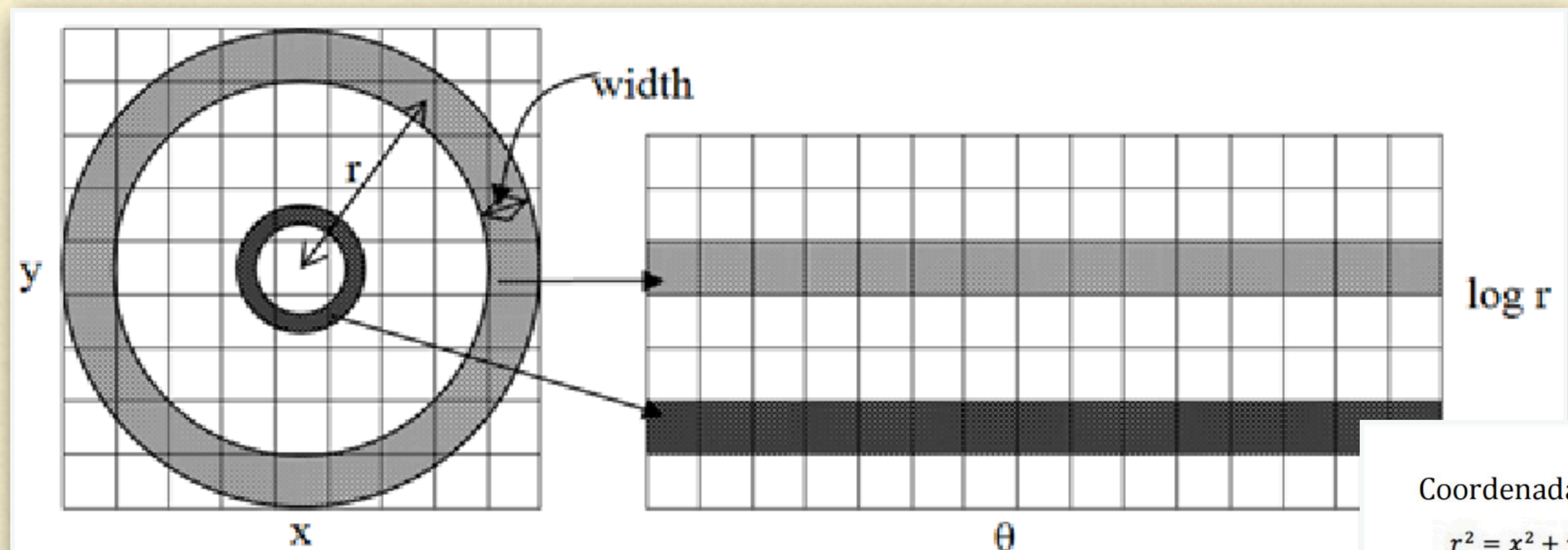
M es una variedad real n-dimensional diferenciable si y solo si:

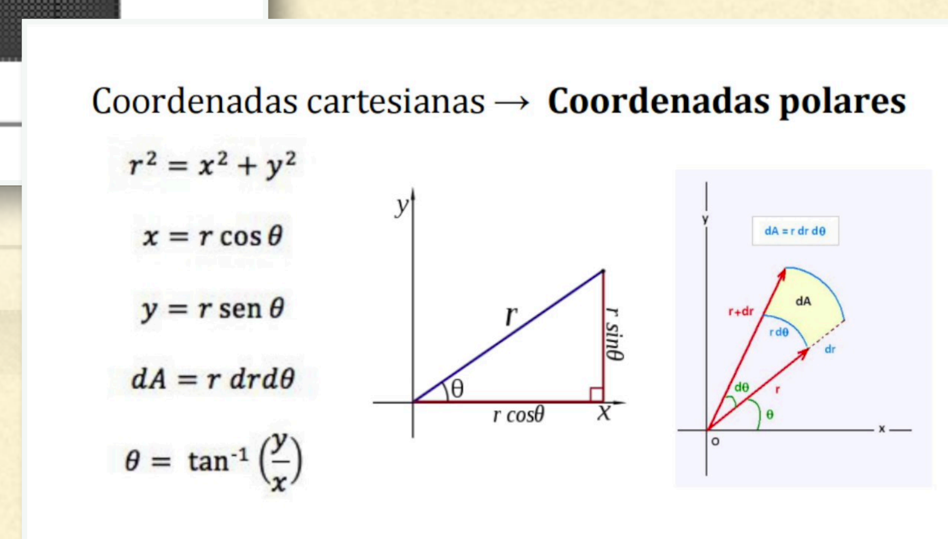
1. M es un conjunto (o más precisamente un espacio topológico de Hausdorff conectado).
2. $\exists O / O = \{O_\alpha \subset M\}$.
3. Todo elemento $p \in M$ es tal que $\exists O_\alpha \in O / p \in O_\alpha$.
4. $\forall O_\alpha \exists \Phi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$, con Φ_α un homeomofismo de O_α sobre un subconjunto abierto de R^n denominado U_α.
5. Si existen dos conjuntos O_1 y $O_2 / O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ ($\emptyset =$ vacío) $\Rightarrow \exists \Phi_2 \cdot \Phi_1^{-1}$ que pone en correspondencia 1 a 1 los puntos de $U_1 \subset R^n$ con los de $U_2 \subset R^n$.

Dado un elemento $p \in M$ podemos describirlo usando distintos sistemas de coordenadas. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
p &\longleftrightarrow \{x^\mu\} \\
p &\longleftrightarrow \{x'^\mu\} \\
\exists \;\; x'^\mu &= x'^\mu(\{x^\mu\})
\end{aligned}
$$

donde $\mu = 0, 1, 2, 3$.





Objetos sobre la variedad

Los objetos sobre la variedad se definen por sus propiedades de transformación frente a cambios de coordenadas $\{x^\mu\} \longleftrightarrow \{x'^\mu\}$. El objeto más simple es un *escalar*:

$$\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu).$$

El *valor* del escalar no cambia cuando el sistema coordenado cambia de $\{x^\mu\}$ a $\{x'^\mu\}$. Notar que la forma ϕ sí puede cambiar.

Introduzcamos ahora un objeto de cuatro componentes A^μ. Si ante un cambio de coordenadas $\{x^\mu\} \to \{x'^\mu\}$, este se transforma como

$$A'^\mu = \sum_{\nu=1}^{4} A^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu},$$

entonces A^μ es un *vector contravariante*.

$$A'^{\mu} = A^{\nu}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}.$$

Ejemplo:

$$\mathrm{d}x'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\mathrm{d}x^{\nu}.$$

Los vectores *covariantes* se definen por medio de la siguiente ley de transformación ante cambios de coordenadas:

$$B'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}B_{\nu}.$$

Un ejemplo es el gradiente de un campo escalar:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}.$$

Podemos definir tensores contravariantes (o covariantes) de rango arbitrario:

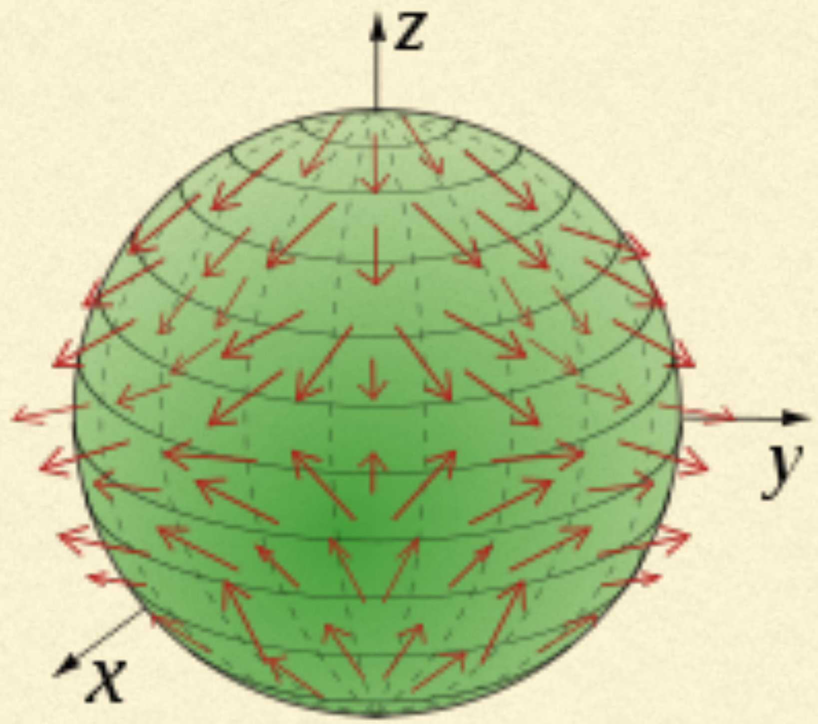
$$T'^{\overbrace{\ldots\mu\ldots}^{n}}_{\underbrace{\ldots\nu\ldots}_{m}} = \ldots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \ldots \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \ldots T^{\ldots\rho\ldots}_{\ldots\sigma\ldots}$$

El tensor T es, en este caso, n veces contravariante y m veces covariante.

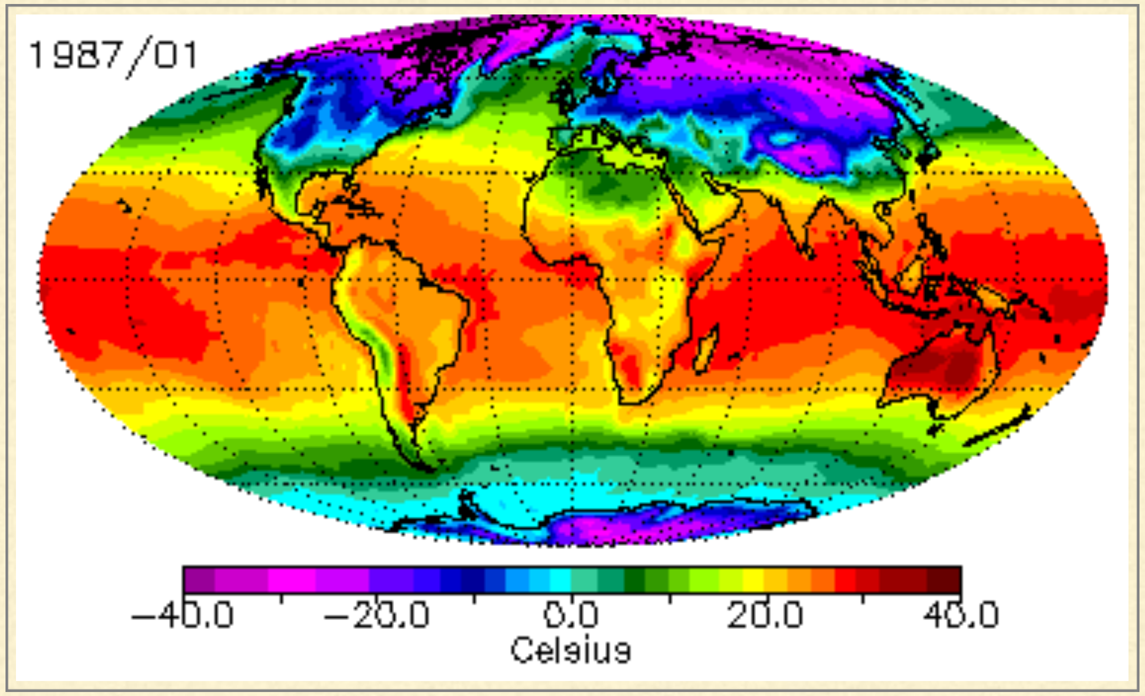
Un campo tensorial definido sobre alguna región de la variedad es una asociación de un tensor de la misma variedad a cada punto de la región:

$$p \longrightarrow T^{\cdots\mu\cdots}_{\ldots\nu\ldots}(p),$$

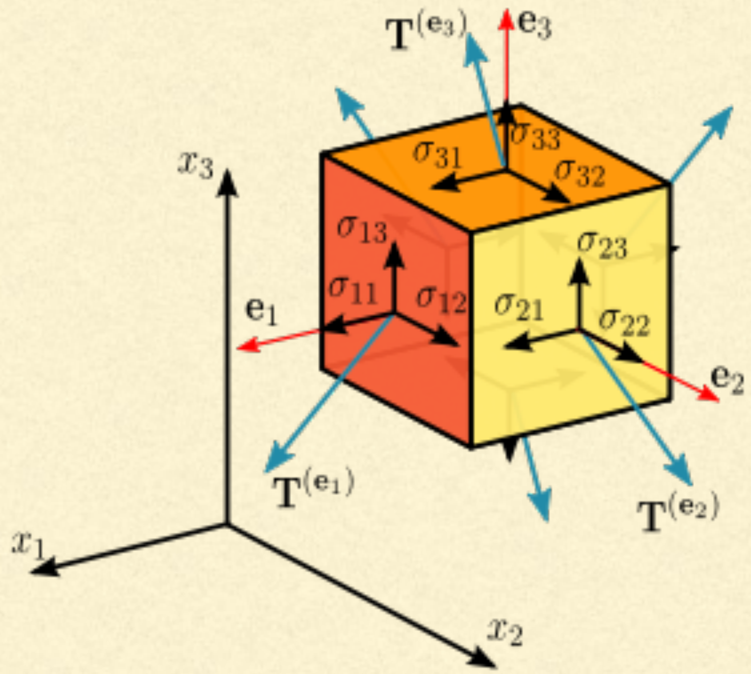
donde $T^{\cdots\mu\cdots}_{\ldots\nu\ldots}(p)$ es el valor del tensor en p. El campo tensorial se llama continuo o diferenciable si las componentes del tensor lo son.



Campo escalar



Campo vectorial



Campo tensorial

Estructura métrica

¿Cómo medimos distancias sobre la variedad?

Introducimos un tensor de rango 2 llamado *tensor métrico*. El mismo nos dice cómo calcular la distancia $\mathrm{d}s$ entre dos eventos arbitrariamente próximos ϵ_1 y ϵ_2:

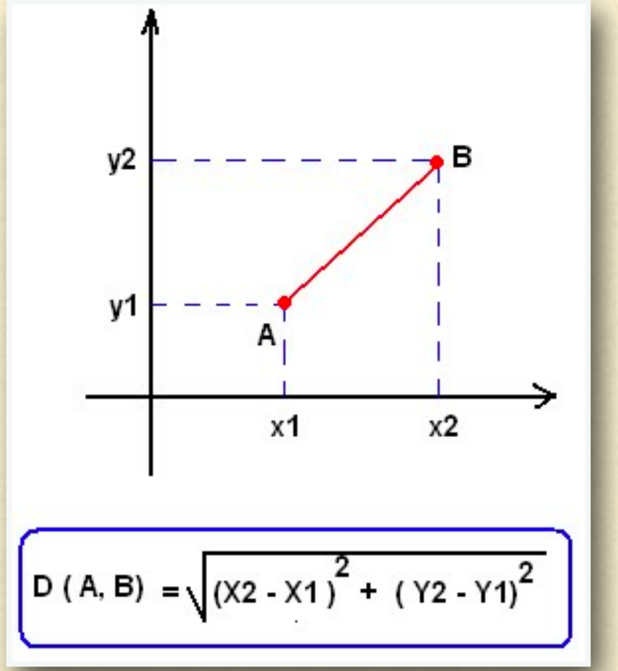
$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu,$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico. En un espacio-tiempo euclídeo, por ejemplo,

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

y

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2.$$



Minkowski propuso que el tensor métrico del espacio-tiempo es un tensor pseudo-euclídeo de rango 2 y traza -2:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

conocido como *tensor de Minkowski*. Es inmediato establecer que

$$\eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}.$$

En este espacio-tiempo de Minkowski el intervalo (distancia infinitesimal) entre dos eventos resulta ser:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} \\ &= (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2. \end{aligned}$$

La geometría resultante es *pseudoeuclídea*

A las tres coordenadas que aparecen con signo negativo en el intervalo se las suele denominar *espaciales*:

$$x^1 = x \; , \; x^2 = y \; , \; x^3 = z. \tag{1}$$

La coordenada que aparece con el signo opuesto es llamada *temporal*:

$$x^0 = c\,t. \tag{2}$$

Aquí c es una constante que permite uniformizar las dimensiones, que en principio no tienen por qué ser iguales. El valor de esta constante coincide con el de la velocidad de la luz en el vacío.

En coordenadas esféricas polares tenemos:

$$x^\mu = (ct,\ r,\ \theta,\ \phi),$$

donde

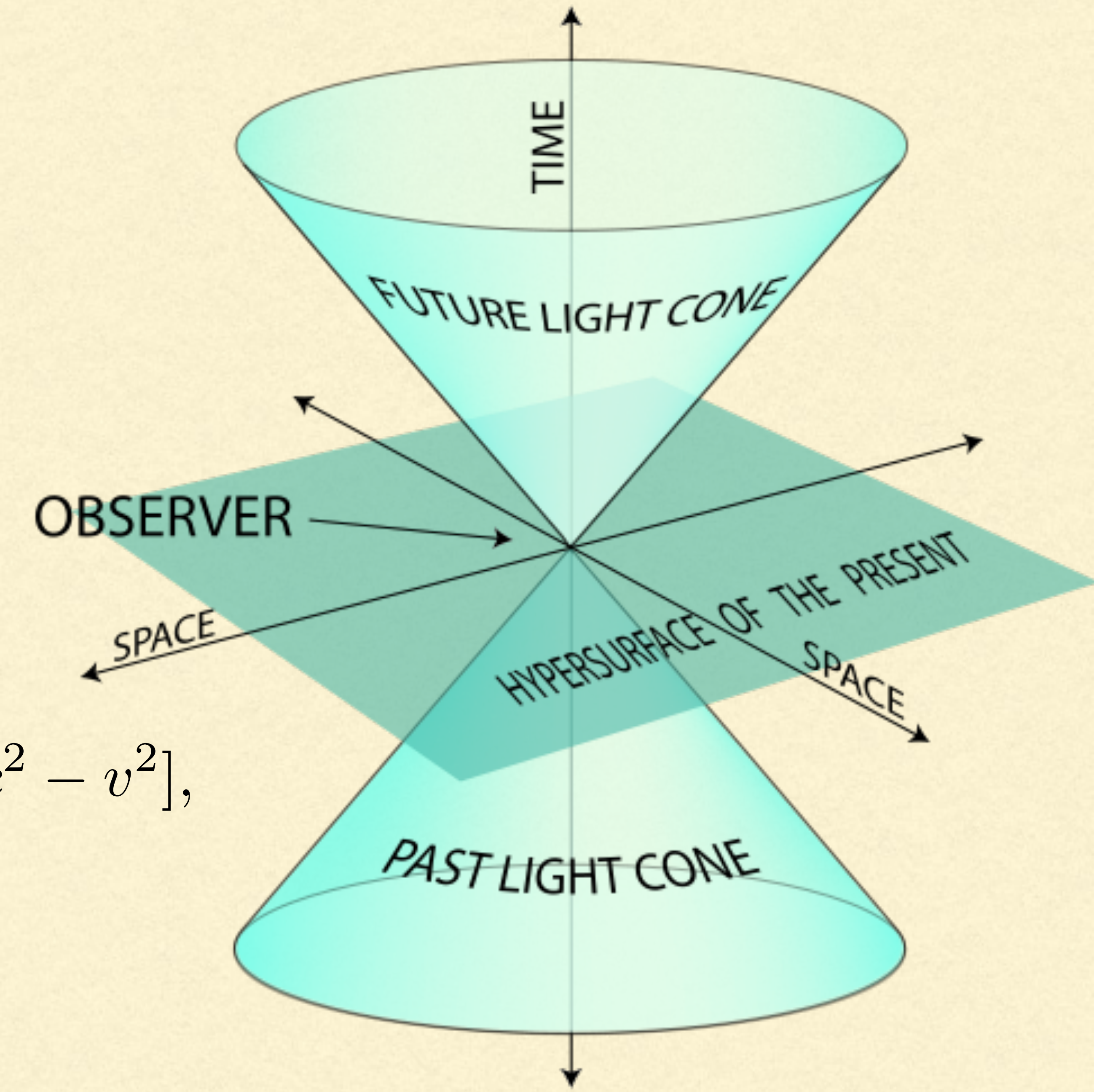
$$\begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= r\cos(\theta). \end{aligned}$$

Luego, el intervalo en estas coordenadas resulta:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\phi^2.$$

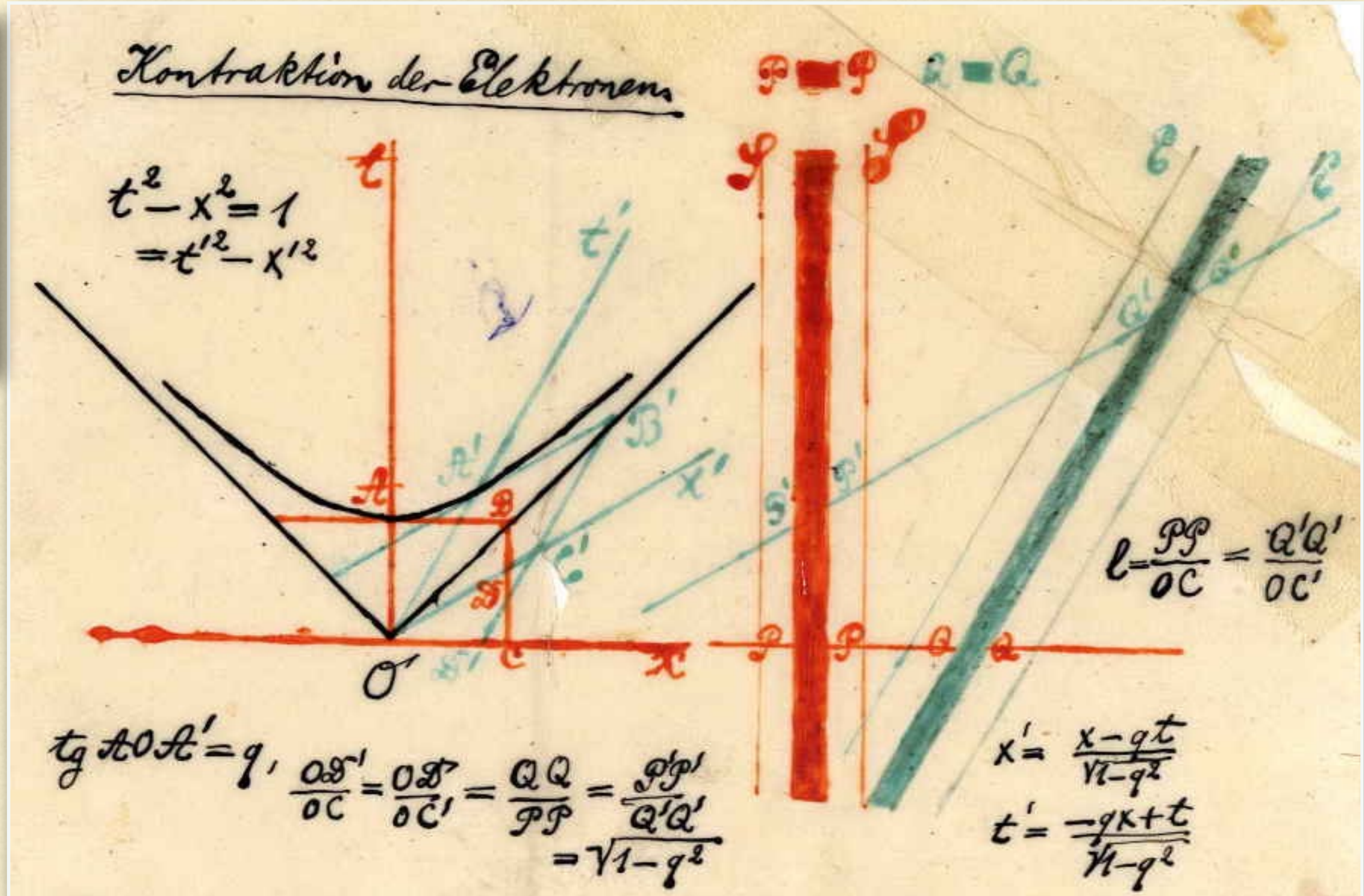
El tensor métrico introduce una estructura causal en el espacio-tiempo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &< 0 : \text{región tipo espacio},\\
\mathrm{d}s^2 &= 0 : \text{región tipo luz},\\
\mathrm{d}s^2 &> 0 : \text{región tipo tiempo}.
\end{aligned}
$$

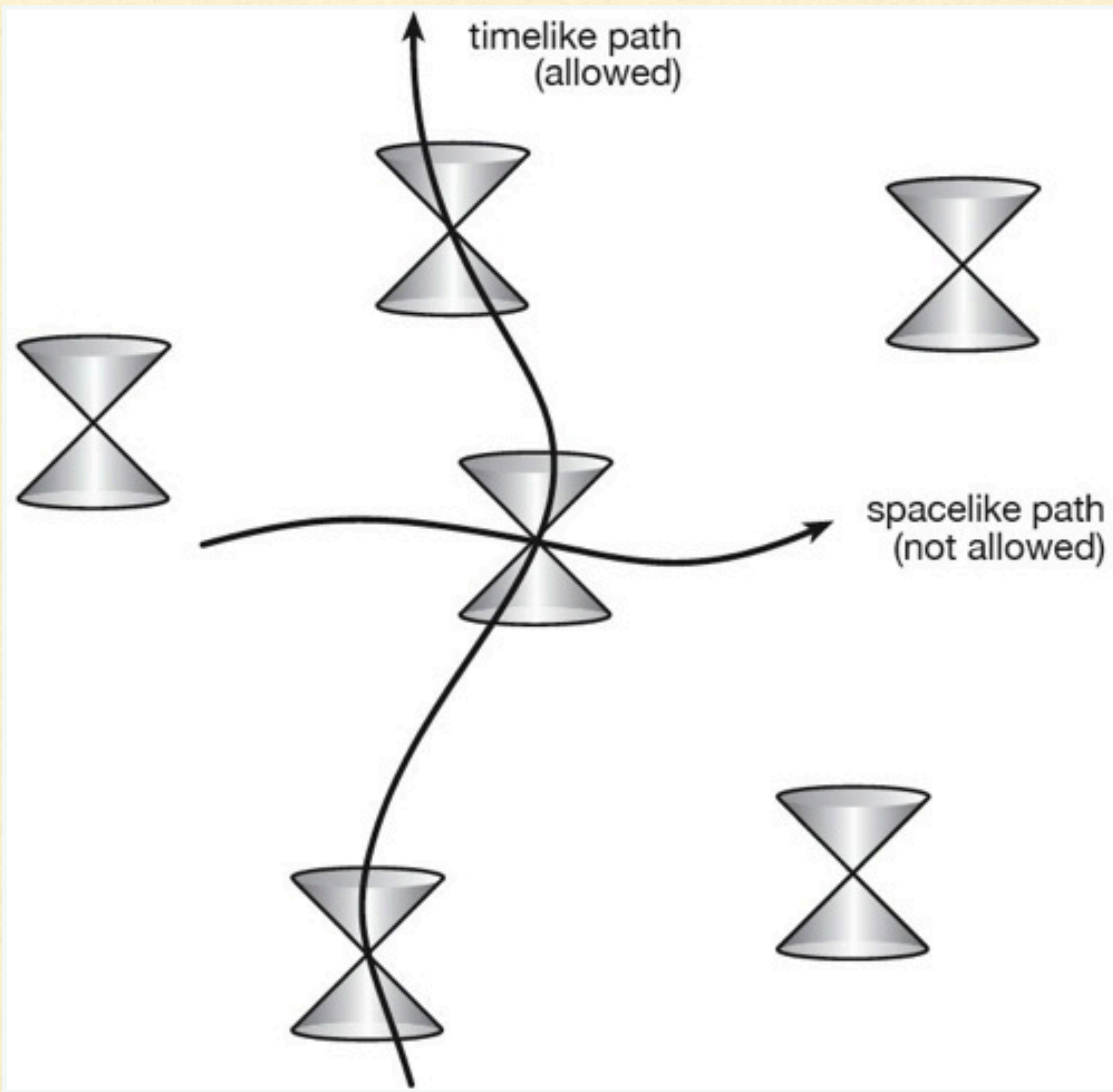


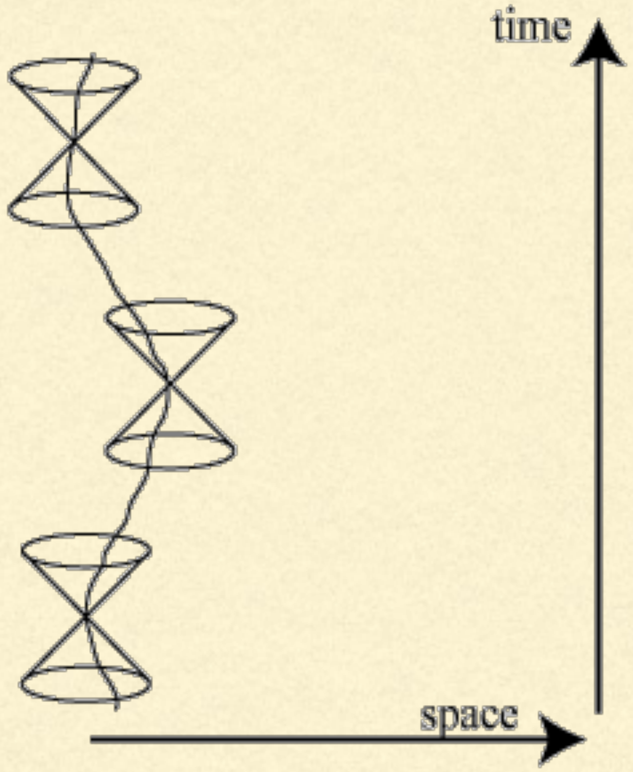
$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 \left[c^2 - \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}\right] = \mathrm{d}t^2[c^2 - v^2],$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 < 0 &\Longleftrightarrow v > c.\\
\mathrm{d}s^2 = 0 &\Longleftrightarrow v = c.\\
\mathrm{d}s^2 > 0 &\Longleftrightarrow v < c.
\end{aligned}
$$



Minkowski,
Klön, 1908


timelike path
(allowed)
spacelike path
(not allowed)


time
space

Es posible definir el *tiempo propio* de un sistema físico que se mueve con velocidad v respecto de un cierto sistema coordenado como

$$\mathrm{d}\tau^2 = \frac{1}{c^2}\mathrm{d}s^2.$$

Este es el tiempo que mide un reloj fijo al sistema físico.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau^2 &= \frac{1}{c^2}(c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2) \\
&= \mathrm{d}t^2\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\right\} \\
&= \mathrm{d}t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),
\end{aligned}$$

y si introducimos el *factor de Lorentz*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

donde

$$\beta = \frac{v}{c},$$

obtenemos:

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}.$$

Debido a que $\gamma \geq 1$, el tiempo respecto al sistema propio se dilata. Para un sistema con $\beta = \beta(t)$:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}t}{\gamma(t)}.$$

El grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz es el grupo de transformaciones lineales homogéneas de de coordenadas que deja invariable al intervalo en la métrica de Minkowski.

$$L = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu\}\,,$$

$$L^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\,.$$

Definición de grupo

Sea L un conjunto no vacío y sea $*$ una función sobre L. El par ordenado $(L, *)$ es un grupo si y solo si $*$ es una ley interna en L, asociativa, con elemento neutro y tal que todo elemento de L admite inverso respecto de $*$.

En forma simbólica, $(L, *)$ es grupo si y solo si:

- $* : L^2 \longrightarrow L$,
- $(\forall a, b, c)_L \;\; (a * b) * c = a * (b * c)$,
- $(\exists e)_L / (\forall a)_L \;\; (a * e = e * a = a)$,
- $(\forall a)_L (\exists a^{-1})_L \;\; (a * a^{-1} = a^{-1} * a = e)$.

Si además se cumple que

- $(\forall a, b)_L \;\; (a * b = b * a)$

se dice que el grupo es *conmutativo* o *abeliano*.

Debido a que la invariancia del intervalo exige la invariancia del tensor métrico, se cumple que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x'^{\mu}\,\mathrm{d}x'^{\nu} \\
&= \eta_{\mu\nu}\,L^{\mu}_{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,L^{\nu}_{\beta}\,\mathrm{d}x^{\beta} \\
&= \eta_{\mu\nu}\,L^{\mu}_{\alpha}\,L^{\nu}_{\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta} = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\beta}
\end{aligned}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}\,L^{\mu}_{\alpha}\,L^{\nu}_{\beta}.$$

El elemento neutro del grupo de Lorentz es δ^{μ}_{ν}:

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu}.$$

El elemento inverso es la inversa de la matriz L^{μ}_{ν}. Esta siempre tiene inversa, ya que

$$\det\left(L^{\mu}_{\alpha}\,L^{\nu}_{\beta}\,\eta_{\mu\nu}\right) = \det\left(\eta_{\alpha\beta}\right) \Longrightarrow \left(\det L^{\mu}_{\nu}\right)^2 = 1 \Longrightarrow \det L^{\mu}_{\nu} = \pm 1.$$

O sea que L^{μ}_{ν} es no singular y por lo tanto invertible. Se puede demostrar, derivando $L^{\mu}_{\alpha}\,L^{\nu}_{\beta}\,\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$ respecto de x^{ϵ}, que las tranformaciones son *únicas*.

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} L^{\mu}_{\alpha} L^{\nu}_{\beta},$$

con lo cual resulta que la componente

$$\begin{aligned}
\eta_{00} &= 1 = \eta_{\mu\nu} L^{\mu}_{0} L^{\nu}_{0} \\
&= \eta_{00}(L^0_0)^2 + \eta_{11}(L^1_0)^2 + \eta_{22}(L^2_0)^2 + \eta_{33}(L^3_0)^2 \\
&= (L^0_0)^2 - (L^1_0)^2 - (L^2_0)^2 - (L^3_0)^2.
\end{aligned}$$

$$(L^0_0)^2 - [(L^1_0)^2 + (L^2_0)^2 + (L^3_0)^2] = 1$$

$$(L^0_0)^2 = 1 + [(L^1_0)^2 + (L^2_0)^2 + (L^3_0)^2] \geq 1 \Longrightarrow L^0_0 \geq 1 \ \vee \ L^0_0 \leq -1.$$

Esto significa que existe un conjunto de transformaciones de Lorentz prohibidas.

Hay 4 casos posibles:

1. $\det(L) = 1 \ \wedge \ L^0_0 \geq 1 \ \longrightarrow$ grupo propio de Lorentz,
2. $\det(L) = 1 \ \wedge \ L^0_0 \leq -1 \ \longrightarrow$ inversiones espacio-temporales

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

3. $\det(L) = -1 \ \wedge \ L^0_0 \geq 1 \ \longrightarrow$ inversiones espaciales

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

4. $\det(L) = -1 \ \wedge \ L^0_0 \leq -1 \ \longrightarrow$ inversiones temporales

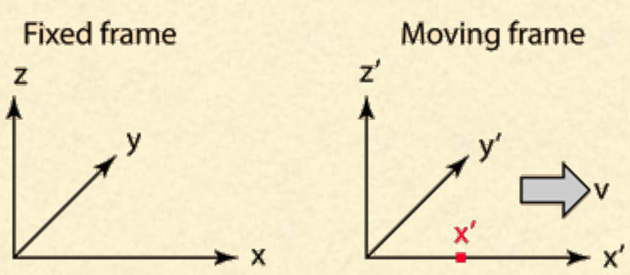
$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los casos 2, 3 y 4 no son grupos porque no contienen la identidad.

El grupo de Lorentz es un subgrupo propio del más general *grupo de Poincaré*. Este consiste en las transformaciones lineales *inhomogéneas* que dejan la métrica $\eta_{\mu\nu}$ invariante. Se trata de transformaciones de Lorentz más una traslación arbitraria en el espacio-tiempo:

$$P = \{x^\mu \longrightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu + t^\mu\} \,.$$

Consideremos, como ejemplo, el caso simple de una transformación con $t^\mu = 0$ que consista en un cambio entre sistemas que se mueven sobre el eje x con velocidad v (usualmente llamado *boost*):



$$\mathbf{L}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\,\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\,\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\,\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\,\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde $\beta = v/c$ y $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

$$t' = \gamma\,(t - vx/c^2)$$
$$x' = \gamma\,(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z.$$

Transformaciones de Lorentz entre sistemas de referencia que se mueven en la dirección x con velocidad v.

If the length $L_0 = x'_2 - x'_1$ is measured in the moving reference frame, then $L = x_2 - x_1$ can be calculated using the Lorentz transformation.

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

But since the two measurements made in the fixed frame are made simultaneously in that frame, $t_2 = t_1$, and

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L_0}{\gamma}$$

Length contraction

Dinámica relativista

Trayectoria de una partícula moviéndose en el espacio-tiempo:

$$x^\mu = x^\mu(\tau),$$

siendo τ el tiempo propio.

Acción:

$$S = \int_1^2 \mathcal{L}\,\mathrm{d}t$$

donde $\mathcal{L} = T - U$ es el Lagrangiano de la partícula, siendo T y U la energía cinética y potencial, respectivamente, y los límites 1 y 2 representan los puntos inicial y final de la trayectoria. Sobre trayectorias reales $\delta S = 0$.

Como la partícula se mueve libremente, lo hace sobre una geodésica y su acción es:

$$S = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}s$$

donde α es constante y $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = c^2\mathrm{d}t^2/\gamma^2$.

$$S = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} c\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t = -\alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{c^2 - v^2}\,\mathrm{d}t.$$

El Lagrangiano es $\mathcal{L} = -\alpha\,\sqrt{c^2 - v^2}$. Para $v \to 0$,

$$\mathcal{L} \approx -\alpha\, c\, + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{c}\, v^2 + \ldots.$$

Comparando con la expresión newtoniana, $\mathcal{L} = (1/2)mv^2$, obtenemos que $\alpha = mc$ y por lo tanto

$$\mathcal{L} = -m\,c\,\sqrt{c^2 - v^2}.$$

Definimos el cuadrivector velocidad como:

$$v^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t/\gamma} = (\gamma c, \gamma\vec{v}) = \dot{x}^\mu,$$

y la cuadri-aceleración como:

$$a^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = \ddot{x}^\mu.$$

El cuadri-impulso es:

$$p_\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu},$$

$$\vec{P} = \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}\vec{v} = \gamma m \vec{v}$$

$$p_0 = \gamma m c.$$

Usando el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ definimos la energía como

$$E = \mathcal{H} = \vec{P} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \gamma\, m\, c^2.$$

$$P^\mu \equiv (\gamma m c, \gamma m \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$$

$$P^\mu = \eta^{\mu\nu}\, P_\nu = m\, v^\mu.$$

$$P^\mu P_\mu = m\, \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\, m\, \frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = m^2\, \frac{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = m^2 \frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}\tau^2} = (mc)^2$$

donde hemos usado que $\eta_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}x_\mu$. Luego, $E^2/c^2 - p^2 = m^2\, c^2$ y

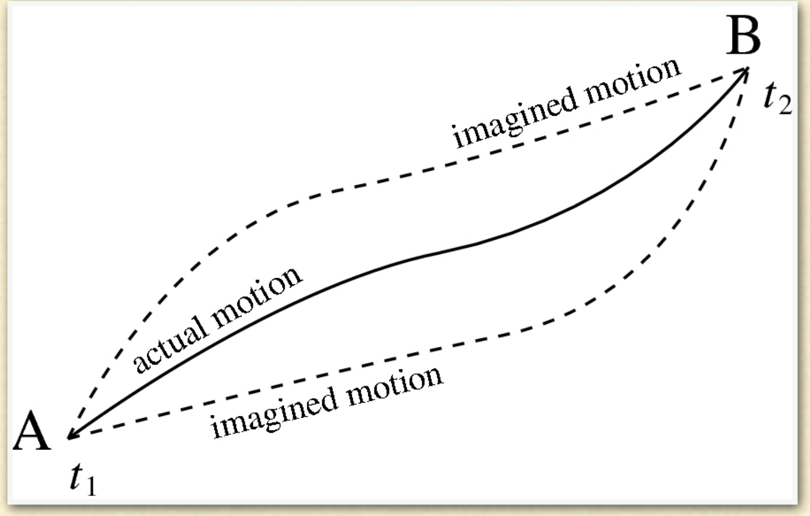
$$\boxed{E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2,}$$

que es la expresión para la energía de una partícula libre y tiene un término de energía en reposo y otro dinámico.

Ecuaciones del movimiento

$$S = -m\,c^2 \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t = -m\,c^2 \int_a^b \mathrm{d}\tau$$

$$\delta S = -mc^2 \int_a^b \delta \mathrm{d}\tau.$$



Utilizando que

$$\delta(\mathrm{d}s^2) = \delta(c^2\,\mathrm{d}\tau^2)$$
$$2\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\delta\mathrm{d}x^\beta = c^2 2\mathrm{d}\tau\delta\mathrm{d}\tau$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\delta\mathrm{d}x^\beta = \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}v^\alpha\mathrm{d}\delta x^\beta \\ &= \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}(v^\alpha\delta x^\beta) - \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}\delta x^\beta\mathrm{d}v^\alpha \\ &= \frac{1}{c^2}\mathrm{d}(v^\alpha\delta x_\alpha) - \frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}\delta x^\beta\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\delta S = -m\,v^\alpha\delta x_\alpha\Big|_a^b + m\int_a^b \delta x_\alpha\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau.$$

En los límites $(\delta x^{\alpha})_a = (\delta x^{\mu})_b = 0$ la trayectoria real satisface $\delta S = 0$, entonces:

$$0 = m\,\delta x_{\alpha}\frac{\mathrm{d}v^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

Como la variación δx es arbitraria:

$$\frac{\mathrm{d}v^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = 0.}$$

En caso de que haya una fuerza externa f^{μ}:

$$\boxed{f^{\mu} = \frac{\mathrm{d}P^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}.}$$

Cuando no hay fuerza, $P^{\mu} = l^{\mu}$ con l^{μ} un cuadrivector constante. Esto expresa la conservación del momento lineal.

Resultados importantes

$$E = \gamma m c^2.$$

Cuando $\beta \longrightarrow 0, E \longrightarrow mc^2.$

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$P^\mu = \left(\frac{E}{c}, \gamma m \vec{v}\right)$$

$$f^\mu = \frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right).$$

Elementos de relatividad general

¿Es posible generalizar la relatividad para que las ecuaciones de la física sean válidas en cualquier sistema de referencia? (Einstein 1907)

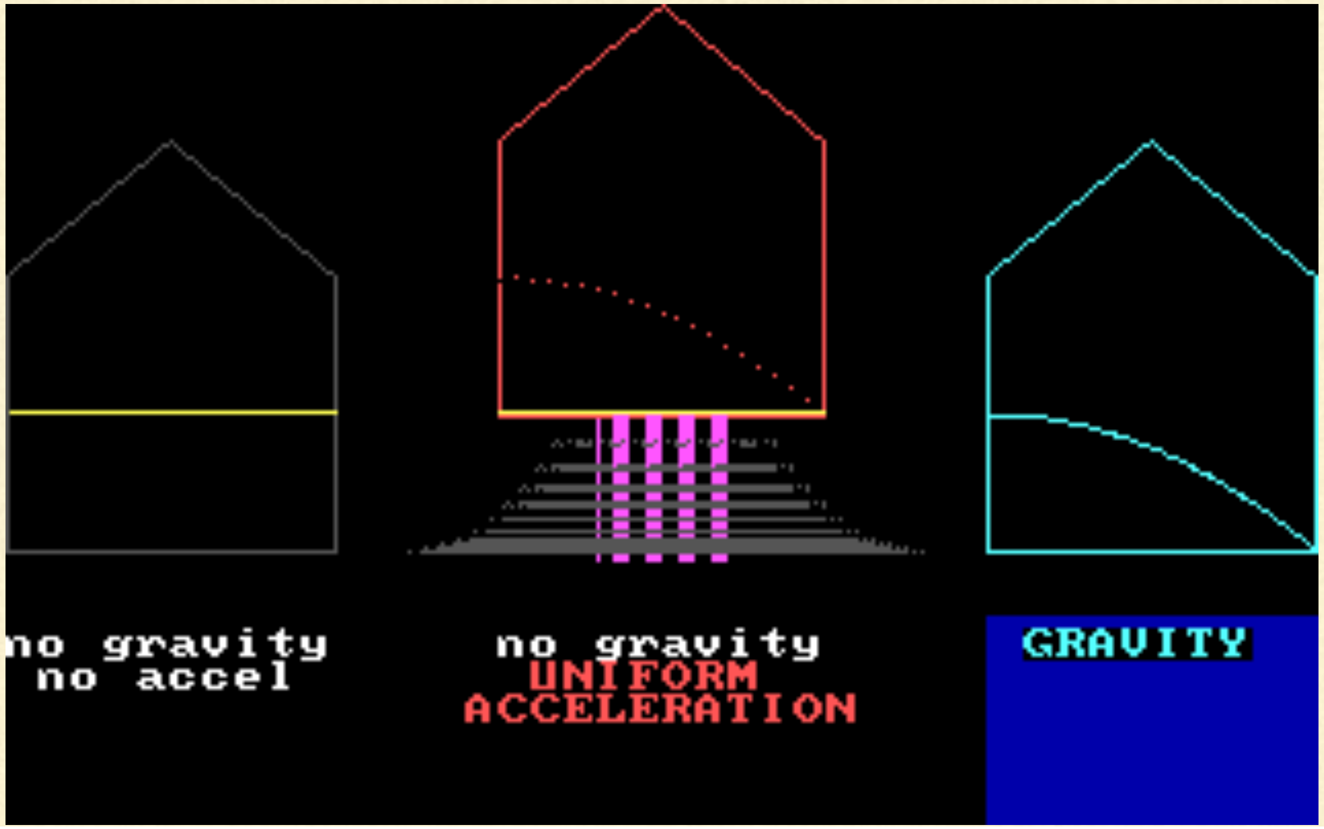
Principio de covariancia general:

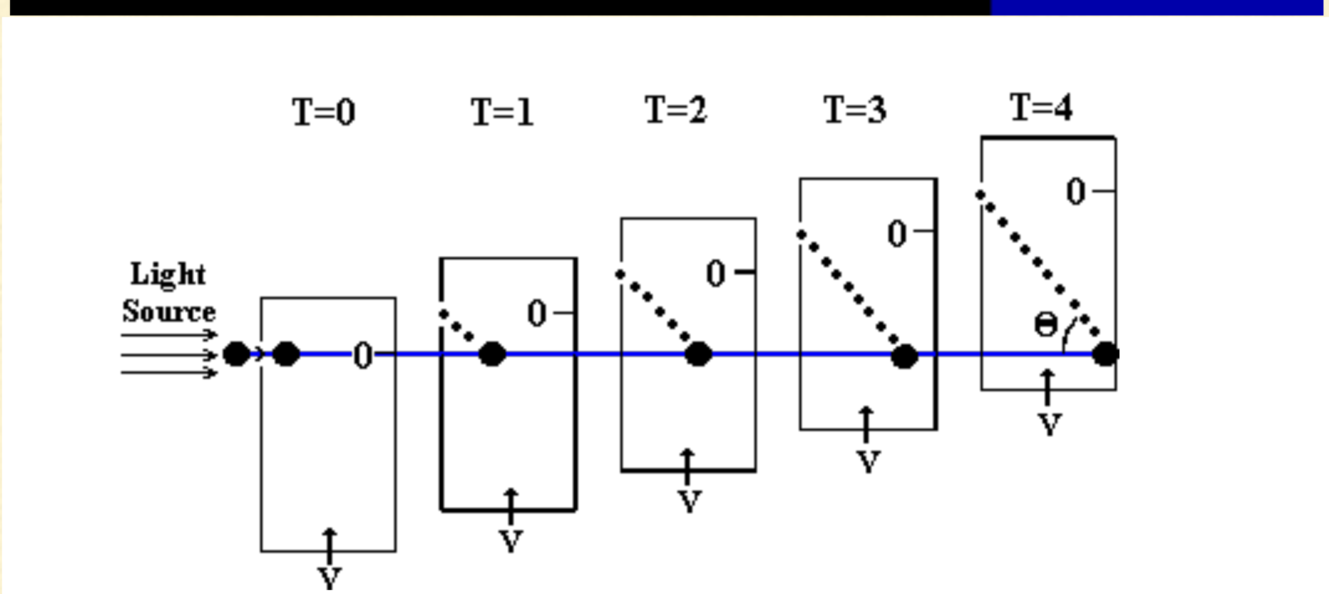
Las leyes de la física deben ser representadas por ecuaciones que no dependan en su forma del sistema de coordenadas utilizado para representar al sistema de referencia.

En otras palabras: las ecuaciones que representan las leyes físicas deben ser covariantes bajo transformaciones generales de coordenadas.

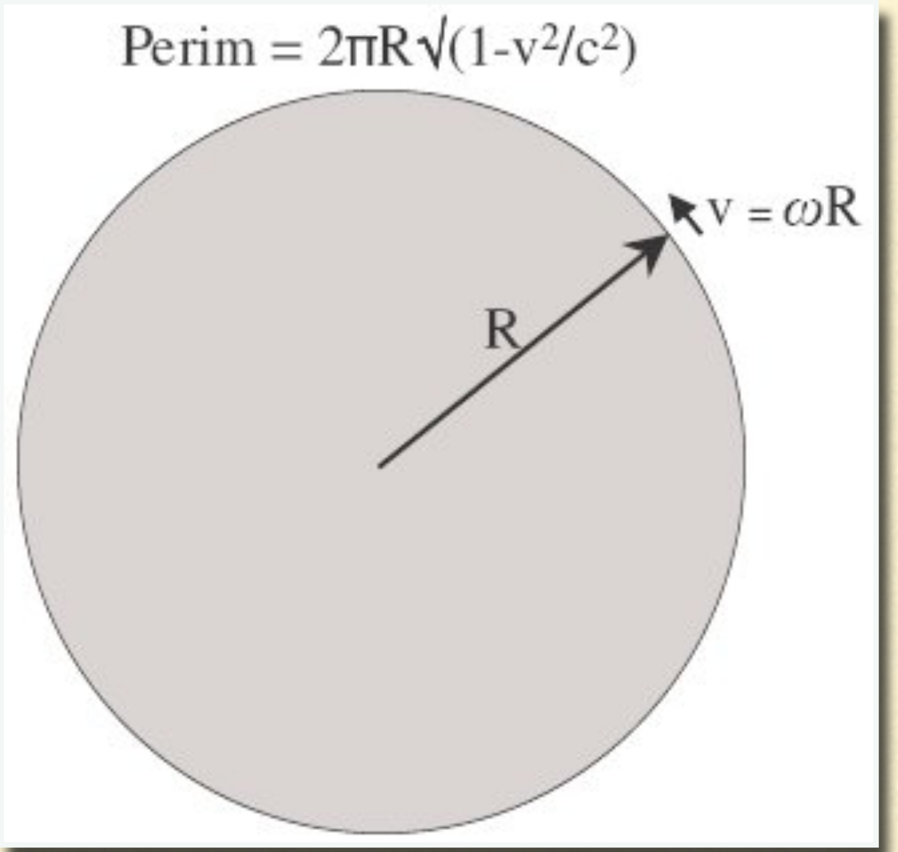
¿Es posible entonces describir la gravitación por medio de una teoría de campo? ¿Cómo representar ese campo?

En 1911 Einstein se muda a Praga y allí, en la Universidad Alemana, piensa intensamente en el problema. Descubre, usando el Principio de Equivalencia, que la geometría del espacio no puede ser euclídea en presencia de un campo gravitacional.



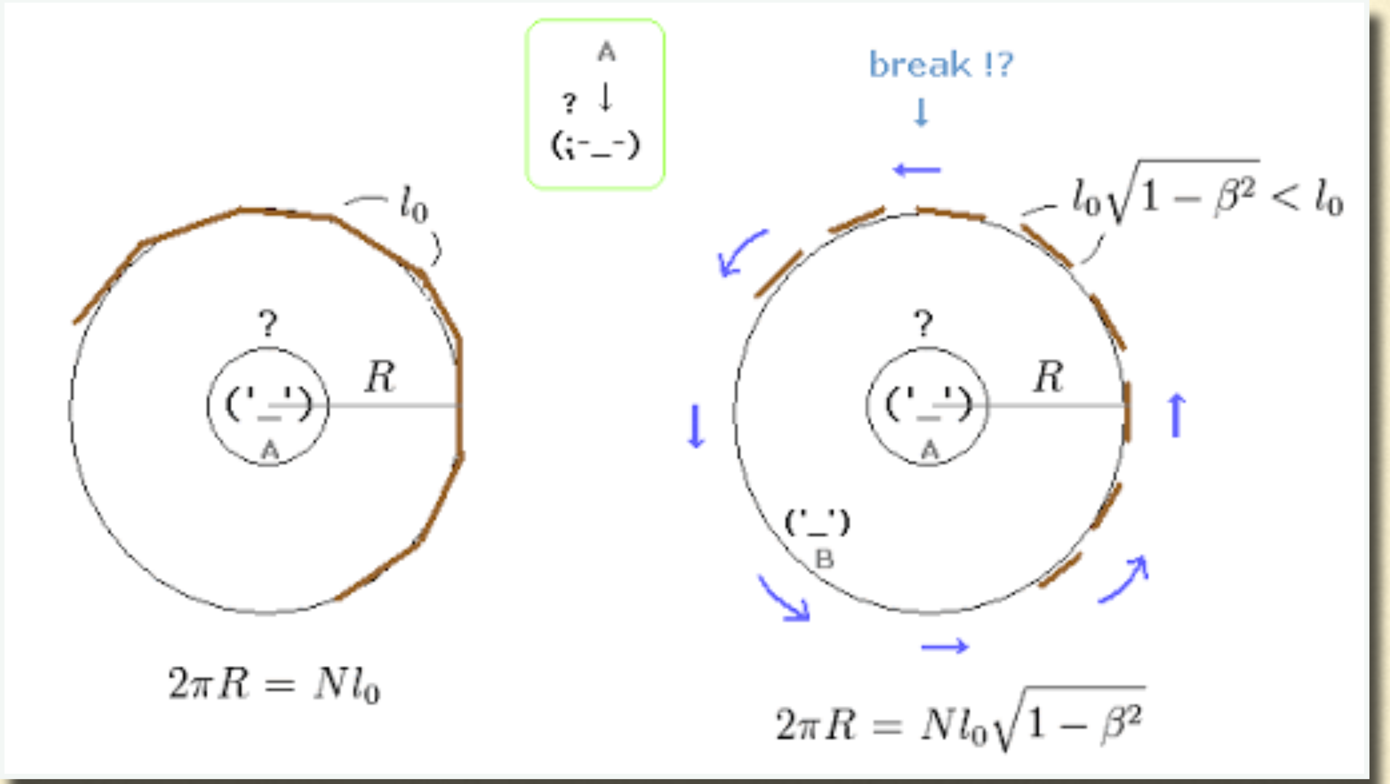


¡La gravedad curva la trayectoria de los rayos de luz!



Disco de Ehrenfest

$$\frac{\text{circumference}}{\text{diameter}} = \frac{2\pi R\sqrt{1-(\omega R)^2/c^2}}{2R} = \pi\sqrt{1-(\omega R)^2/c^2}.$$



La circunferencia de un disco giratorio debe contraerse, pero no el radio, ya que el radio es perpendicular a la dirección del movimiento.

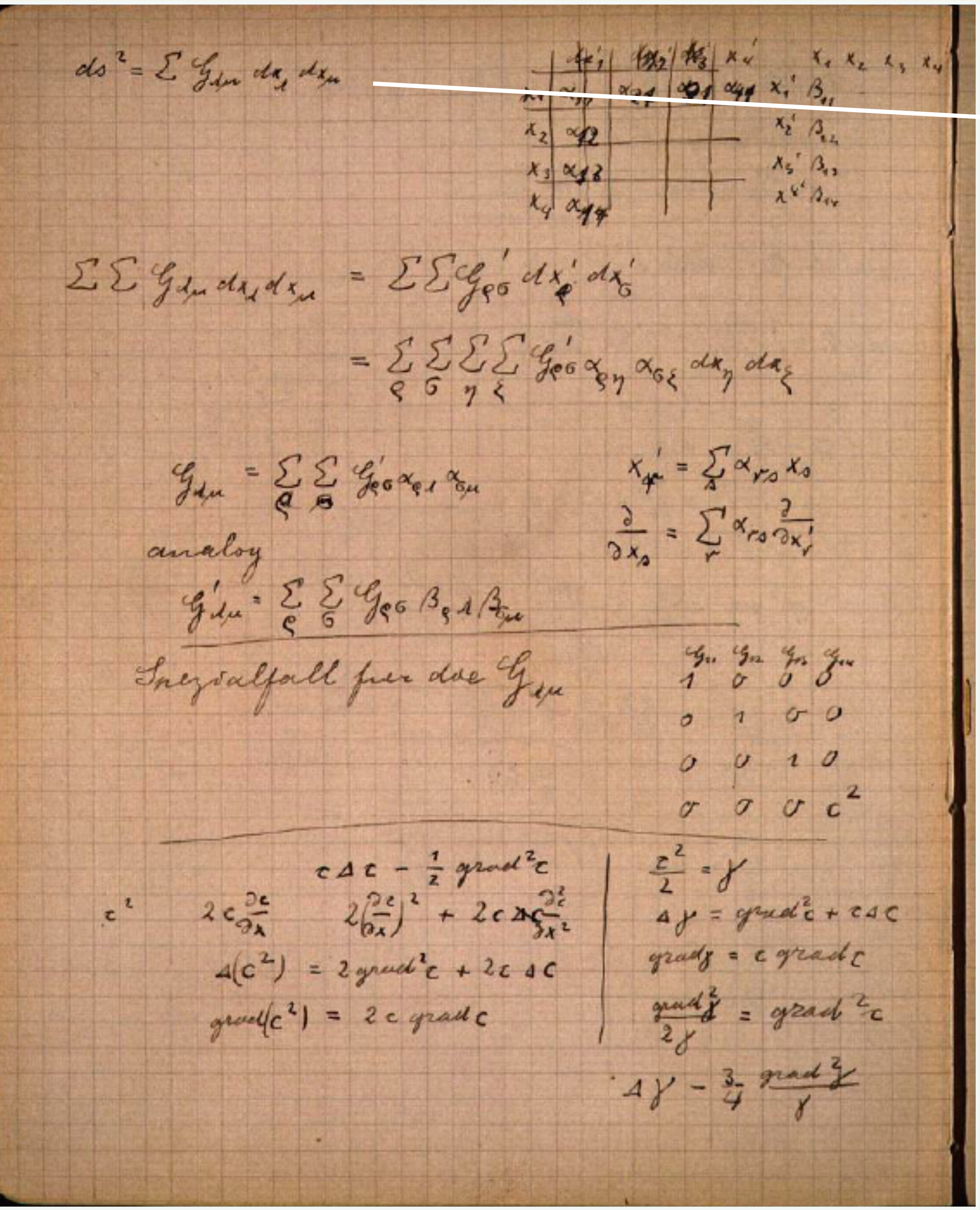
La geometría no puede ser euclídea

El modelo de Lorentz de la teoría del campo

La ecuación de campo: fuente determina campo

- Operador diferencial (CAMPO) = FUENTE
- Representación del CAMPO = tensor métrico
- Representación de la FUENTE = tensor de energía-momento

Problema:
¿Cuál es el OPERADOR DIFERENCIAL ?



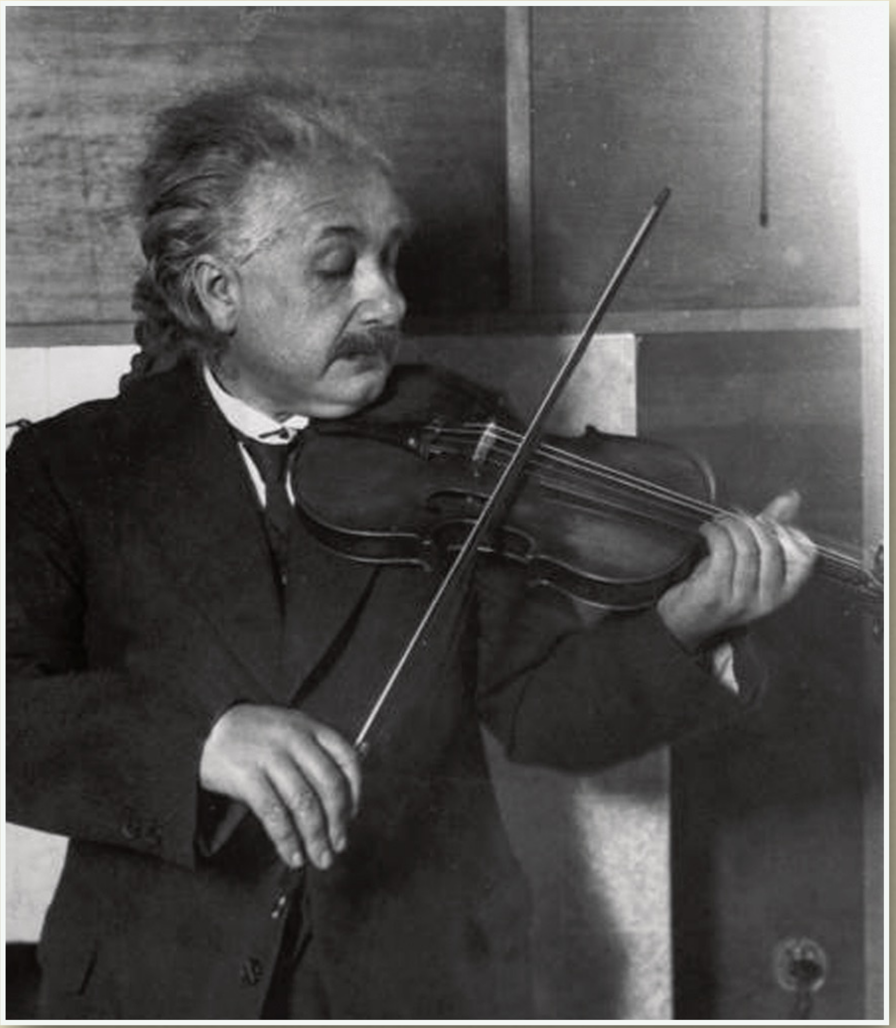
$$ds^2 = g_{ab}\, dx^a\, dx^b$$

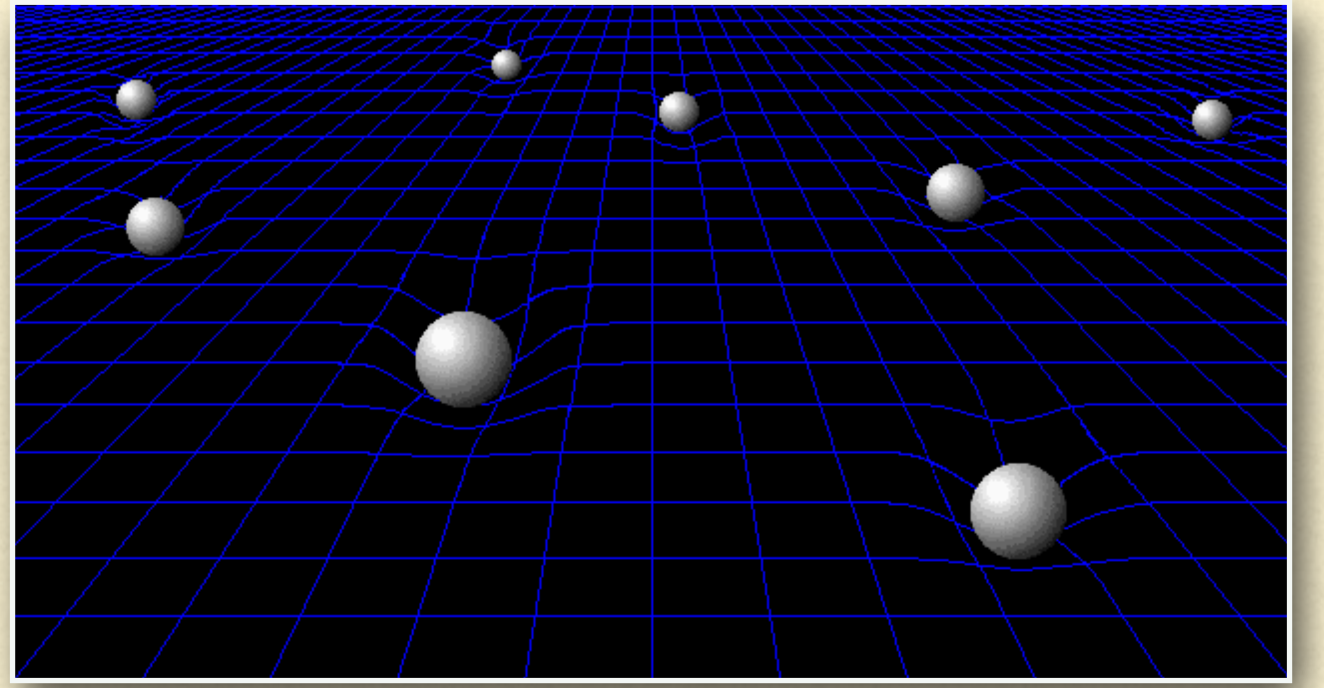
$$F(g_{ab}) = k\, T_{ab}$$

Marcel Grossmann (1878-1936)

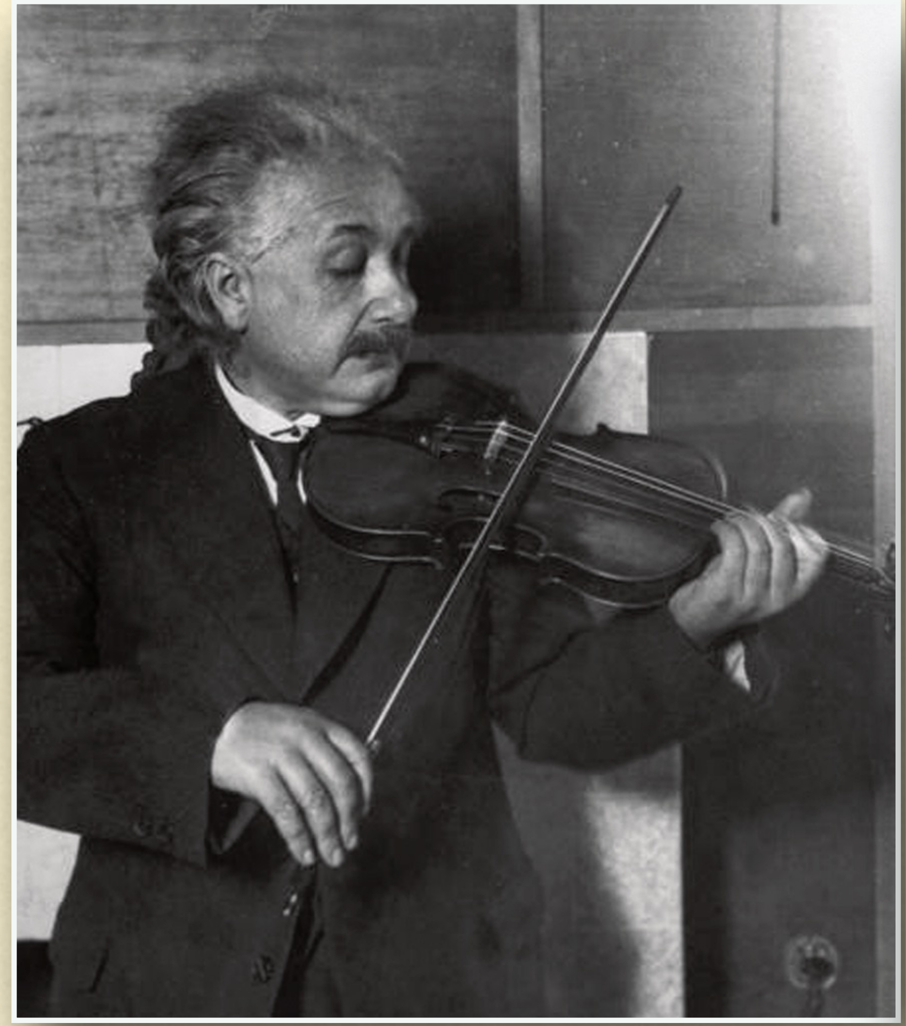
Albert Einstein,
Zurich Notebook (1912/13), p. 39L.

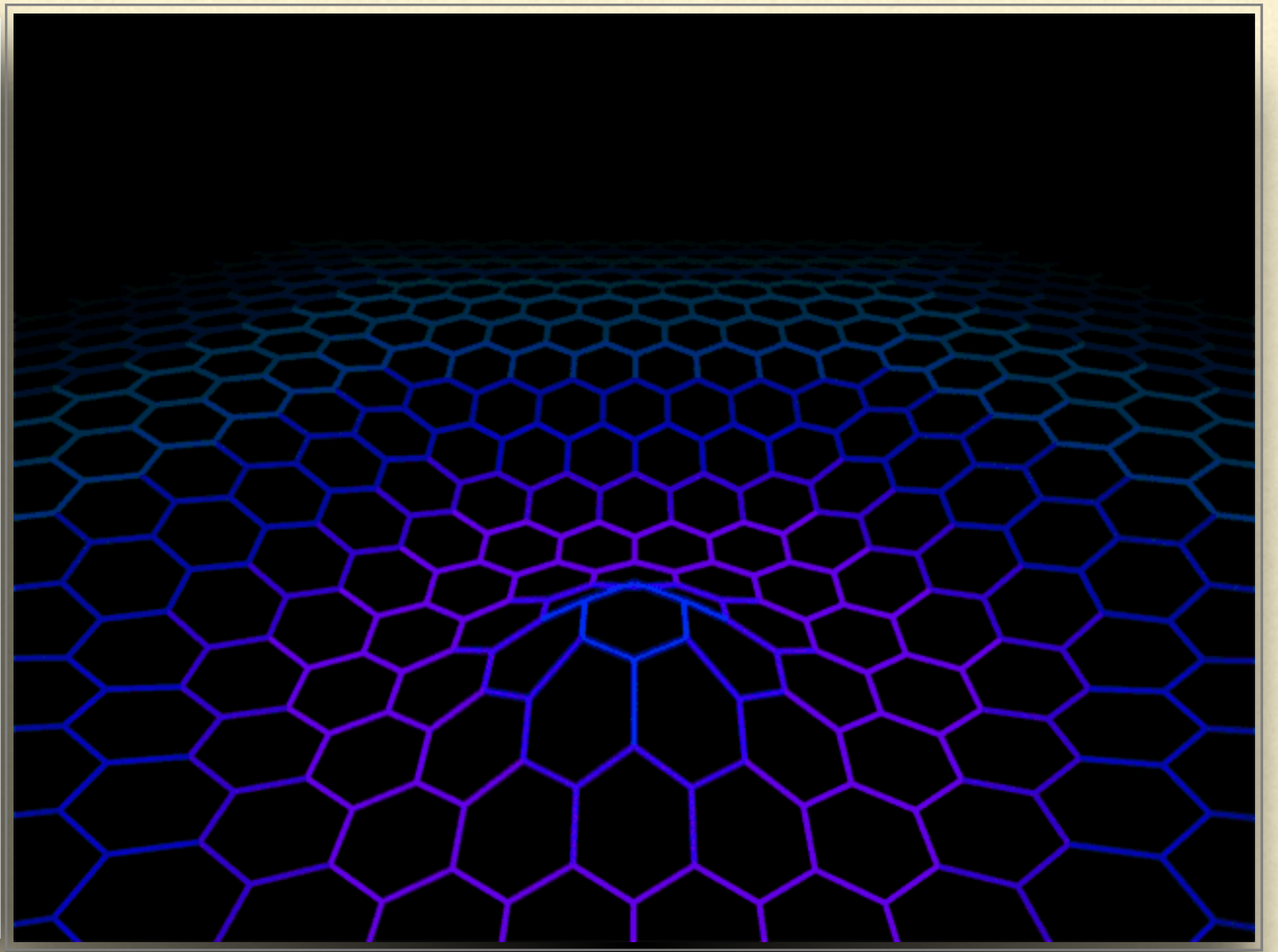
Einstein quiere representar la gravitación por los 10 coeficientes independientes del tensor métrico del espacio-tiempo. Estos deberían ser determinados por la materia del universo, de acuerdo a las ideas de Mach…

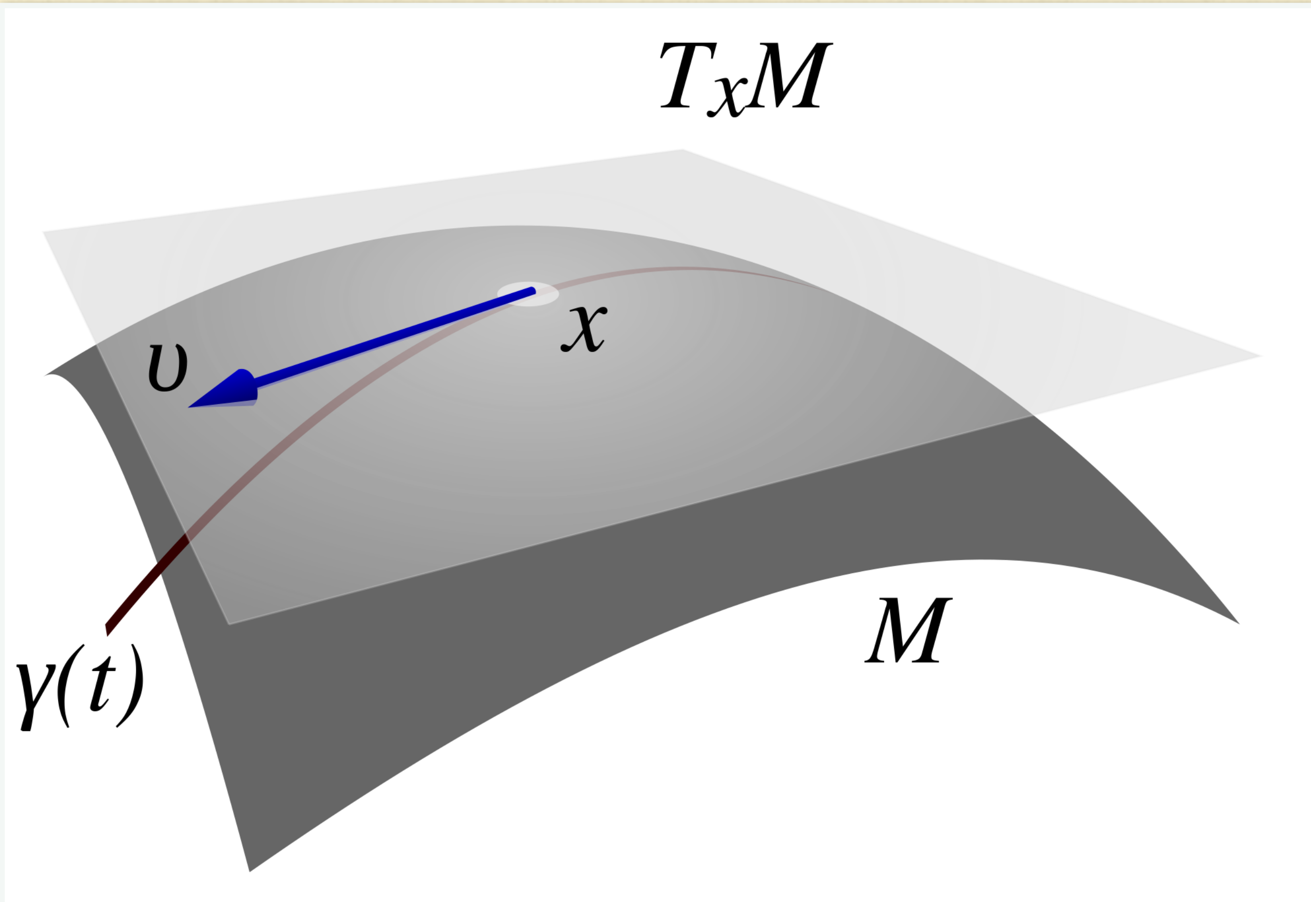




Einstein quiere representar la gravitación por los 10 coeficientes independientes del tensor métrico del espacio-tiempo. Estos deberían ser determinados por la materia del universo, de acuerdo a las ideas de Mach…







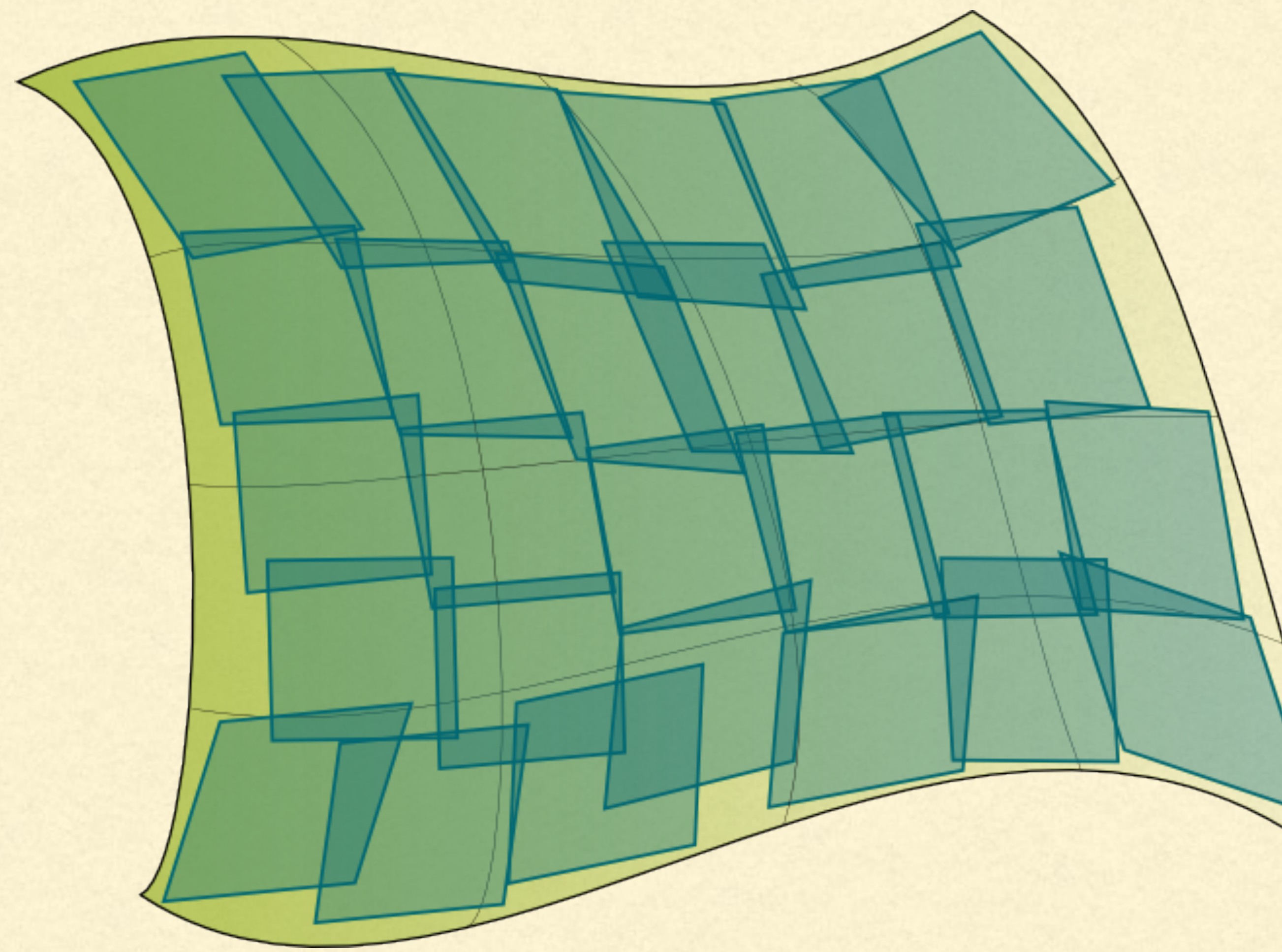
$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right)$$

$$\Gamma^i_{\ kl} = g^{ij}\Gamma_{jkl}$$

$$R^i_{\ jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{\ jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{\ jk}}{\partial x^l} + \Gamma^m_{\ jl}\Gamma^i_{\ mk} - \Gamma^m_{\ jk}\Gamma^i_{\ ml}$$

Rakuten

13



El espacio-tiempo es pseudo-Riemanniano

Contractions

Contracting the Riemann tensor gives firstly the **Ricci tensor**

$$R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta} = R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}$$

Contracting again gives the **Ricci scalar**

$$g^{\gamma\delta} R_{\gamma\delta} = R^{\gamma}{}_{\gamma} = R$$

We also have the **Kretschmann scalar**, which is *the* measure of the underlying curvature

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = K$$

If this is not zero, the spacetime is not flat! For the Schwarzschild metric, we have

$$K = \frac{48 m^2}{r^6}$$

Lecture Notes 5 http://www.physics.usyd.edu.au/~gfl/Lecture

Geodésicas

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0$$

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

Geodesic Equation of Motion

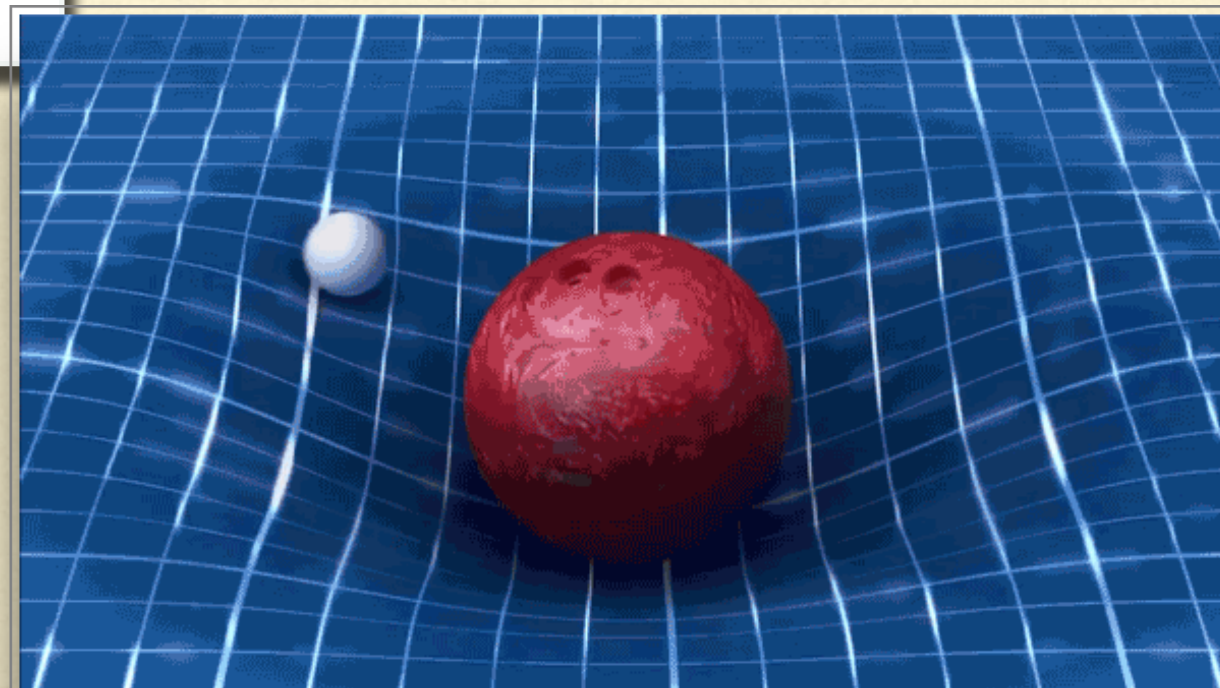
Curvature of trajectory

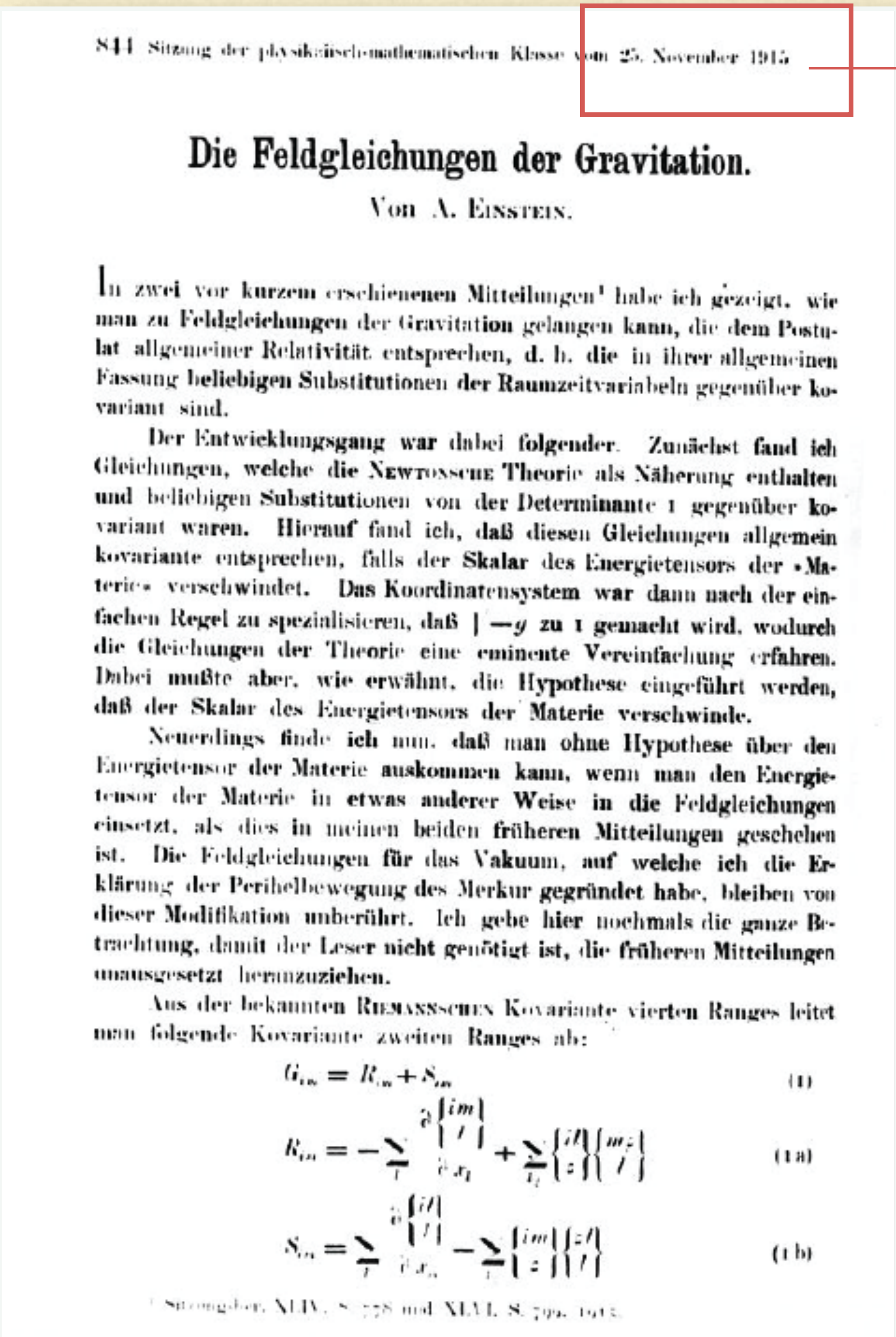
Generalized gradient

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0$$

Christoffel symbol

Path length element





844 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1915

Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen[1] habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariabeln gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die Newtonsche Theorie als Näherung enthalten und beliebigen Substitutionen von der Determinante 1 gegenüber kovariant waren. Hierauf fand ich, daß diesen Gleichungen allgemein kovariante entsprechen, falls der Skalar des Energietensors der »Materie« verschwindet. Das Koordinatensystem war dann nach der einfachen Regel zu spezialisieren, daß $\sqrt{-g}$ zu 1 gemacht wird, wodurch die Gleichungen der Theorie eine eminente Vereinfachung erfahren. Dabei mußte aber, wie erwähnt, die Hypothese eingeführt werden, daß der Skalar des Energietensors der Materie verschwinde.

Neuerdings finde ich nun, daß man ohne Hypothese über den Energietensor der Materie auskommen kann, wenn man den Energietensor der Materie in etwas anderer Weise in die Feldgleichungen einsetzt, als dies in meinen beiden früheren Mitteilungen geschehen ist. Die Feldgleichungen für das Vakuum, auf welche ich die Erklärung der Perihelbewegung des Merkur gegründet habe, bleiben von dieser Modifikation unberührt. Ich gebe hier nochmals die ganze Betrachtung, damit der Leser nicht genötigt ist, die früheren Mitteilungen unausgesetzt heranzuziehen.

Aus der bekannten Riemannschen Kovariante vierten Ranges leitet man folgende Kovariante zweiten Ranges ab:

$$G_{im} = R_{im} + S_{im} \tag{1}$$

$$R_{im} = -\sum_{l} \frac{\partial \begin{Bmatrix} im \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_l} + \sum_{l\rho} \begin{Bmatrix} il \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} m\rho \\ l \end{Bmatrix} \tag{1a}$$

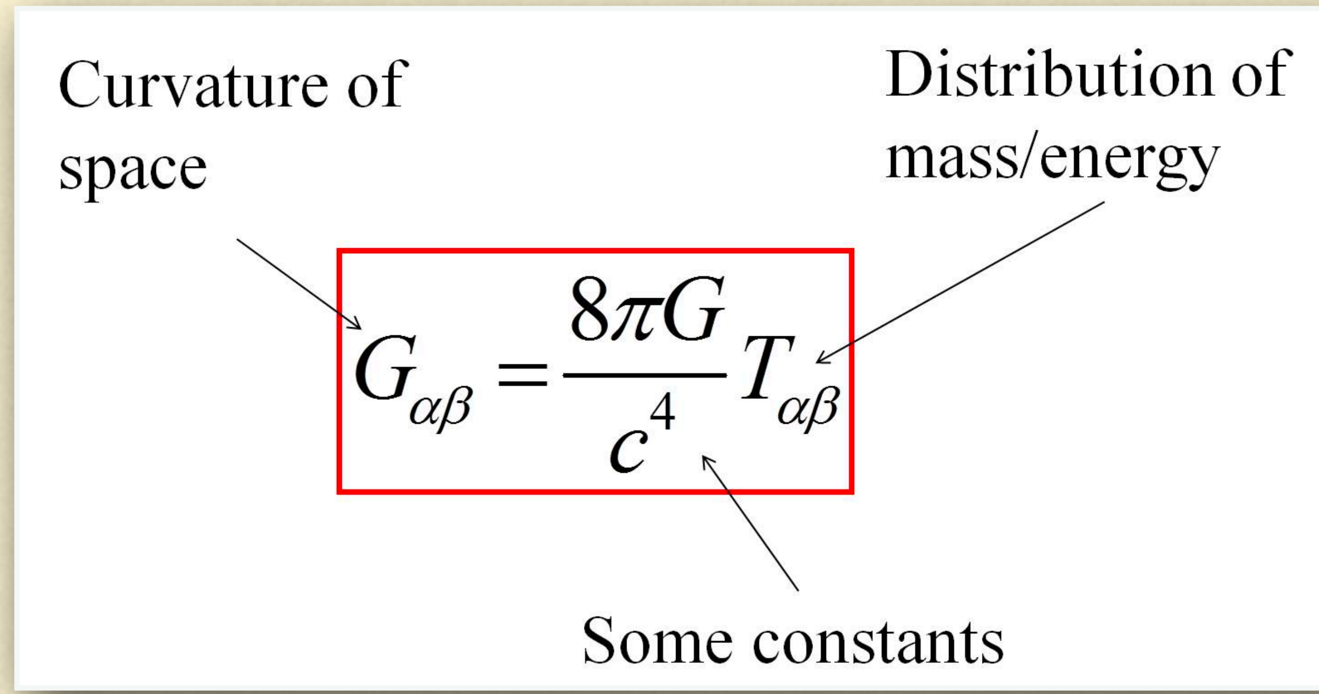
$$S_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \begin{Bmatrix} il \\ l \end{Bmatrix}}{\partial x_m} - \sum_{l} \begin{Bmatrix} im \\ \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho l \\ l \end{Bmatrix} \tag{1b}$$

[1] Sitzungsber. XLIV, S. 778 und XLVI, S. 799, 1915.

25 de noviembre de 1915

Título:

"Las Ecuaciones de Campo de la Gravitación"



Ecuaciones de Einstein-Maxwell:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{\mathrm{mat}} + T_{\mu\nu}^{\mathrm{EM}} \right),$$

donde Λ es la constante cosmológica, $R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ y $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ son el tensor y el escalar de Ricci, respectivamente, y $R_{\lambda\sigma\mu\nu}$ es el tensor de Riemann (o de curvatura). Este tensor de curvatura se anula si el espacio-tiempo es plano.

$$T_{\mu\nu}^{\mathrm{mat}} = (\rho + p)\, u_\mu u_\nu + p\, g_{\mu\nu},$$

donde ρ, p y u_μ son la densidad, la presión y la cuadri-velocidad, respectivamente.

$$T_{\mu\nu}^{\mathrm{EM}} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right).$$

En la ecuación anterior, $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$ donde A_μ es el cuadri-potencial.

La estructura causal del espacio-tiempo está determinada por la densidad de energía y momento.

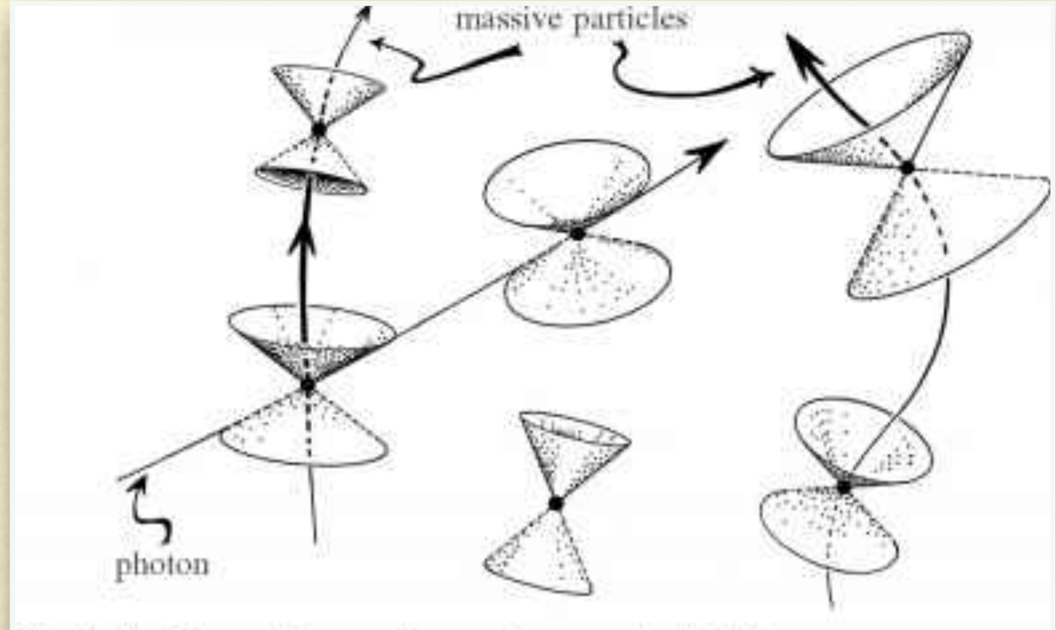
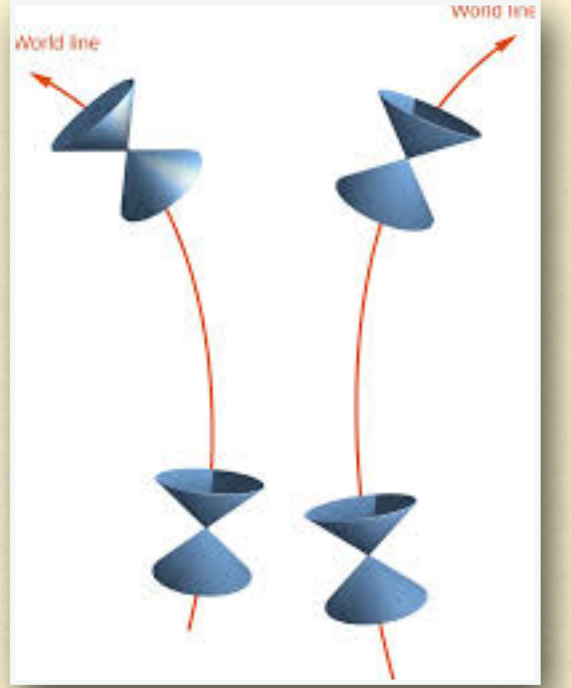
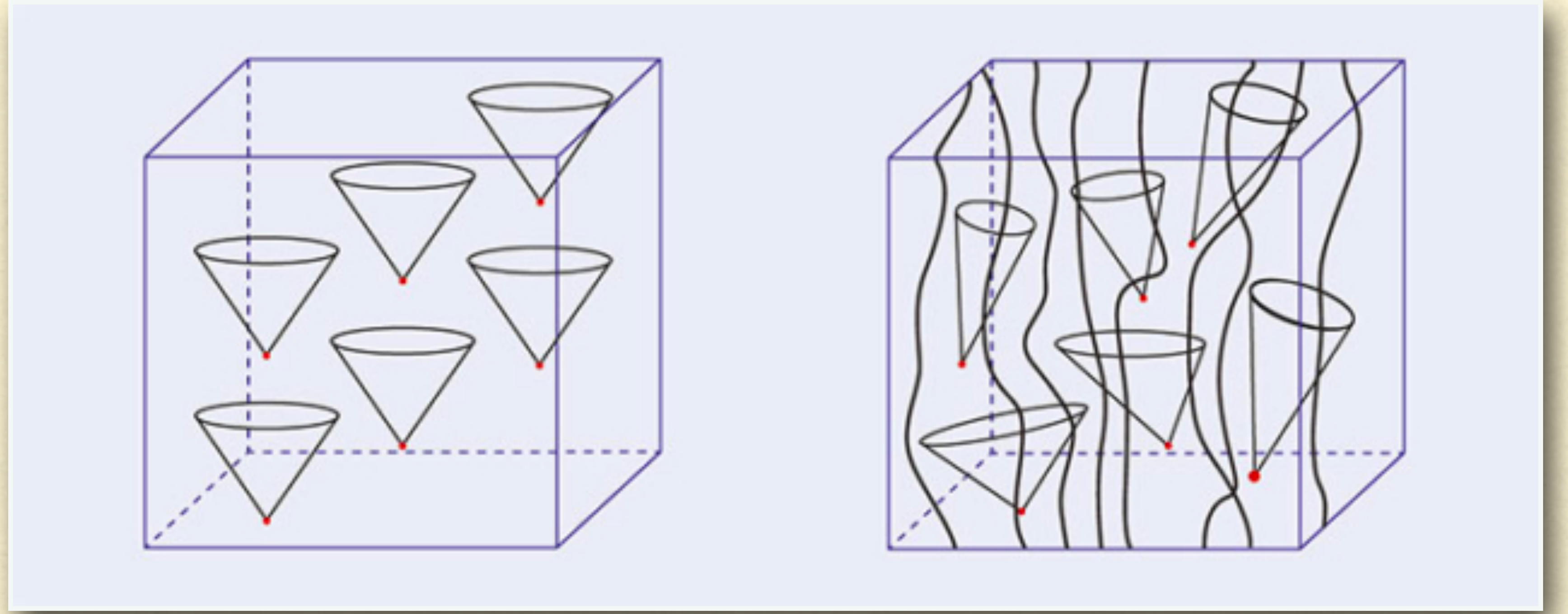
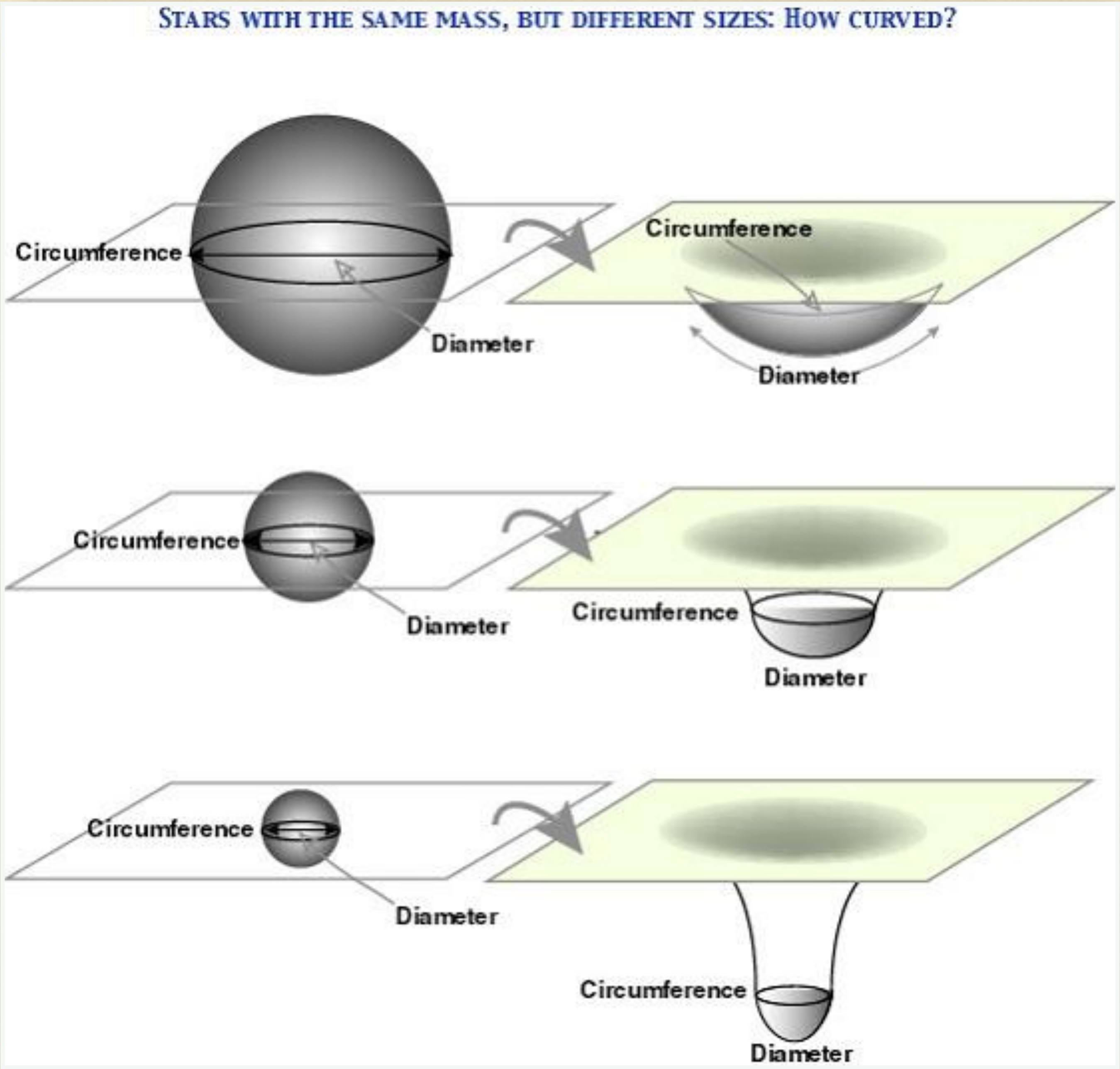


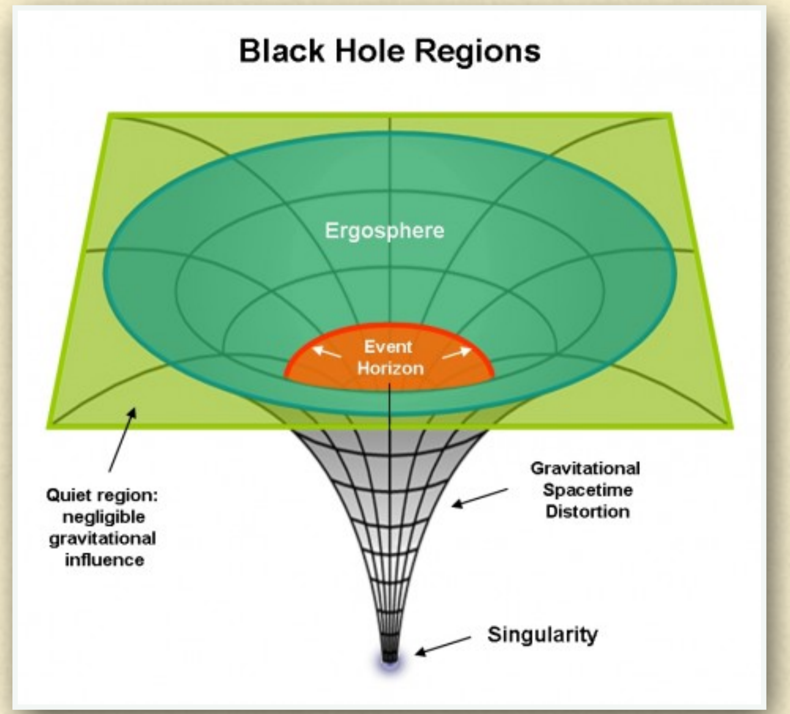
Fig. 2.14 Non-uniform null cones in general relativity.



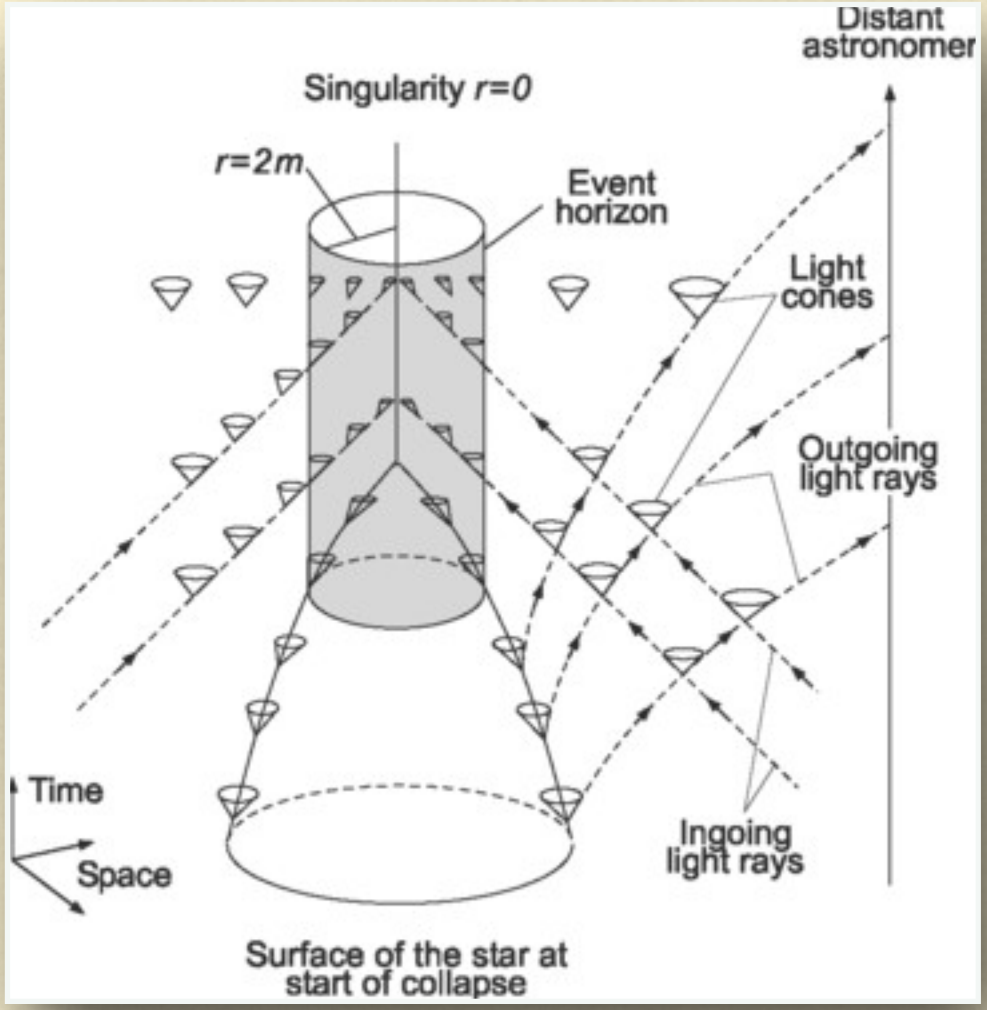


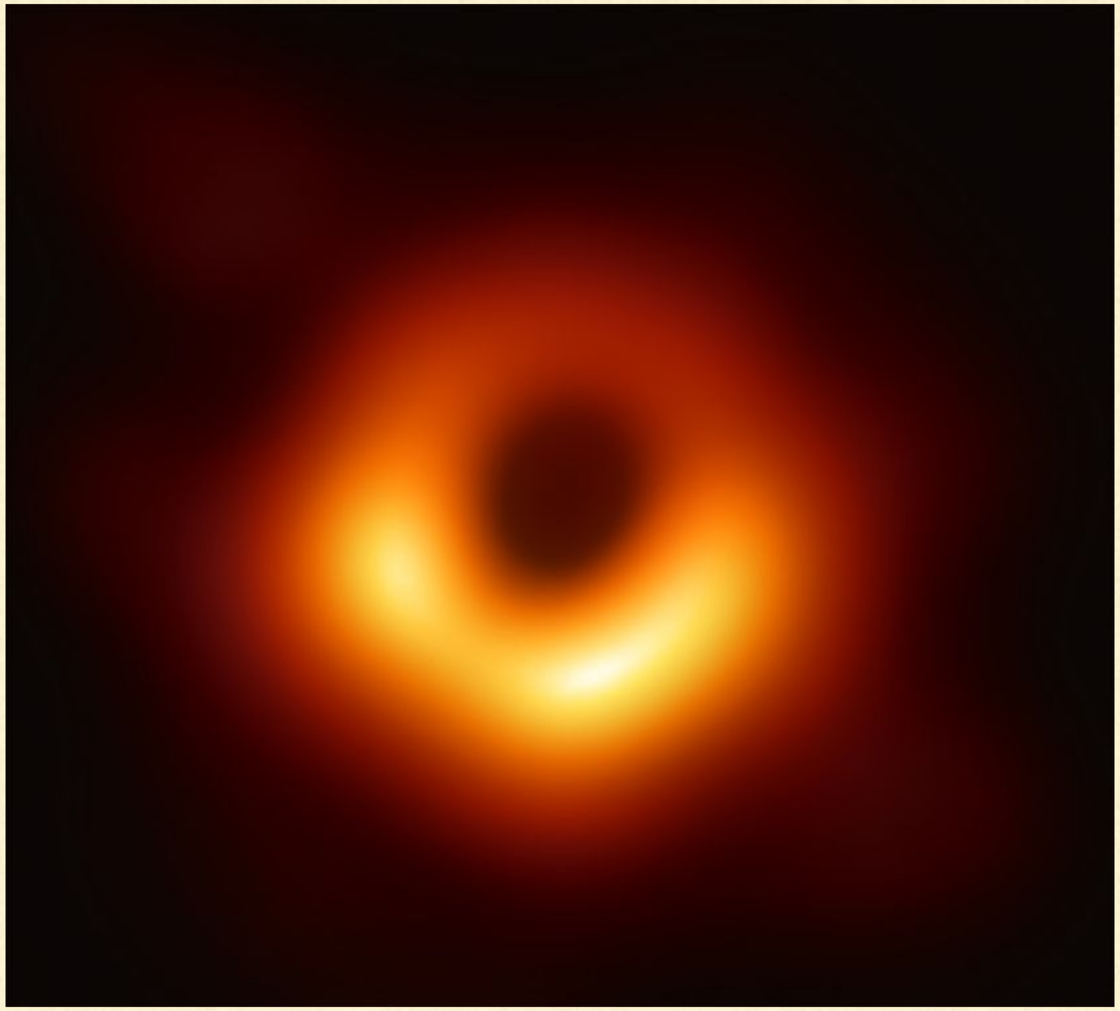
Objetos compactos





Agujeros negros



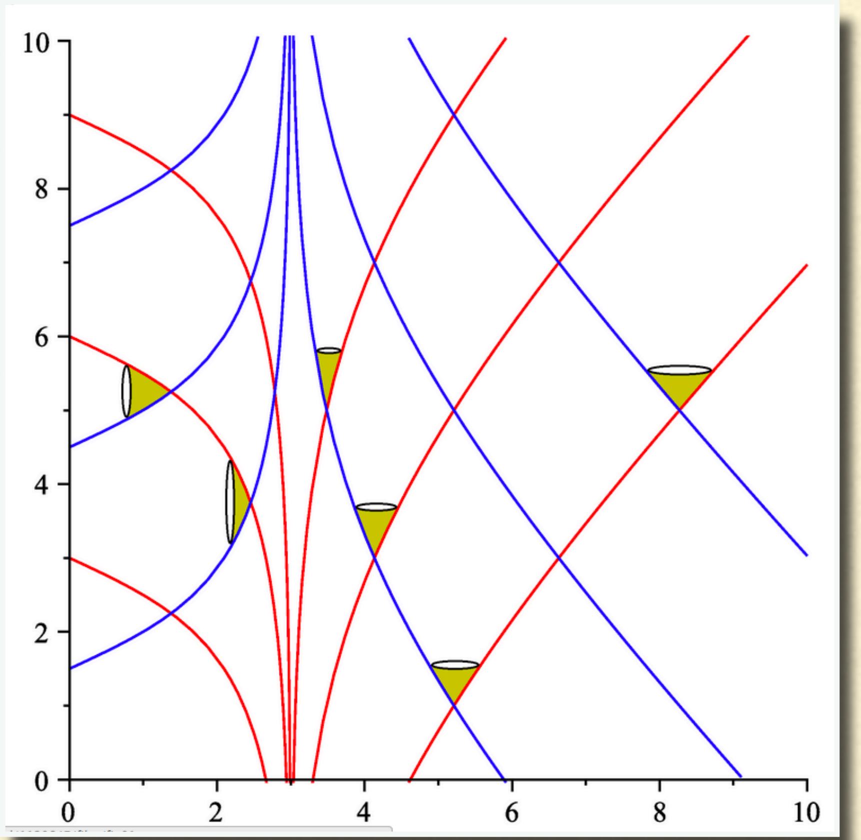


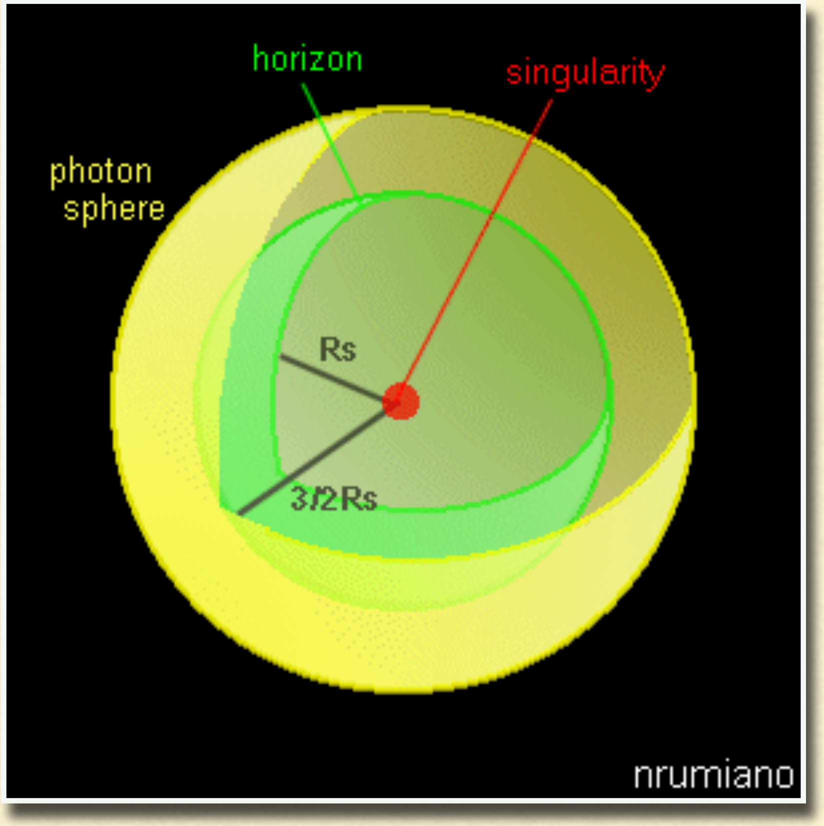
M87

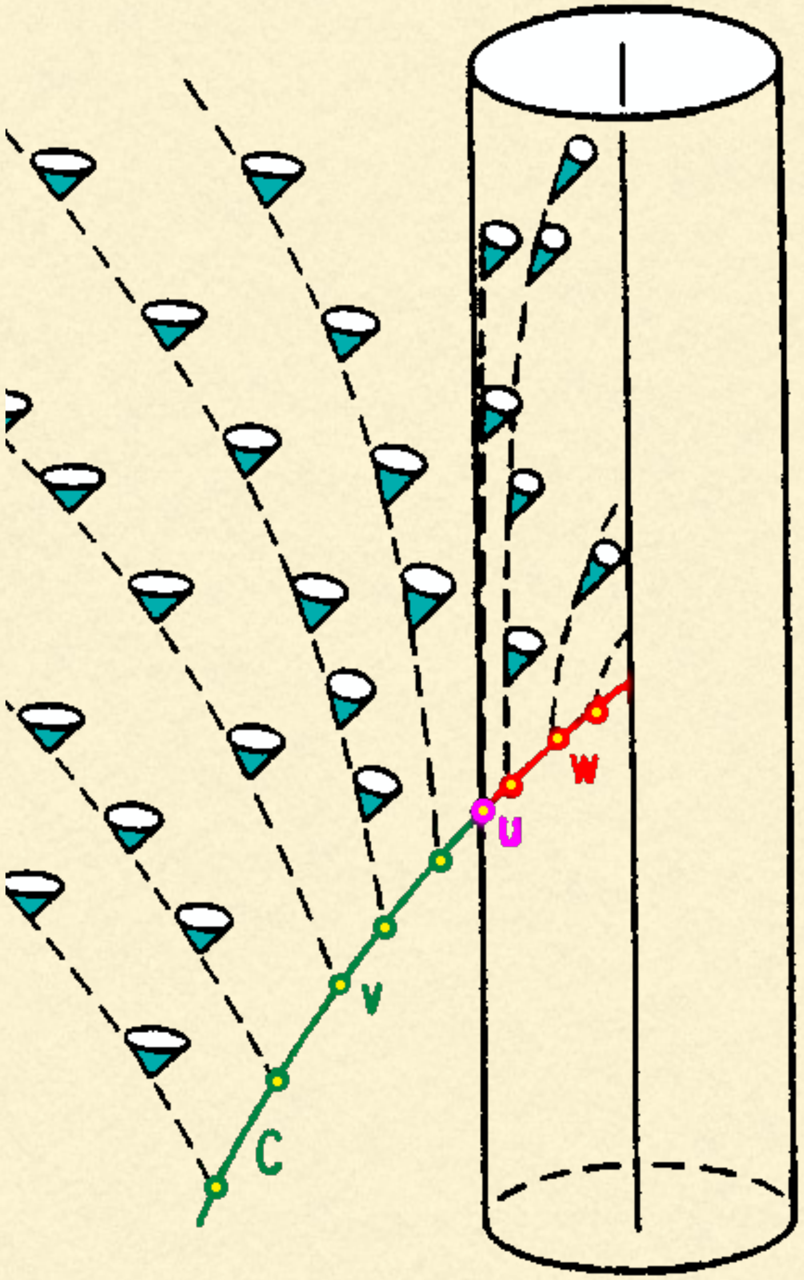
Agujero negro de Schwarzschild

Métrica de Schwarzschild: corresponde a un espacio tiempo determinado por una masa M que no rota y con carga neta nula. Viene dada en coordenadas esféricas (de Boyer-Lindquist) por:

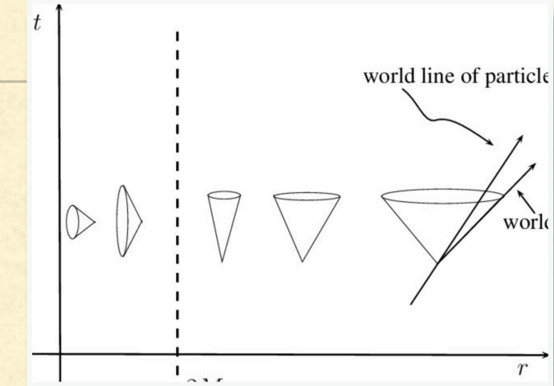
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$







Agujero negro de Schwarzschild



Schwarzschild's Solution to Einstein's Equations

Time Dilation

Radial Length Contraction

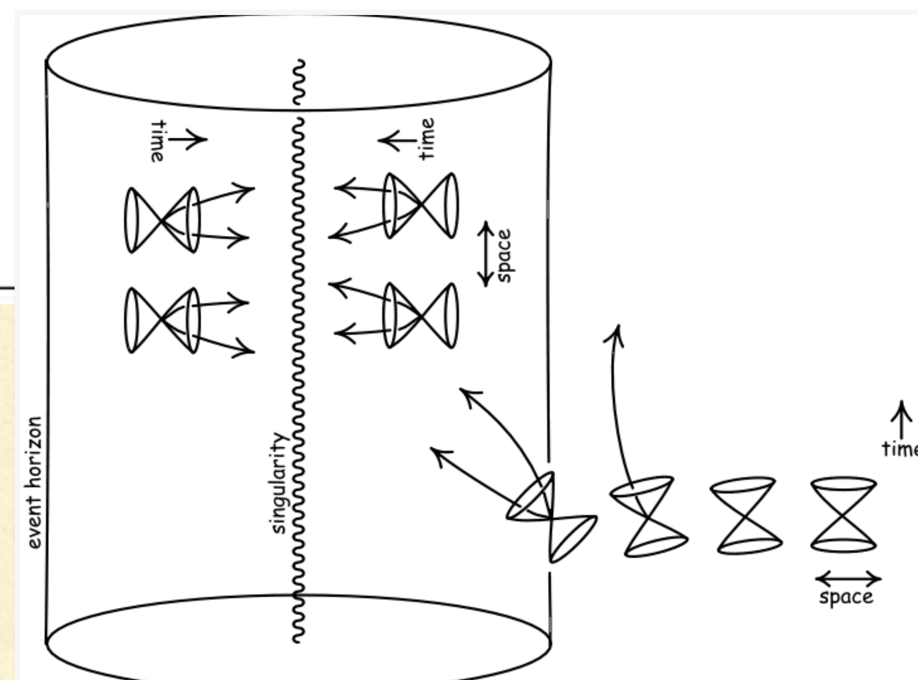
$$ds^2 = -\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{1}{\left(1-\frac{R_S}{r}\right)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Invariant Line Element

Schwarzschild Radius

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

$$\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2 = \frac{1}{\left(1-\frac{R_S}{r}\right)}dr^2$$



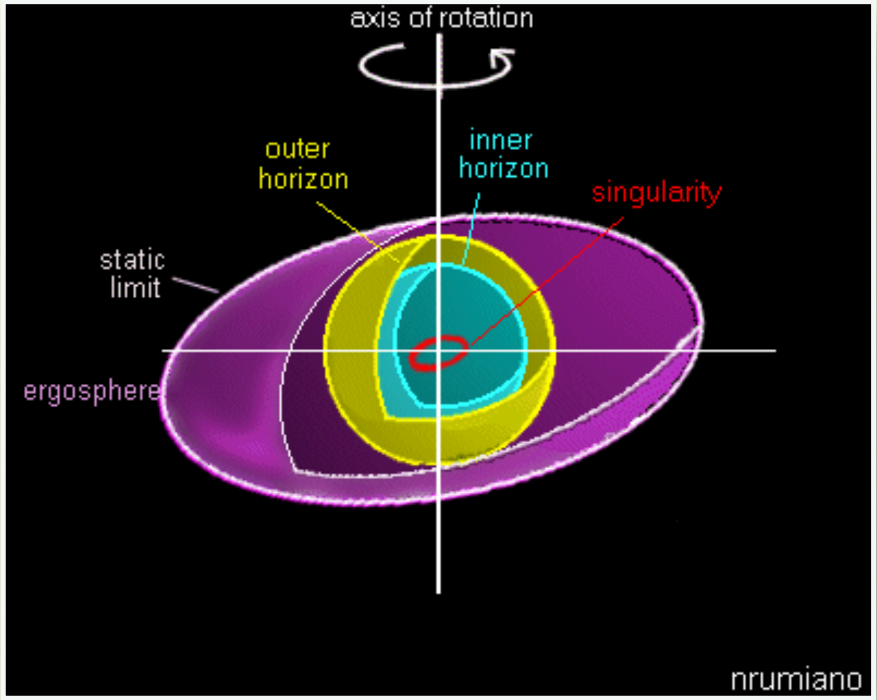
$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1-\frac{R_S}{r}\right)$$

Agujero negro de Kerr

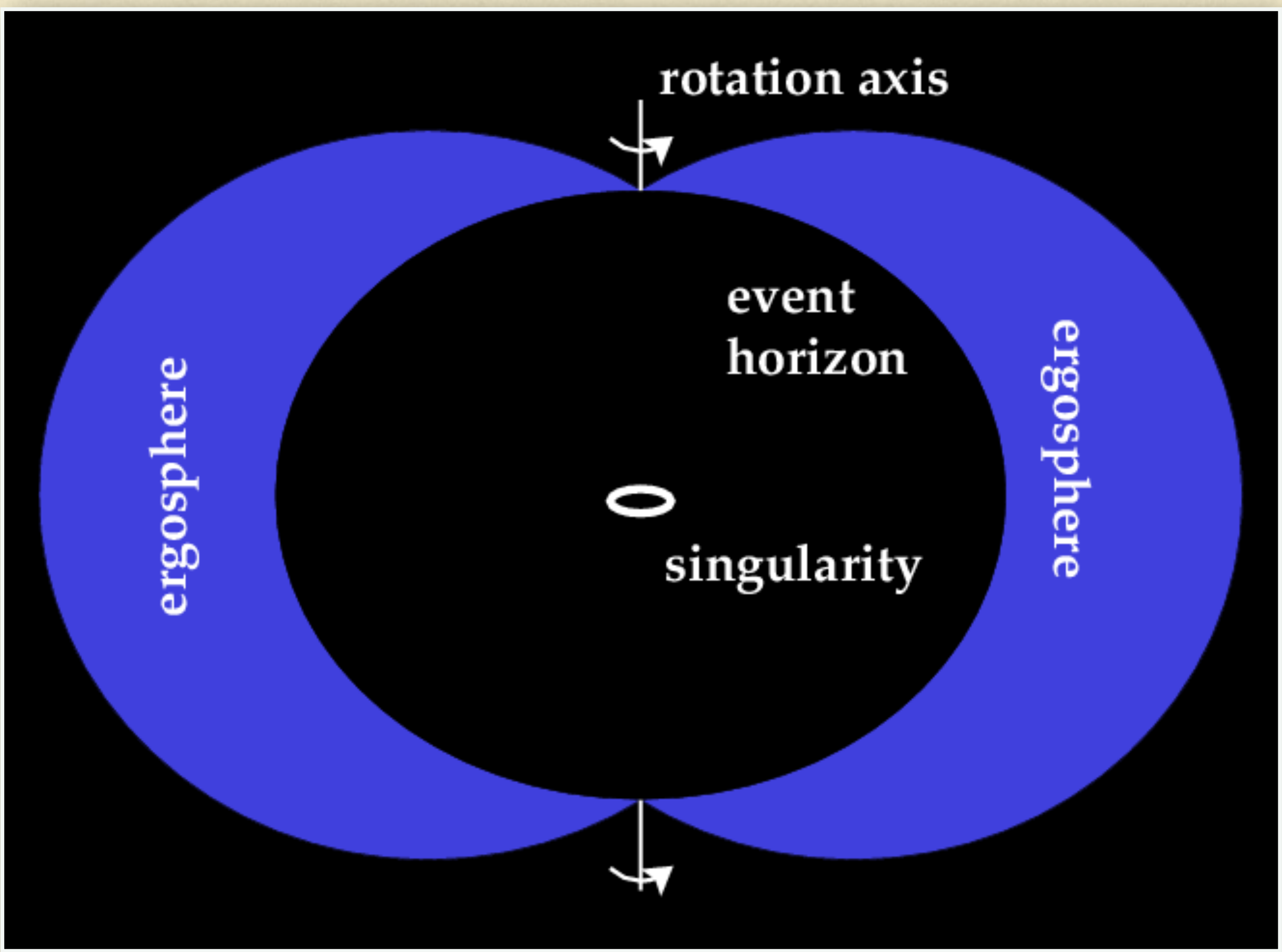
Métrica de Kerr: corresponde a un espacio tiempo determinado por una masa M en rotación y con carga neta nula.

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi - g_{\phi\phi}d\phi^2 - \Sigma\Delta^{-1}dr^2 - \Sigma d\theta^2 \\ g_{tt} &= (c^2 - 2GMr\Sigma^{-1}) \\ g_{t\phi} &= 2GMac^{-2}\Sigma^{-1}r\sin^2\theta \\ g_{\phi\phi} &= [(r^2 + a^2c^{-2})^2 - a^2c^{-2}\Delta\sin^2\theta]\Sigma^{-1}\sin^2\theta \\ \Sigma &\equiv r^2 + a^2c^{-2}\cos^2\theta \\ \Delta &\equiv r^2 - 2GMc^{-2}r + a^2c^{-2}. \end{aligned}$$

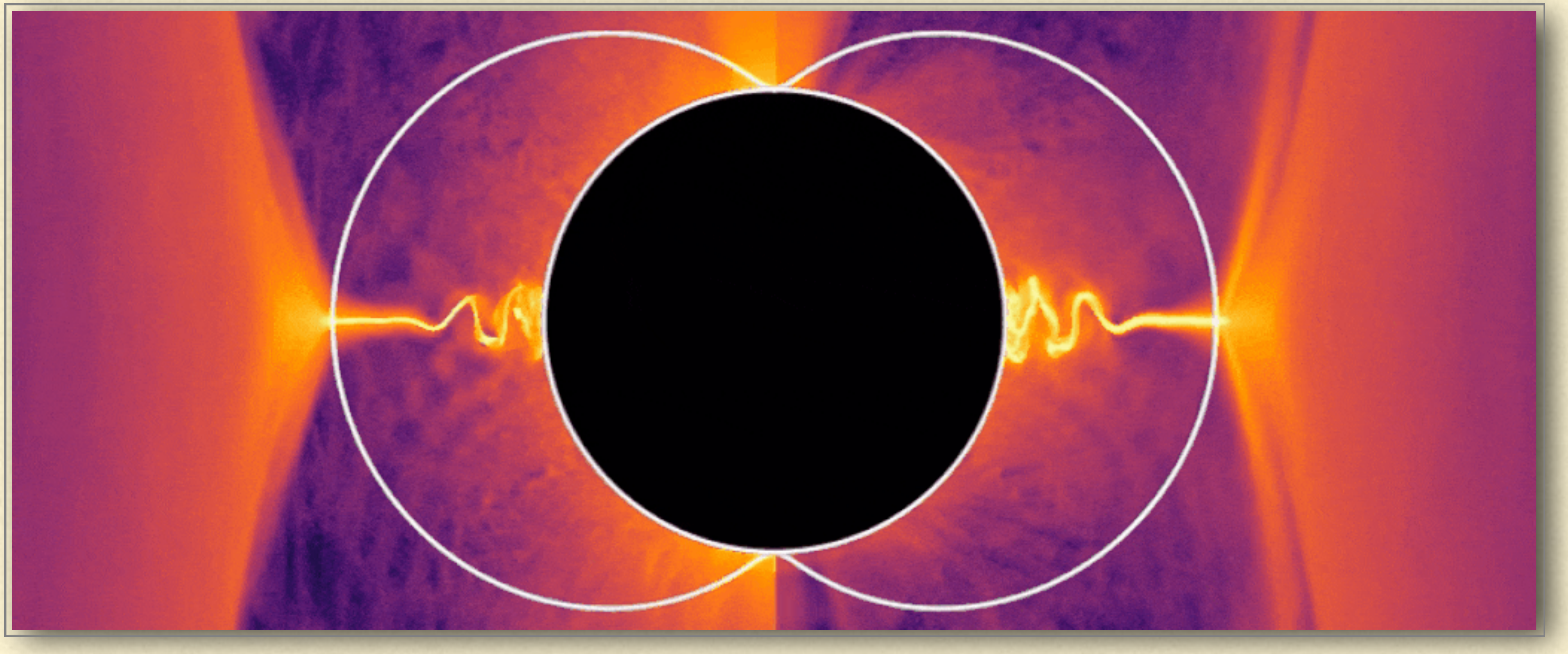
Todos los agujeros negros astrofísicos se piensa son descriptos por la métrica de Kerr.

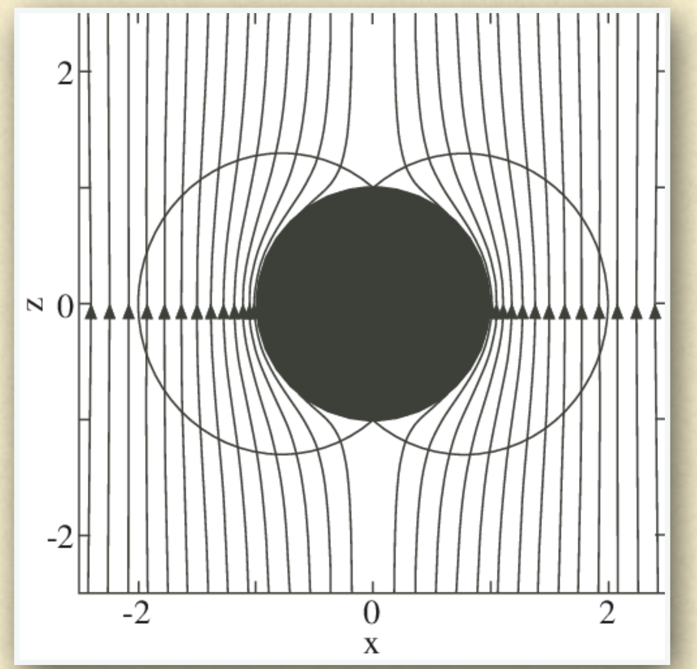


Agujero negro de Kerr

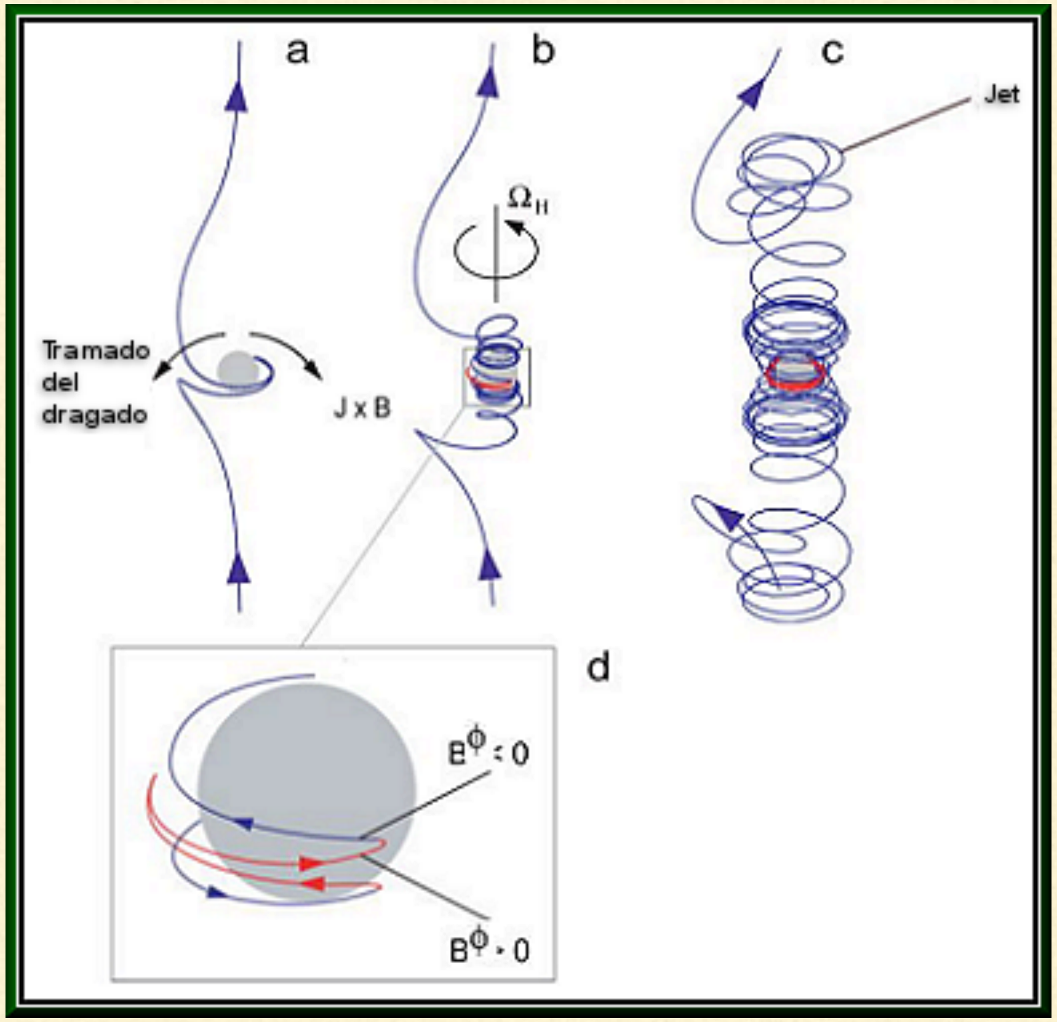


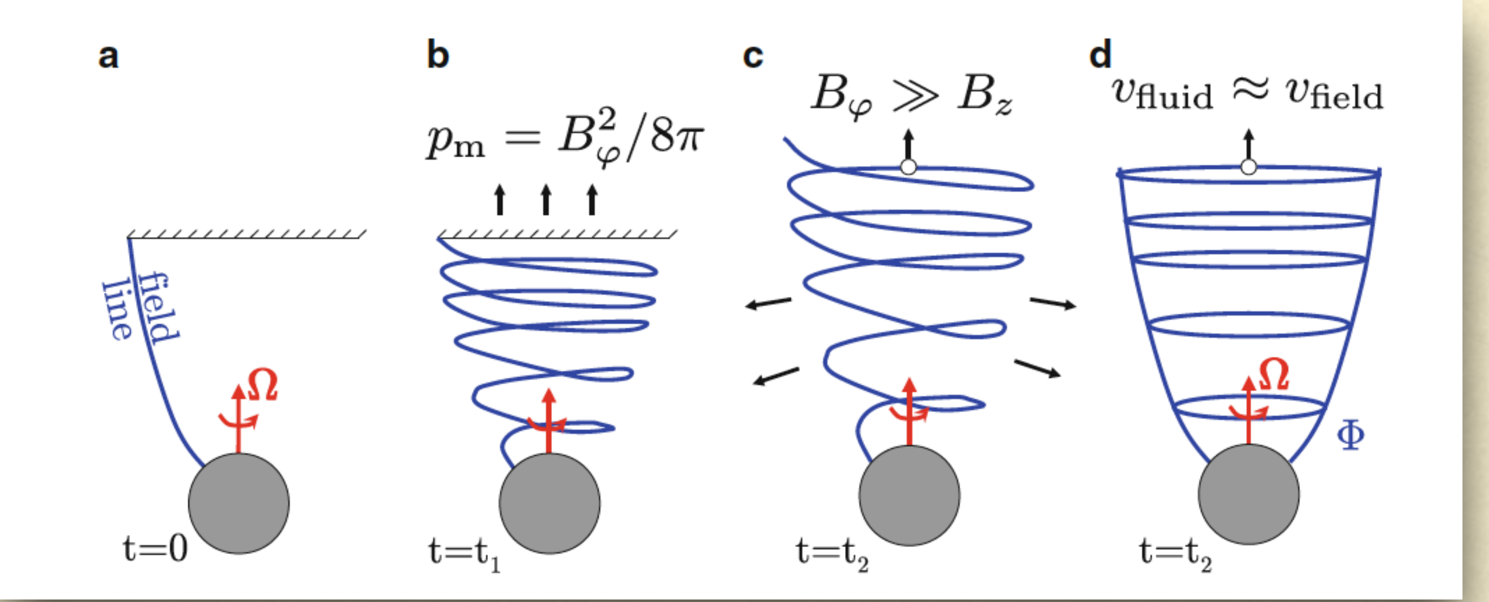
Agujero negro de Kerr





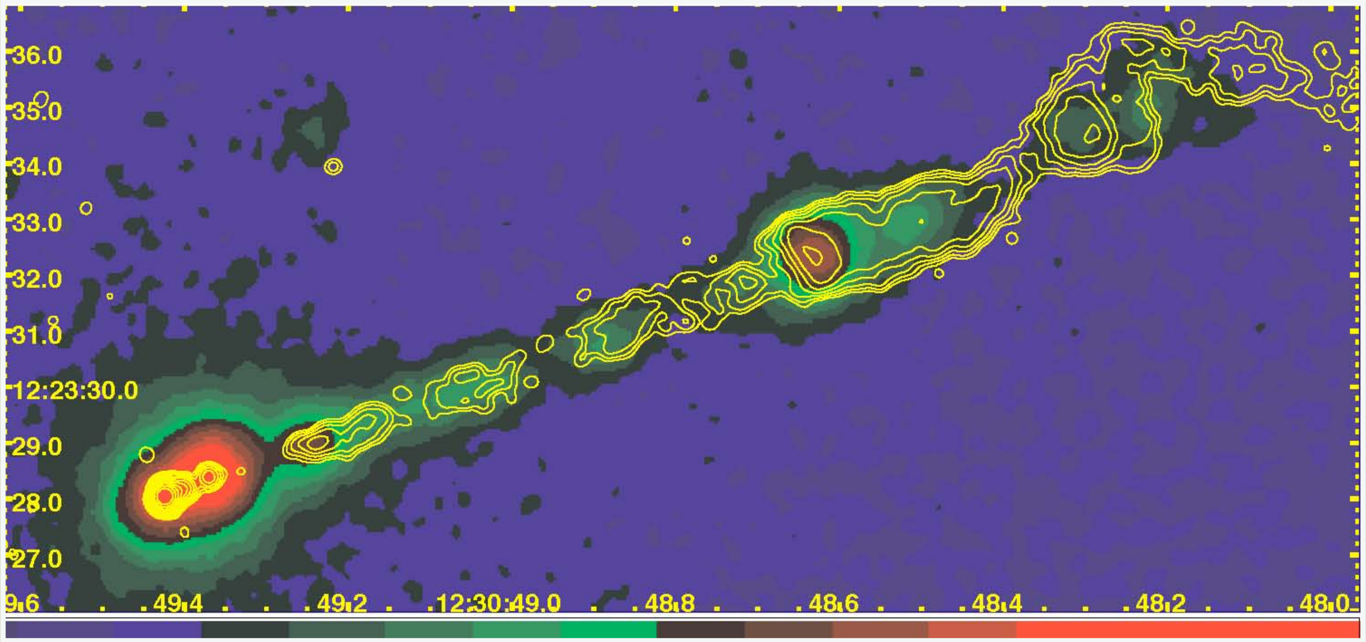
Efectos astrofísicos a través de la ergósfera.

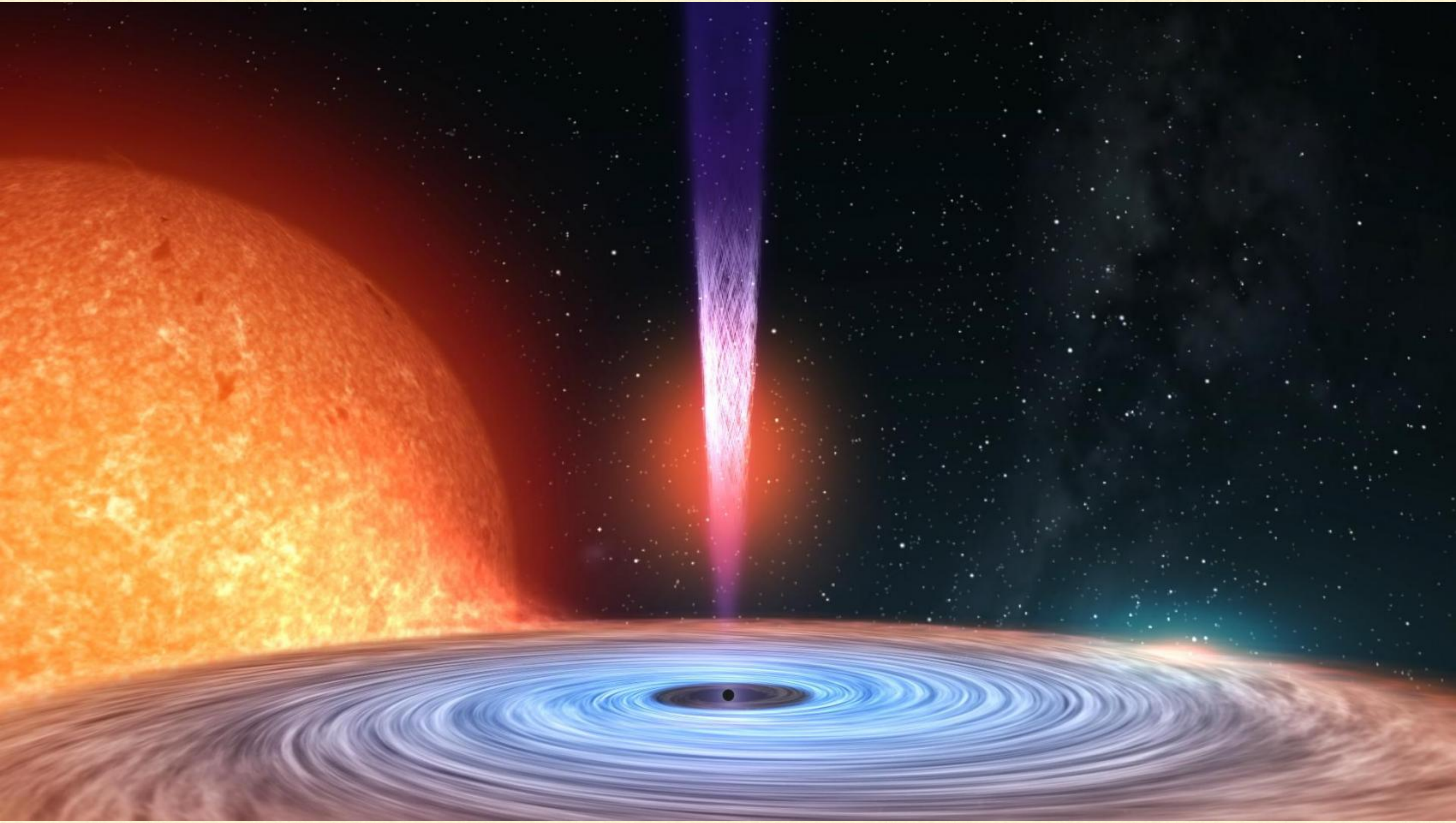


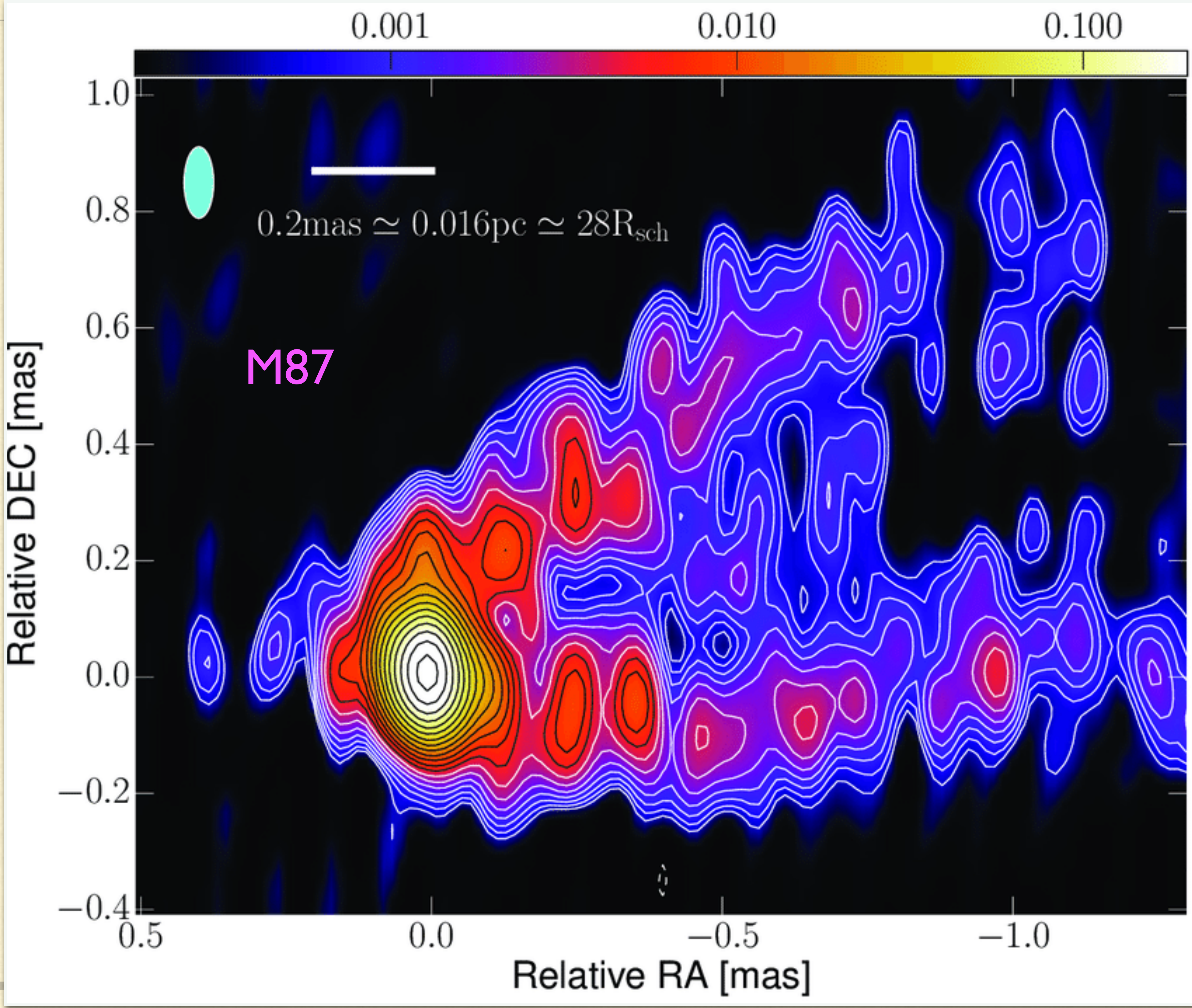


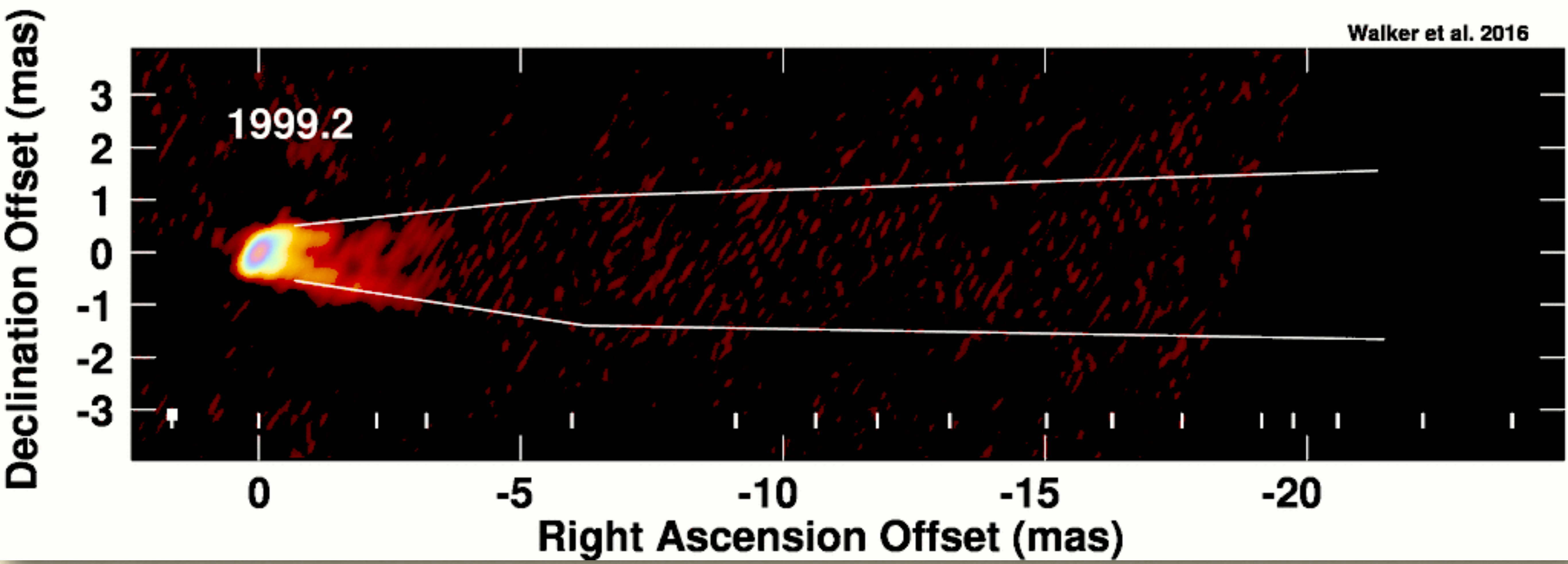
$$L_{\rm EM} \sim 4\pi \frac{B^2}{8\pi} c R_g^2 \sim c B^2 R_g^2$$

$$L \approx 10^{46} \left(\frac{B_n}{10^4\ \mathrm{G}}\right)^2 \left(\frac{M}{10^9 M_\odot}\right)^2 a_*^2\ \mathrm{erg\,s^{-1}}.$$






0.001
0.010
0.100
0.2mas ≃ 0.016pc ≃ 28Rsch
M87
Relative DEC [mas]
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0.5
0.0
−0.5
−1.0
Relative RA [mas]


Walker et al. 2016
1999.2
Declination Offset (mas)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
-5
-10
-15
-20
Right Ascension Offset (mas)