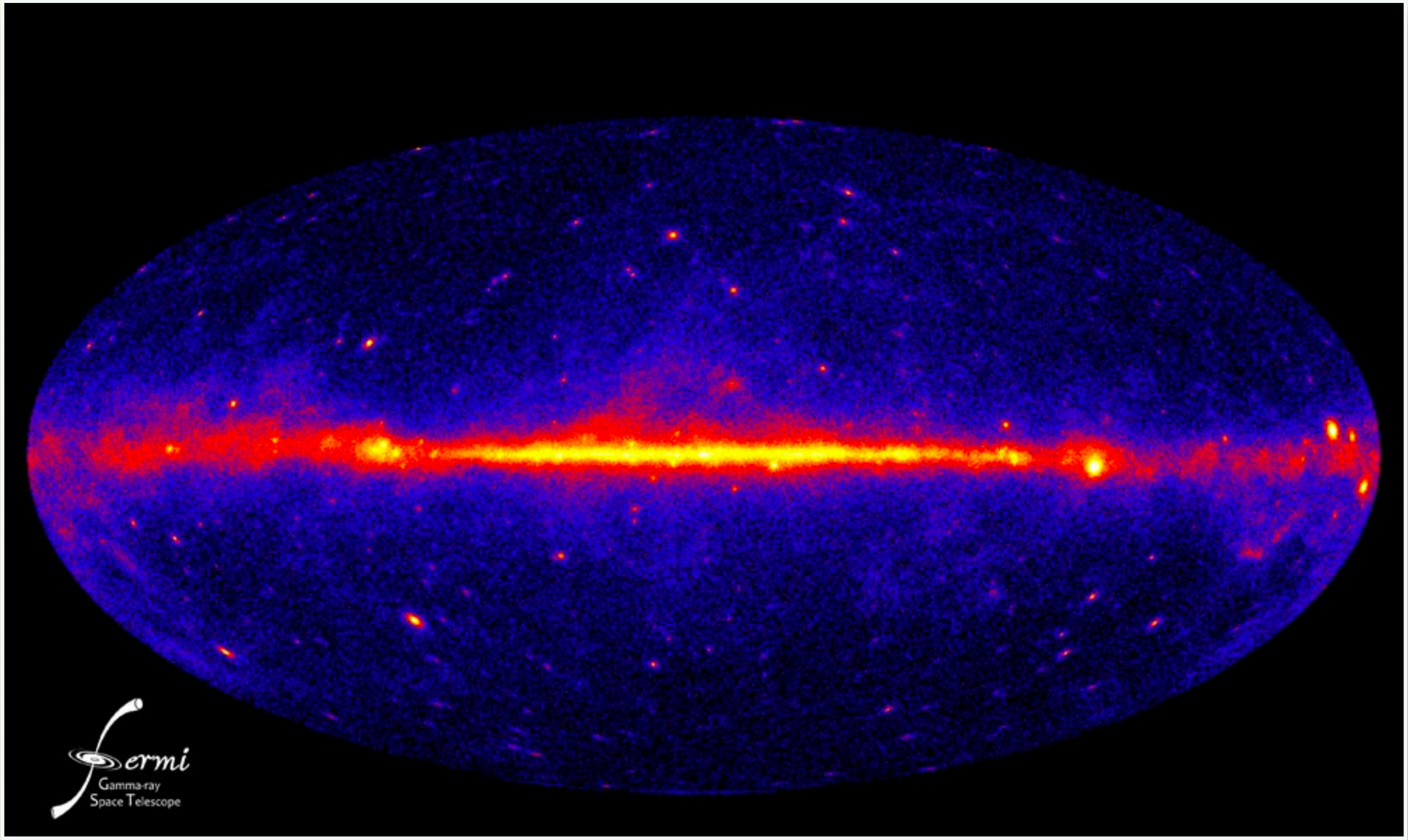



# INTRODUCCIÓN A LA ASTROFÍSICA RELATIVISTA

Gustavo E. Romero

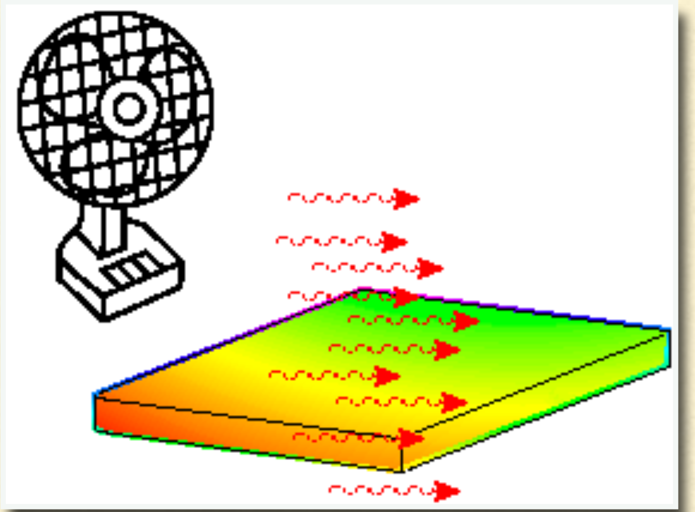
Cursada 2020, FCAyG/UNLP

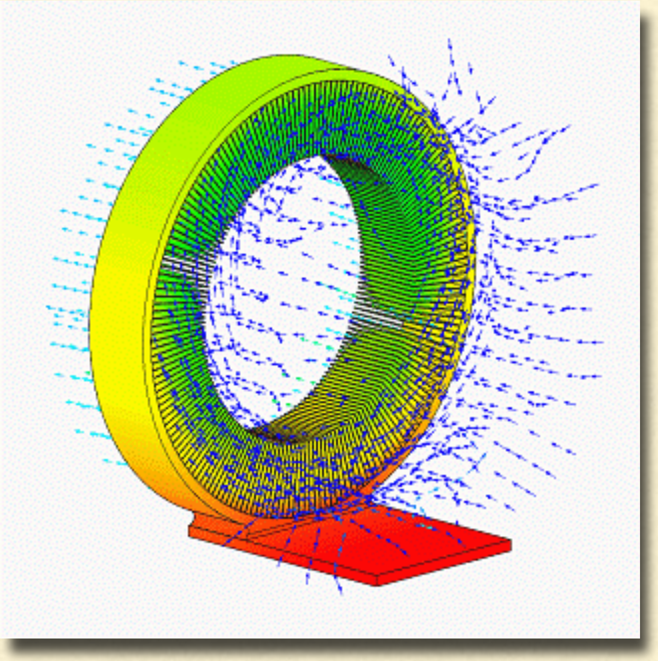
# Difusión y convección

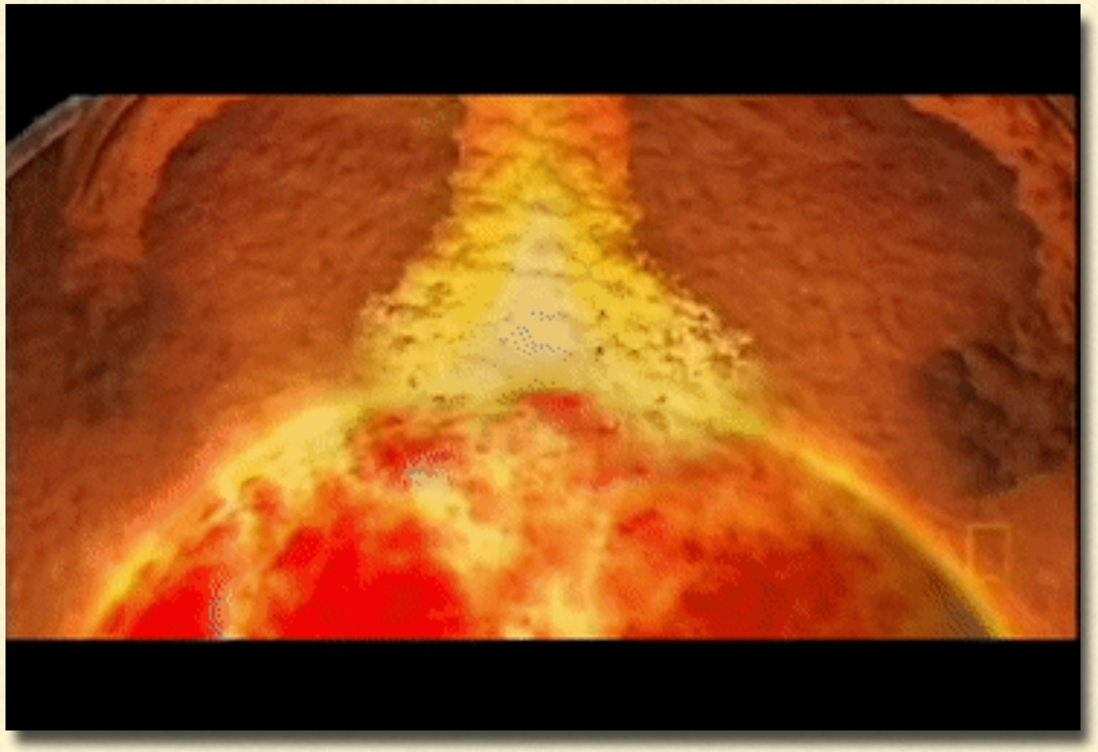
El camino libre medio *l* de propagación de una partícula en un medio es la distancia o espacio entre dos colisiones sucesivas de la partícula con el medio. Si el medio se extiendo por una distancia *L,* decimos que es transparente a la partícula en caso de que $l >> L$. Por el contrario, si $l << L$ la partícula se difunde por el medio. La difusión es, entonces, el proceso físico por el cual una población de partículas pasa de una situación de alta concentración y baja entropía a una de menor concentración y mayor entropía.

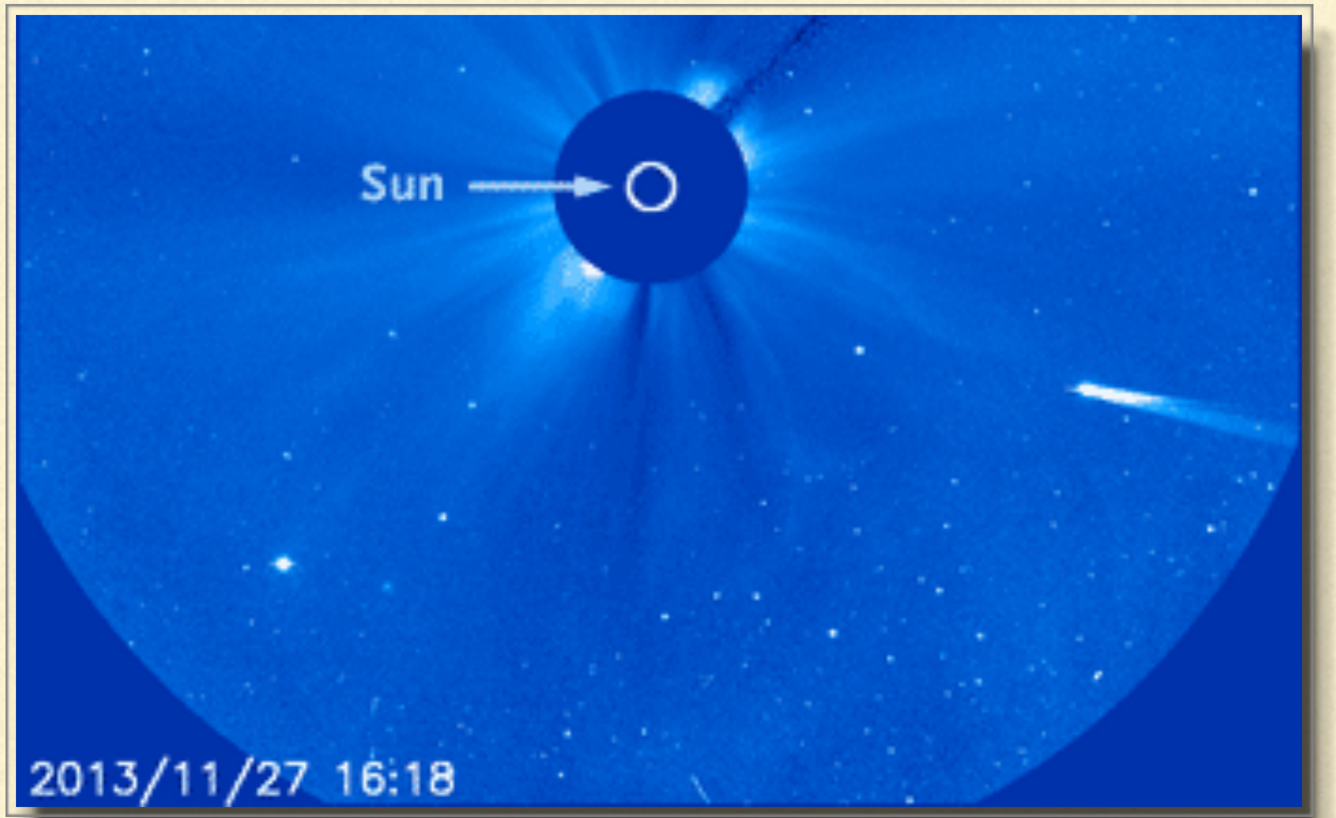
La convección, en cambio, es el transporte de una población de partículas por un movimiento macroscópico del medio. Puede describirse como el **efecto de la aplicación de un campo vectorial sobre uno escalar.**

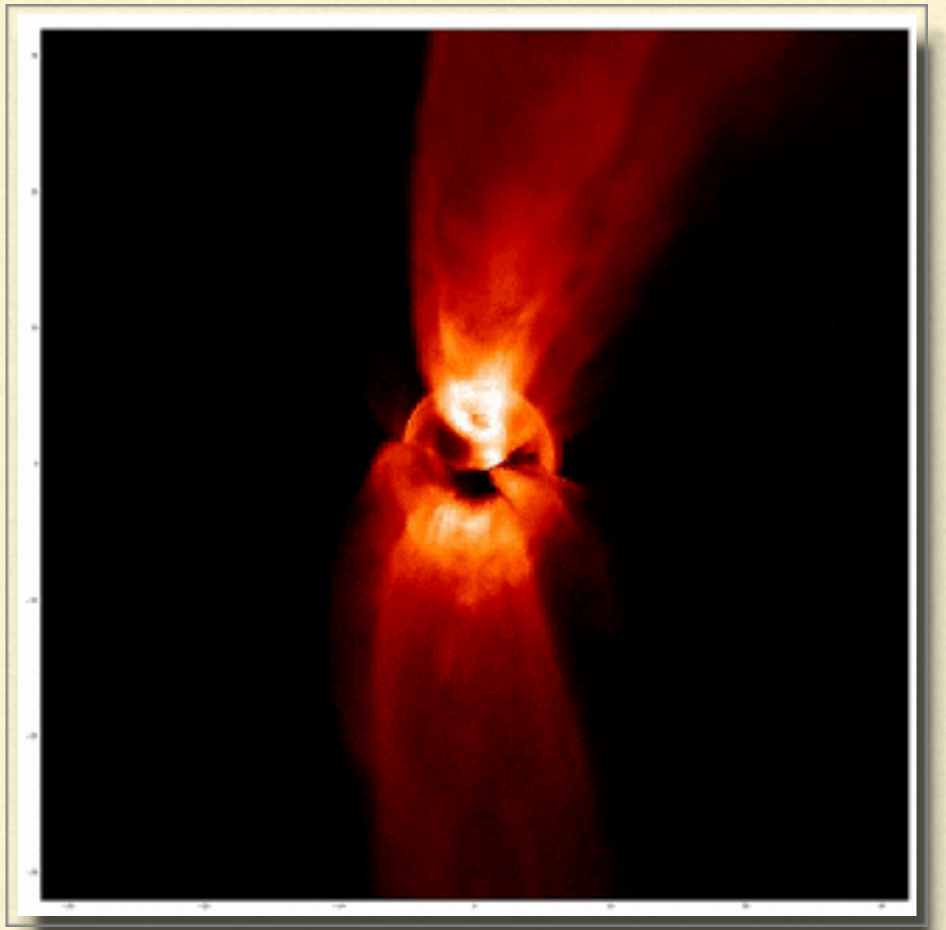
# Convección

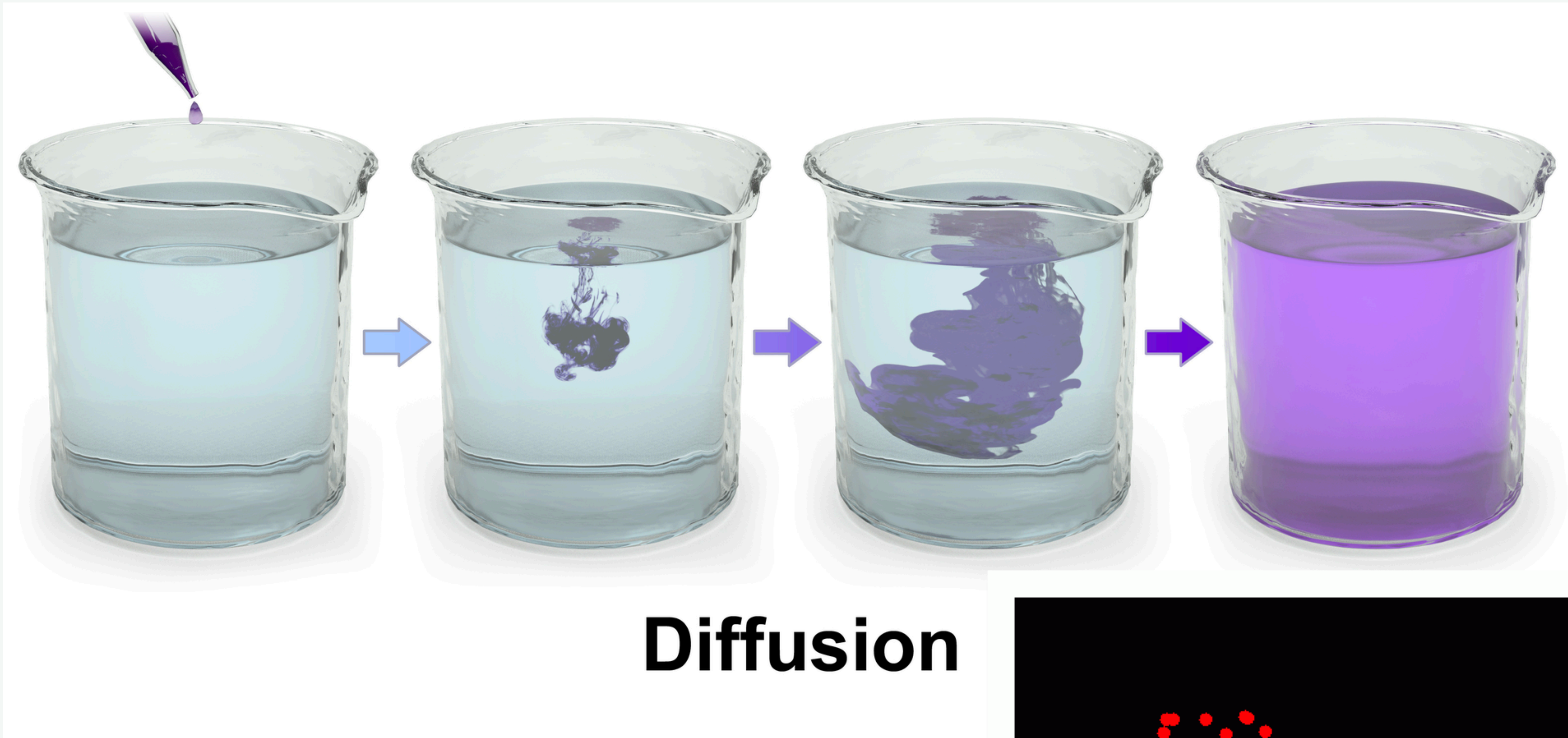


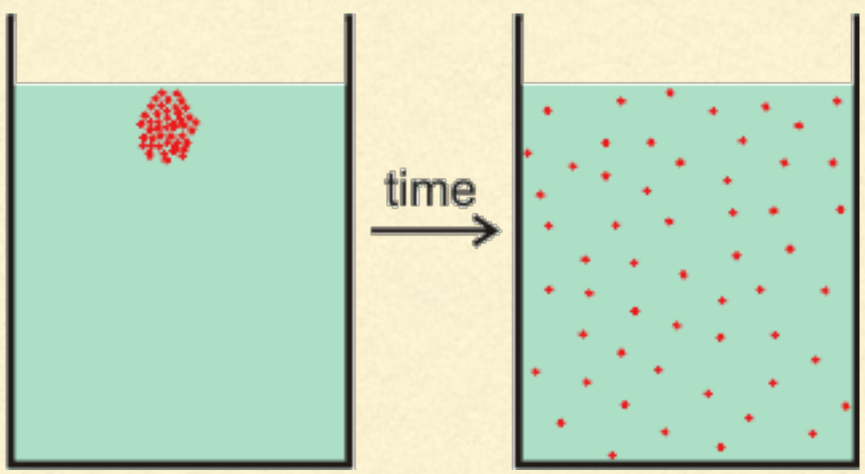


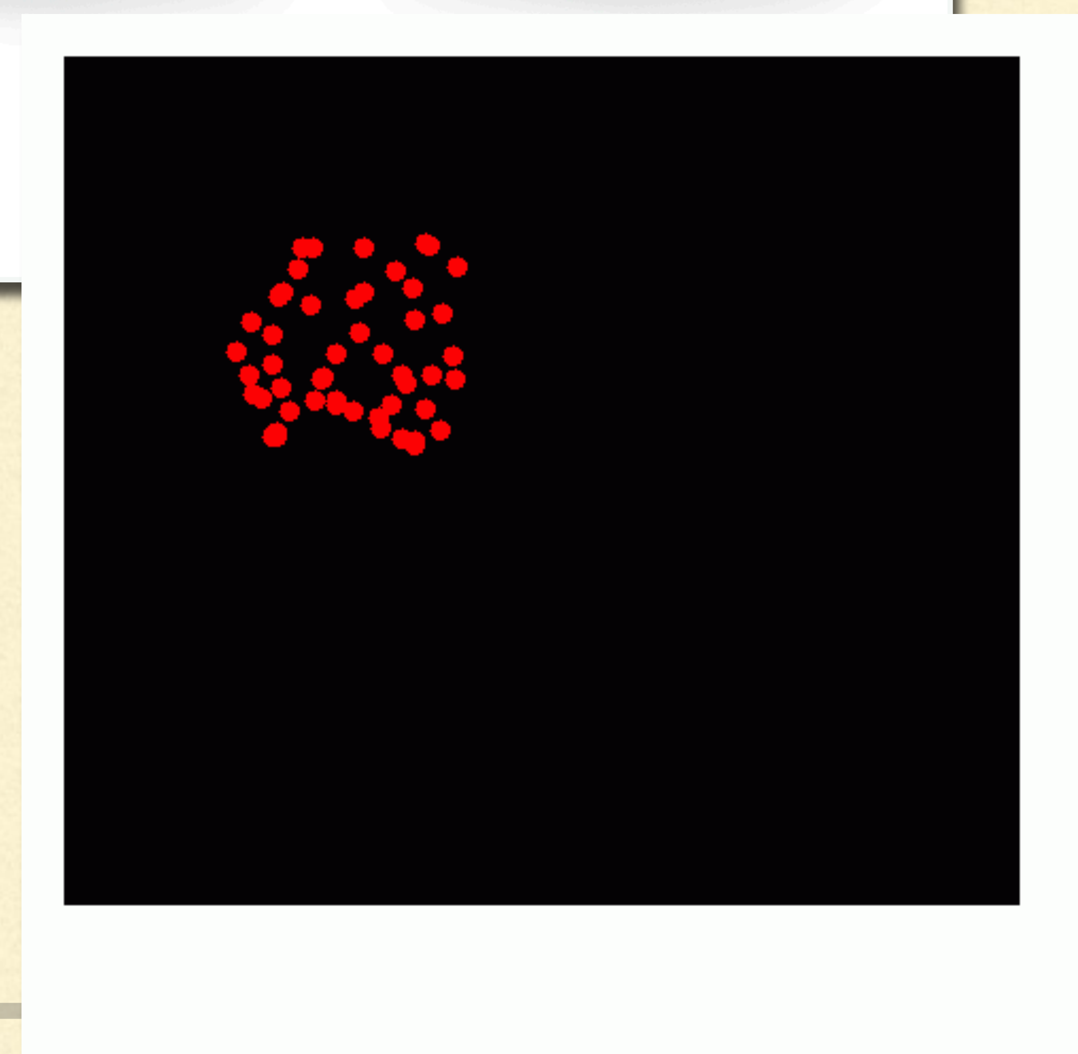




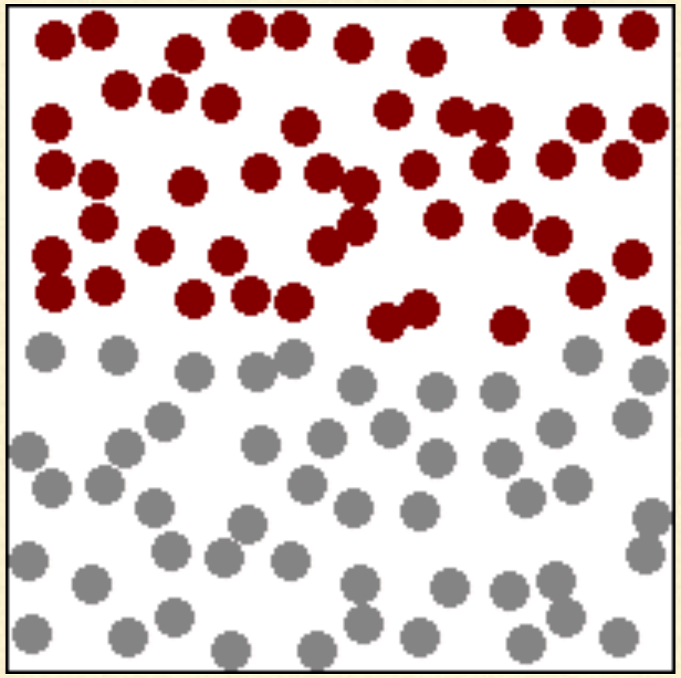




Diffusion


time



En un sistema donde se inyecta una población de partículas el flujo va desde la región de alta concentración a las regiones de baja concentración, con una magnitud que es proporcional al gradiente de concentración



## Ley de Fick

$$\mathbf{J} = -D\,\nabla n\,, \quad J_i = -D\frac{\partial n}{\partial x_i}\ .$$

***J*** es el "flujo difusivo”: cantidad de partículas por unidad de área, por unidad de tiempo.

*D* es el coeficiente de difusión o difusividad. Su dimensión es de área por unidad de tiempo.

## Segunda ley de Fick

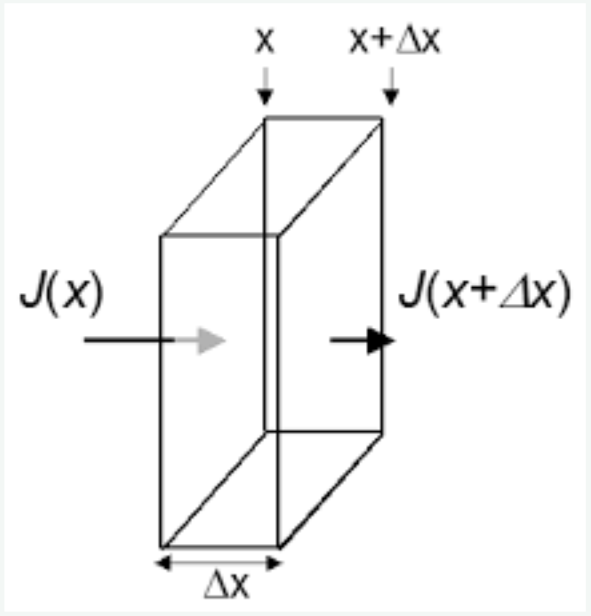
Describe la forma en que la difusión causa que la concentración cambie con el tiempo.

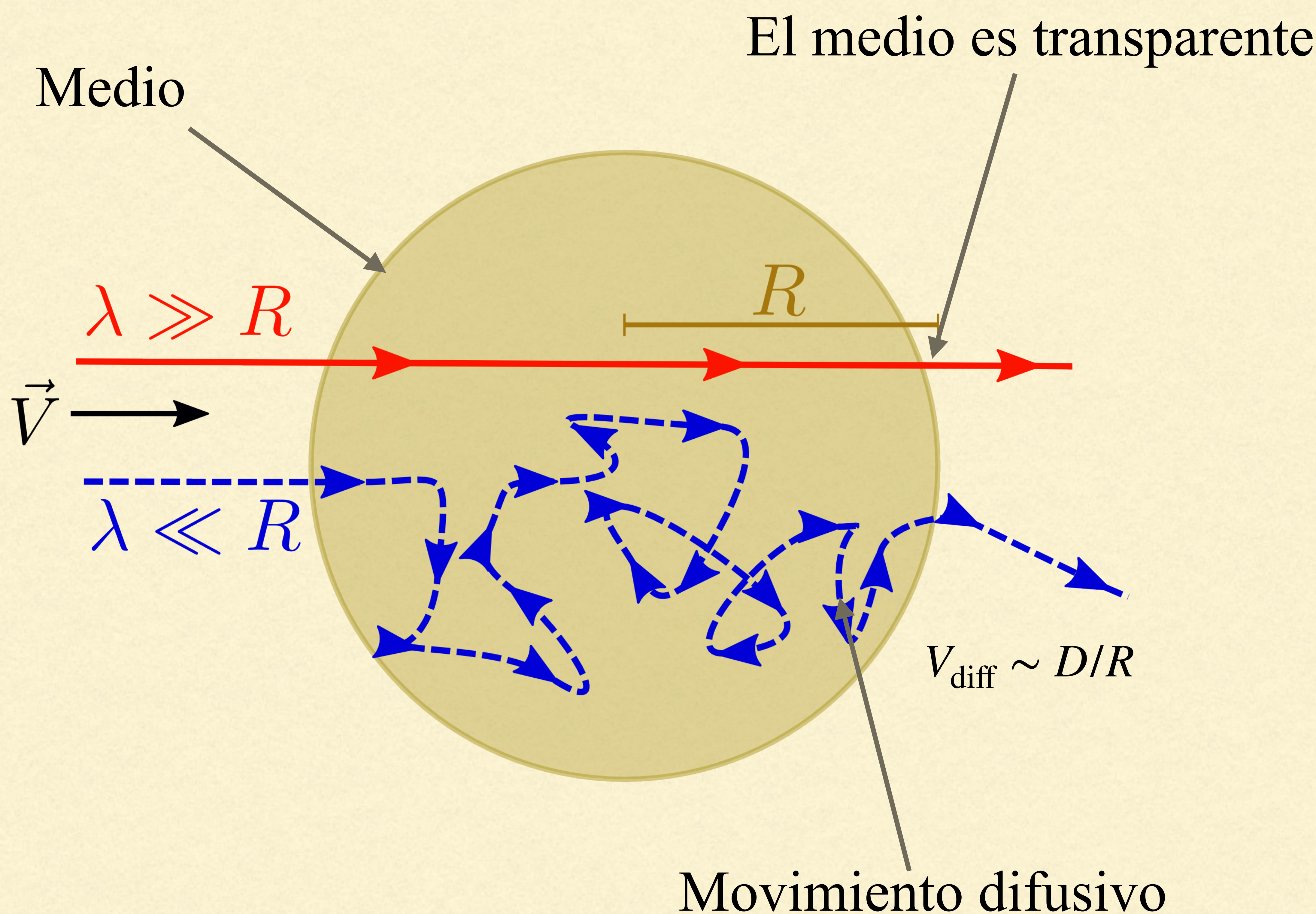
$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

$n$ es la concentración en dimensiones de longitud$^{-3}$.

En 3D:

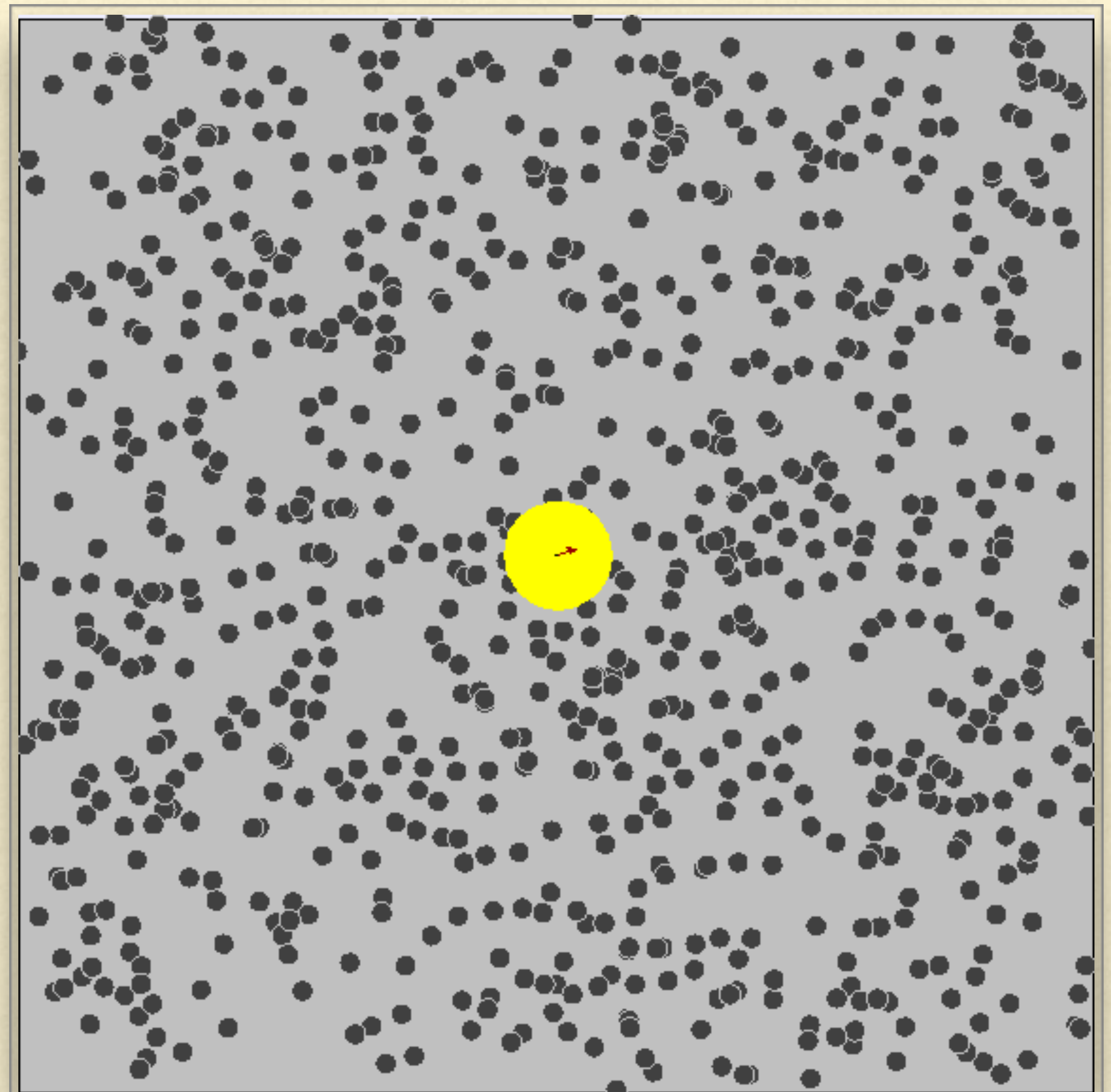
$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n$$






Si la velocidad de la partícula es $V$, entonces en el primer caso el tiempo de cruce es $t_{\mathrm{cruce}} \sim R/V$, mientras que en el segundo es $t_{\mathrm{cruce}} \sim R^2/D \gg R/V$.

El tiempo que le lleva a una partícula atravesar un medio es $t \sim R^2/D$, donde $D$ es el coeficiente de difusión, que mide la facilidad con que la partícula se mueve en el medio. A mayor valor del coeficiente, más rápido avanza o se difunde la partícula. Las unidades de $D$ son [$cm^2 \, s^{-1}$].



$$D = \frac{1}{3}\lambda v$$

Movimiento Browniano

Caracterizaremos la población de partículas relativistas a través de la función distribución

$$n(\vec{r}, E, t) = \frac{dN}{dE\, dV},$$

es decir, el número de partículas a tiempo $t$ en la posición $\vec{r}$ por unidad de volumen d$V$, con energía en el intervalo d$E$ alrededor de $E$.

La evolución de esta distribución viene determinada por la *ecuación de transporte o ecuación cinética*, cuya forma es:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (D \nabla n) + \frac{\partial (b\, n)}{\partial E} + \frac{n}{T} = Q(E, \vec{r}, t),$$

donde $D = D(E, \vec{r})$ es el coeficiente de difusión, $b = b(E, \vec{r}, t) = dE/dt \leq 0$ es la tasa total de pérdida de energía de las partículas por distintos procesos, $T = T(E, \vec{r})$ es la escala temporal de escape de las partículas de la región de interés y $Q(E, \vec{r}, t)$ es el término fuente de inyección.

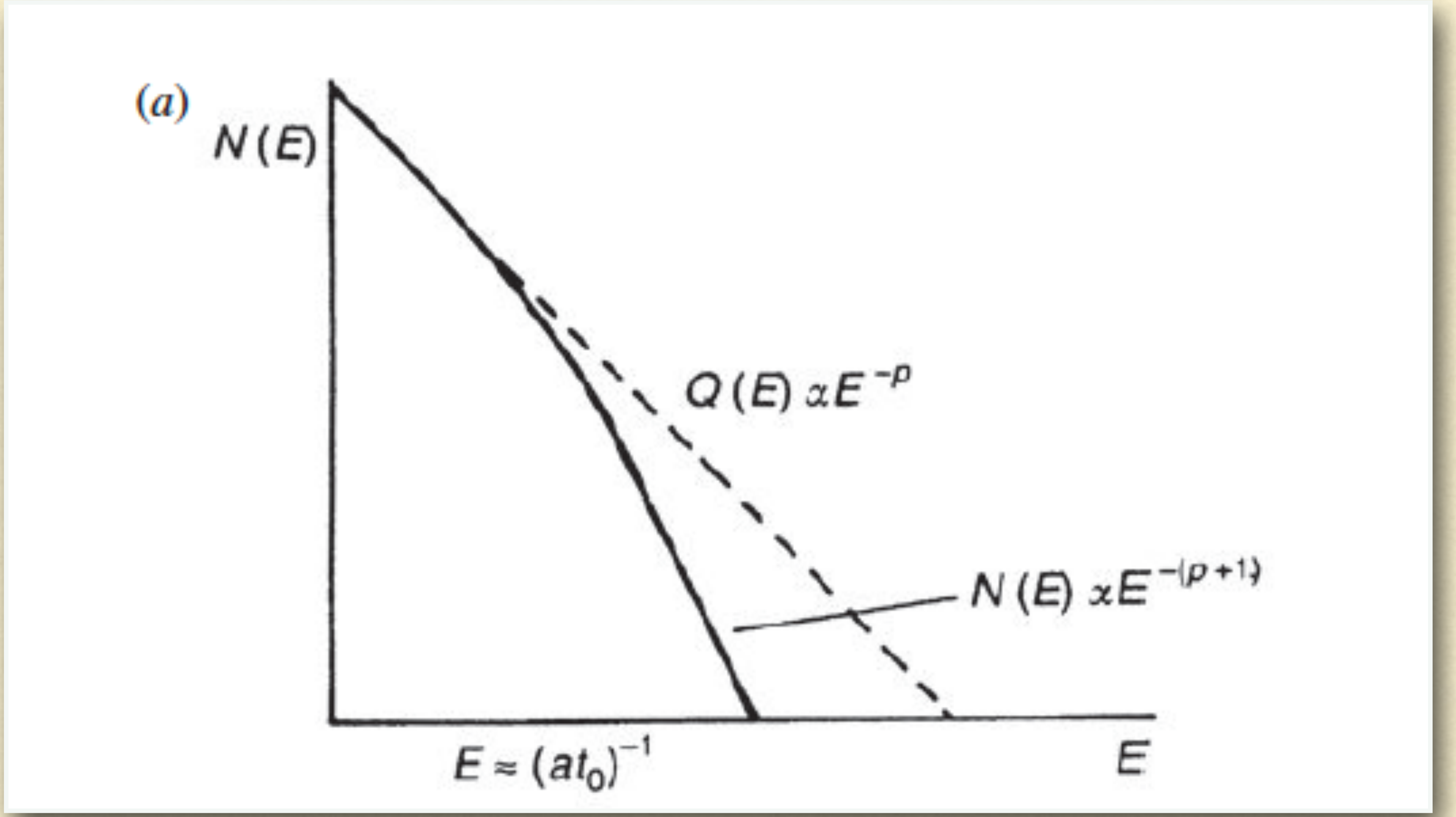
$$\underbrace{\frac{\partial n}{\partial t}}_{\text{Variación de la densidad de partículas}} - \underbrace{\nabla \cdot (D\nabla n)}_{\text{Transporte difusivo de partículas}} + \underbrace{\frac{\partial (b\,n)}{\partial E}}_{\text{Desplazamiento en energía por pérdidas o ganancias radiativas}} + \underbrace{\frac{n}{T}}_{\text{Remoción de partículas}} = \underbrace{Q(E, \vec{r}, t)}_{\text{Inyección de partículas}},$$

Consideremos el caso sencillo de un sistema de partículas en estado estacionario en una región homogénea, donde puede despreciarse el escape ($T \to \infty$) y en la que se inyectan partículas relativistas con un espectro $Q(E) = KE^{-p}$ con $p > 0$. La ecuación para $n(E)$ es en este caso

$$\frac{d}{dE}\left[b(E)\,n(E)\right] = Q(E).$$

Para $p \neq 1$ y suponiendo que $b(E)n(E) \to 0$ para $E \to \infty$, la solución resulta

$$n(E) = \frac{K}{(p-1)}\,\frac{E^{-(p-1)}}{|b(E)|}.$$

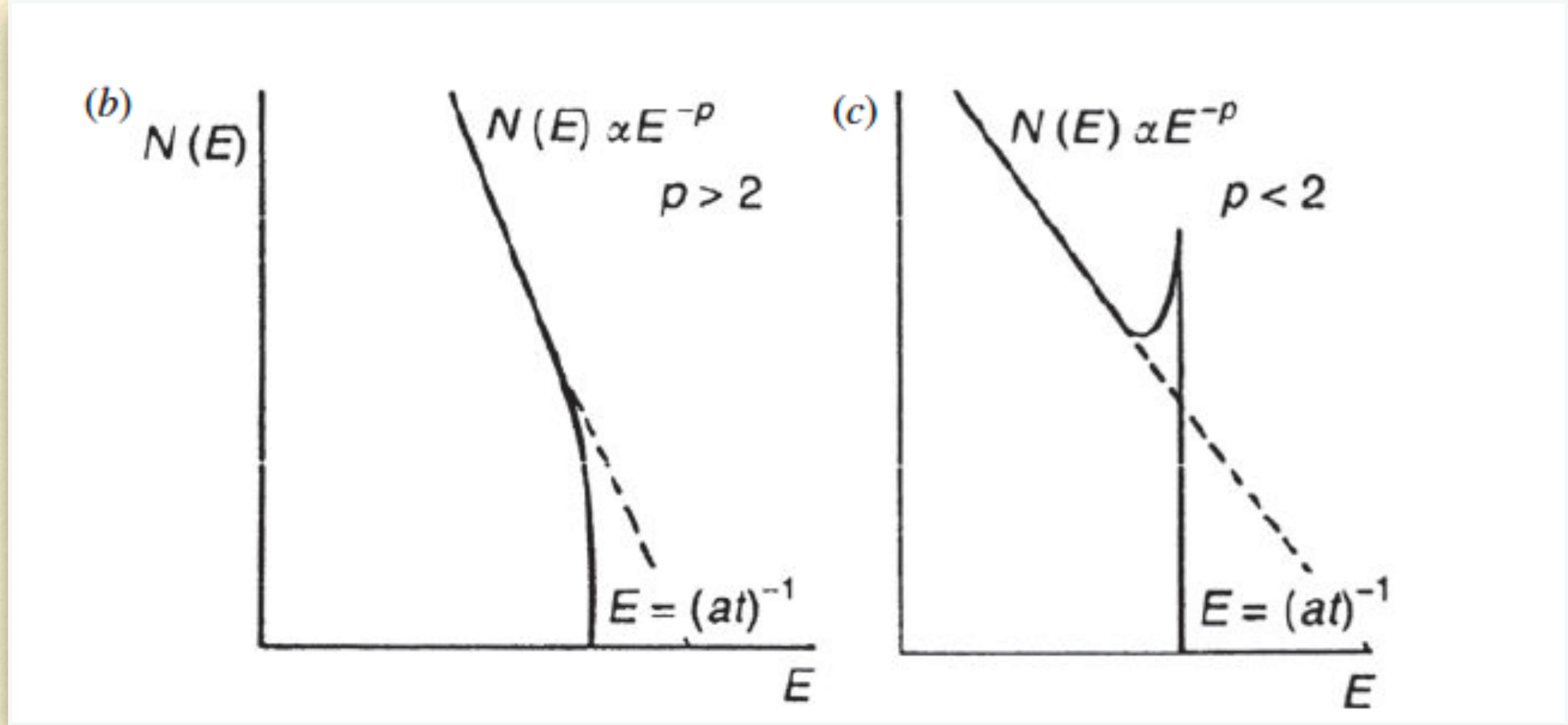



$$b(E) = aE^2$$

Supongamos que en una región actúa, durante intervalo acotado de tiempo, un mecanismo de inyección continua de partículas que puede describirse mediante una función de la forma $Q(E) = KE^{-p}$ $(p > 0)$ para $t \leq t_0$ y $Q(E) = 0$ para $t > t_0$. Supongamos además que las pérdidas de energía son del tipo $b(E) = AE^2$ con $A$ una constante. Resolviendo la ecuación de transporte

$$\frac{\partial n(E,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E}[b(E)\, n(E,t)] + Q(E,t)$$

$$n(E,t) = \begin{cases} \dfrac{KE^{-(p+1)}}{A(p-1)}\left[1-(1-AEt)^{p-1}\right] & \text{si} \quad AEt < 1 \\ \dfrac{KE^{-(p+1)}}{A(p-1)} & \text{si} \quad AEt \geq 1 \end{cases}$$


(b)
N (E)
N (E) αE^{-p}
p > 2
E = (at)^{-1}
E
(c)
N (E) αE^{-p}
p < 2
E = (at)^{-1}
E

Para el caso de una inyección instantánea en $t = 0$ del tipo $Q(E,t) = KE^{-p}\delta(t)$, la distribución de partículas resulta

$$n(E,t) = \begin{cases} KE^{-p}(1 - AEt)^{p-2} & \text{si} \quad AEt < 1 \\ 0 & \text{si} \quad AEt \geq 1 \end{cases}$$

Notar que para $p = 2$ el espectro no se modifica en su forma, solo va cambiando la energía máxima de las partículas de acuerdo a $E_{\max}(t) = 1/(At)$.

En el caso más general el coeficiente de difusión $D$ es un tensor; si el medio es uniforme, $D = D(E)$. En general se asume que la dependencia en la energía es una ley de potencias:

$$D(E) = D_0 E^{\delta} \quad (\delta > 0),$$

pero esto puede variar significativamente en diversos medios. En ausencia de cualquier otra información se suele adoptar el coeficiente de difusión mínimo, conocido como coeficiente de difusión de Bohm :

$$D_{\mathrm{B}} = \frac{1}{3} r_{\mathrm{g}} c,$$

donde $r_{\mathrm{g}}$ es el giroradio de las partículas. En algunos casos, la difusión compite con la convección como mecanismo de transporte de las partículas (por ejemplo en regiones donde hay vientos fuertes).

La ley de Fick se deduce de la ecuación de transporte despreciado pérdidas e inyección:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \nabla \cdot (D \nabla n) + \cancel{\frac{\partial (b\, n)}{\partial E}} + \cancel{\frac{n}{T}} = \cancel{Q(E, \vec{r}, t)}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\,\nabla^2 n$$

$$n\,(x, t) = n_0 \mathrm{Ferrc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

En coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}R^2\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial E}(Pf) + Q\,.$$

$$f \equiv f(E, R, t),$$

$$P = -(dE/dt)$$

$$f_{\rm inj} = E^{-\alpha},$$

$$Q(E, R, t) = N_0 f_{\rm inj}(E)\delta(\mathbf{R})\delta(t),$$

$$P_{\rm nucl} = E/\tau_{\rm pp}$$

$$D(E) \propto E^{\delta}$$

$$\rightarrow \quad f(E, R, t) \approx \frac{N_0\,E^{-\alpha}}{\pi^{3/2}\,R_{\rm dif}^3}\;\exp\left(-\frac{(\alpha-1)t}{\tau_{\rm pp}} - \frac{R^2}{R_{\rm dif}^2}\right)\,.$$

$$R_{\rm dif} \equiv R_{\rm dif}(E, t) = 2\sqrt{D(E)\,t\,\frac{\exp(t\delta/\tau_{\rm pp}) - 1}{t\delta/\tau_{\rm pp}}}\,.$$

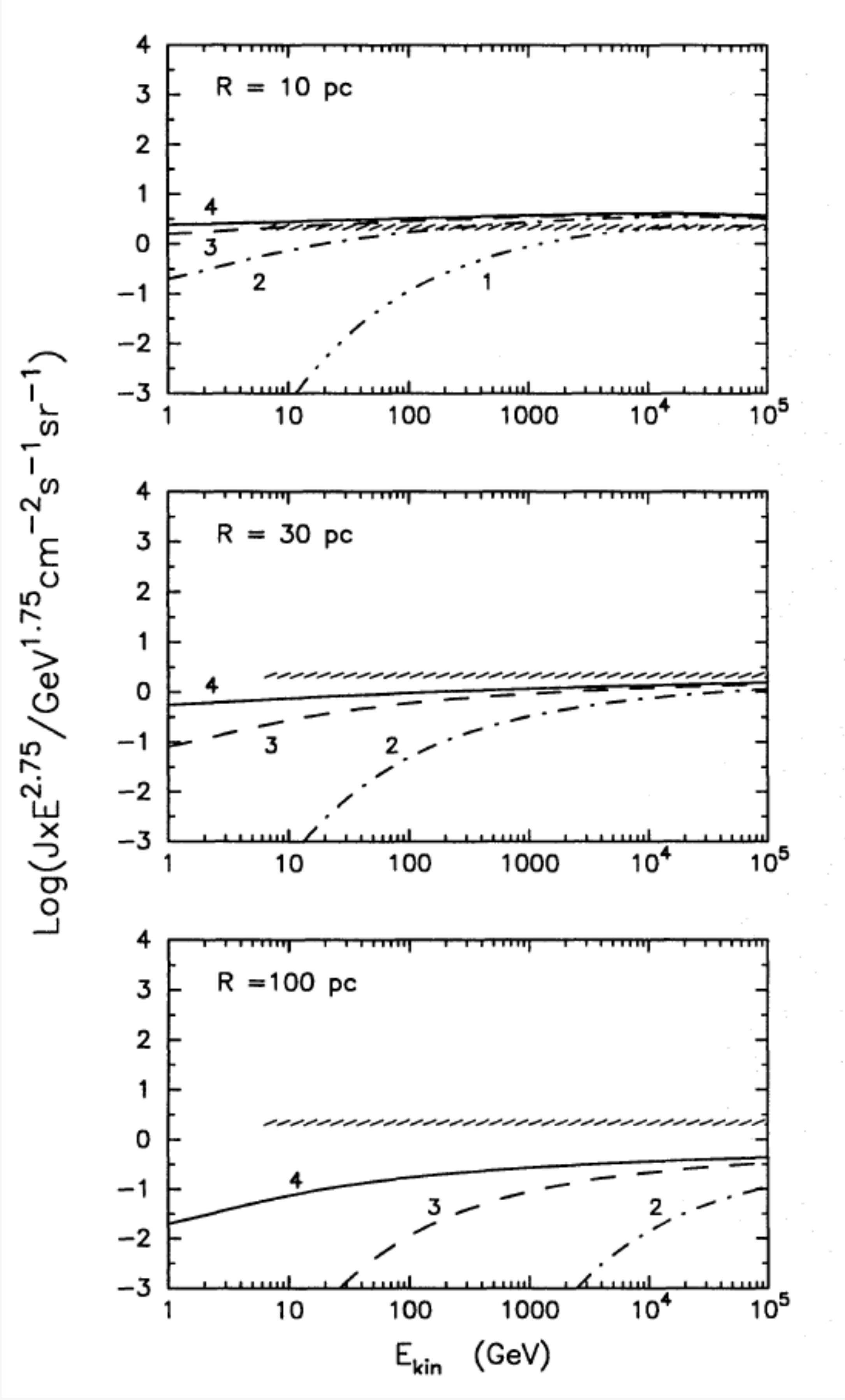
$$\boxed{f \propto E^{-(\alpha+\frac{3}{2}\delta)}}$$

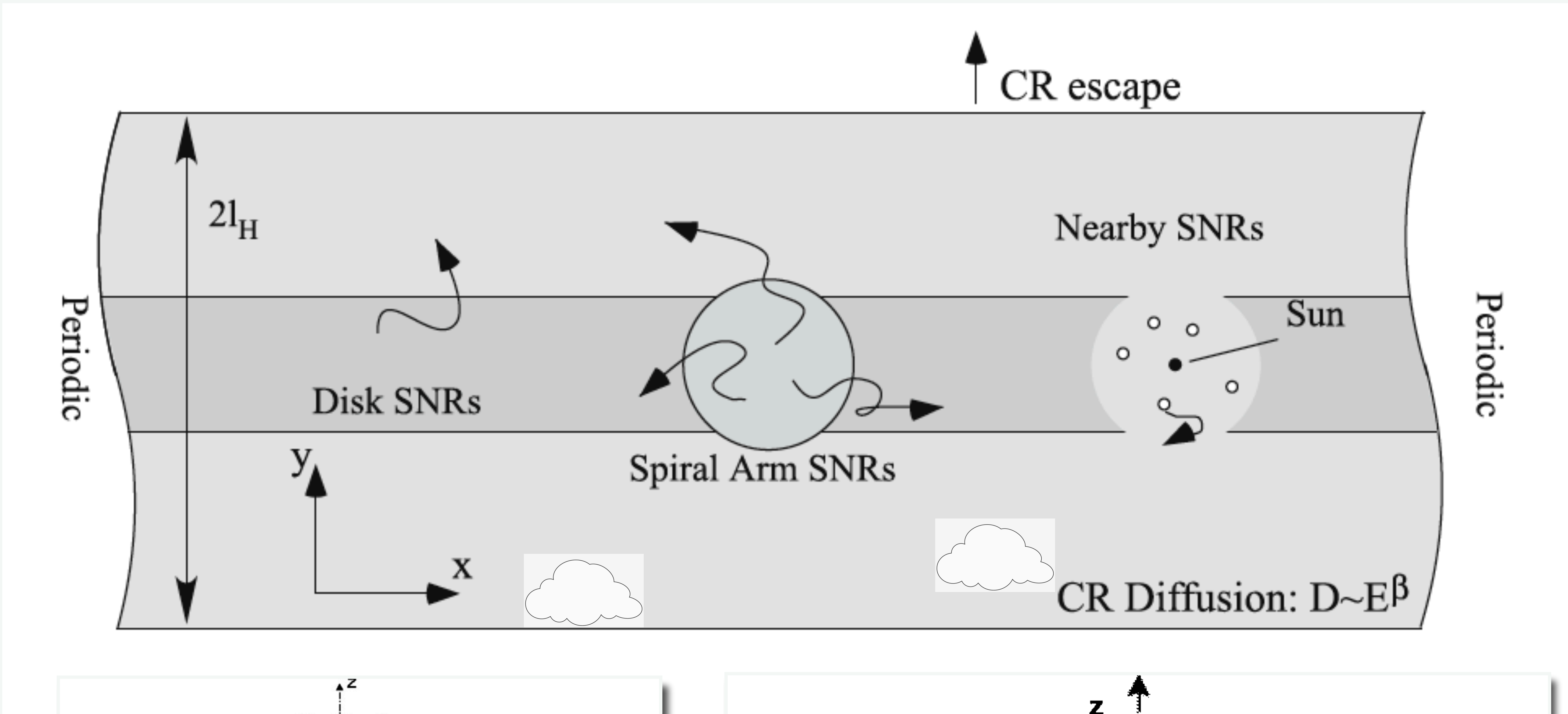
La dependencia del coeficiente de difusión con la energía tiene el efecto de producir un ablandamiento del espectro de rayos cósmicos a medida que estos se difunden.

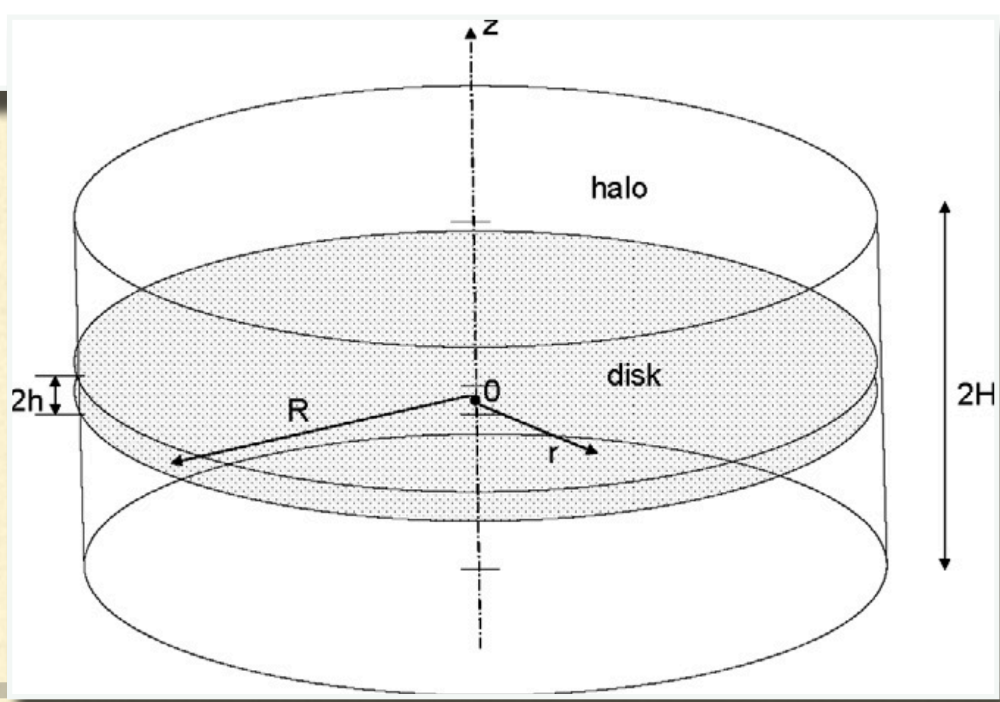
A 10 GeV en un ISM típico:

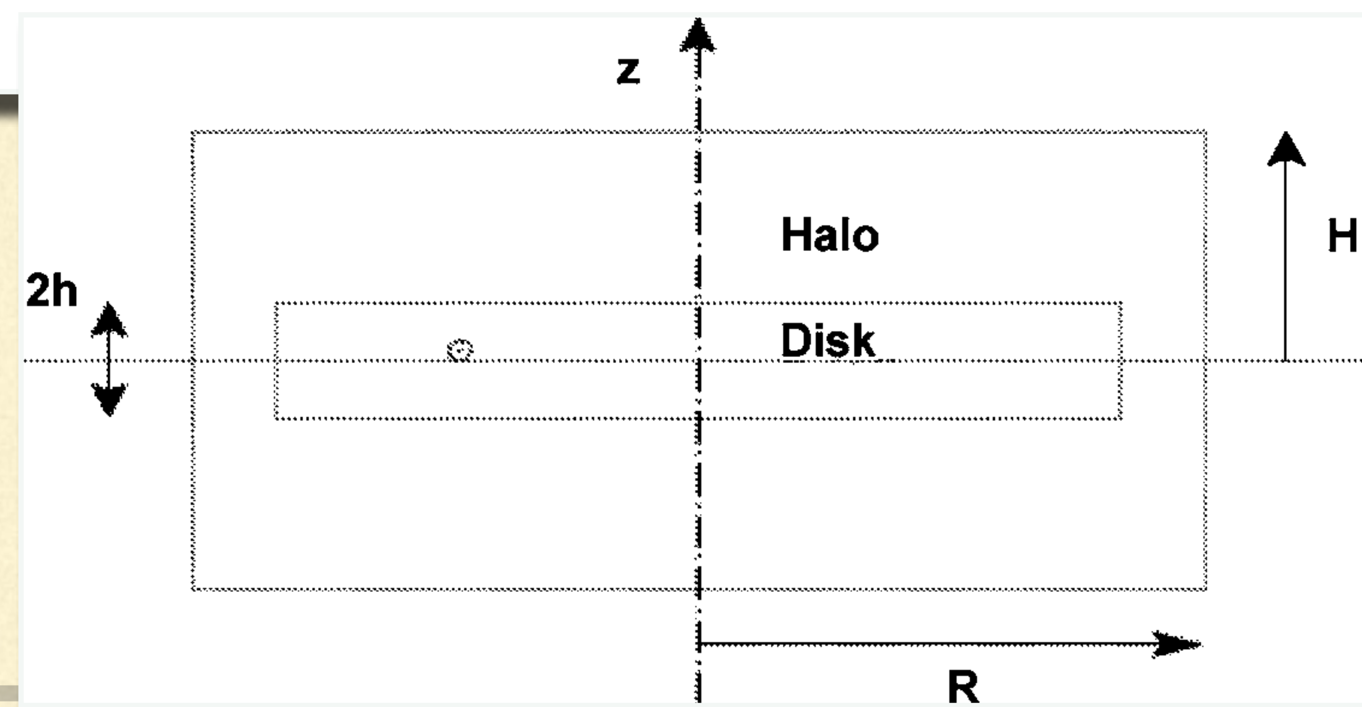
$$D(E) = D_{10}(E/10\ \mathrm{GeV})^{\delta} \quad (\delta = 0.5),$$

$$D_{10} \sim 10^{28}\ \ \mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}^{-1}.$$

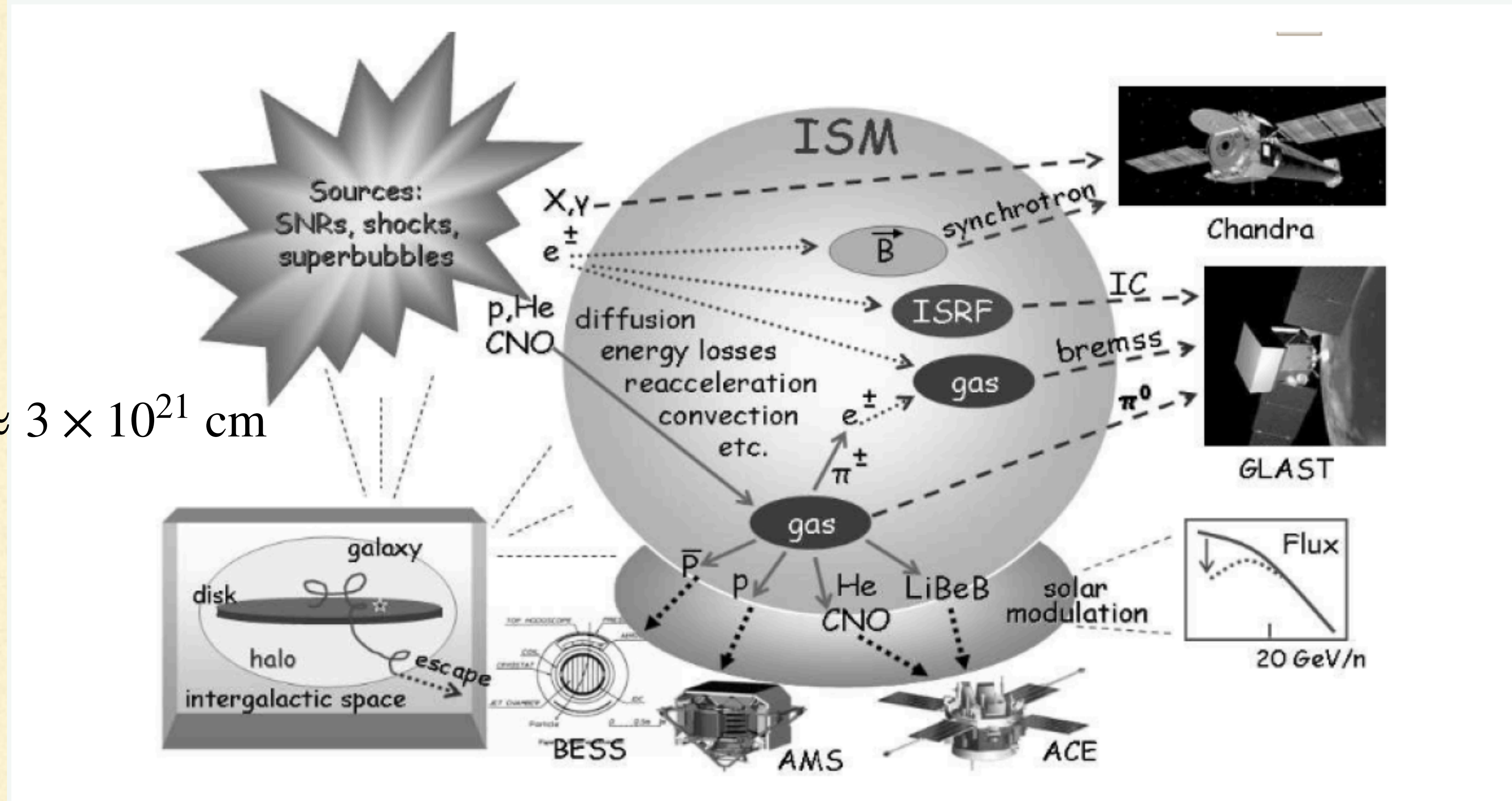



CR escape
$2l_H$
Nearby SNRs
Periodic
Sun
Periodic
Disk SNRs
y
Spiral Arm SNRs
x
CR Diffusion: $D \sim E^{\beta}$


z
halo
disk
0
2h
R
r
2H


z
Halo
H
2h
Disk
R

$R_{\text{halo}} \sim 1 \text{ kpc} \approx 3 \times 10^{21} \text{ cm}$




$$D \approx 3 \times 10^{28} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

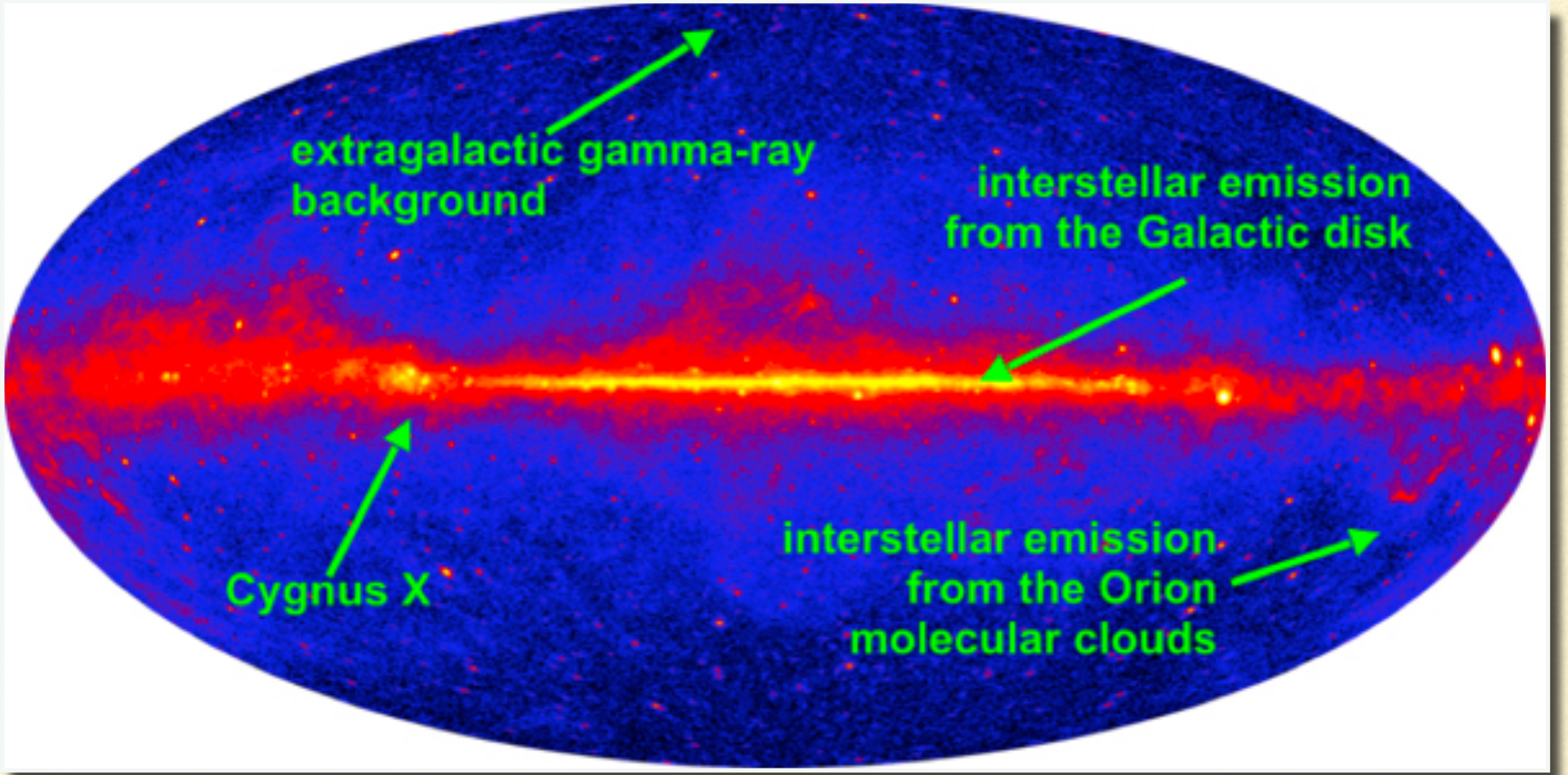
$$V \approx \frac{D}{R} = 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 100 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 3 \times 10^{-4}\, c.$$

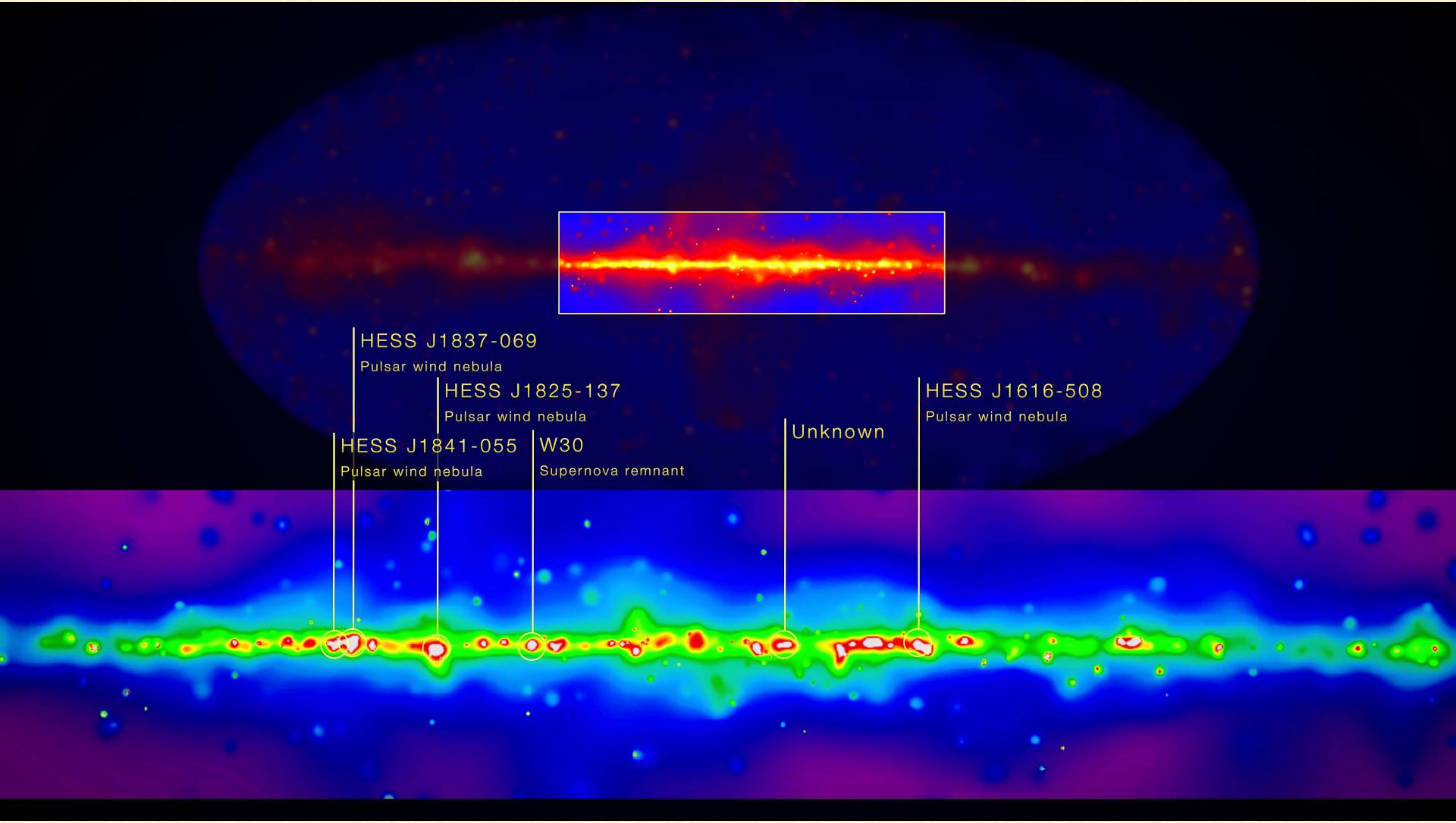
$$\frac{\partial N}{\partial t} = \nabla D_{xx} \nabla N$$

$$D_{xx} = \langle v \rangle \cdot \frac{\lambda}{3}.$$

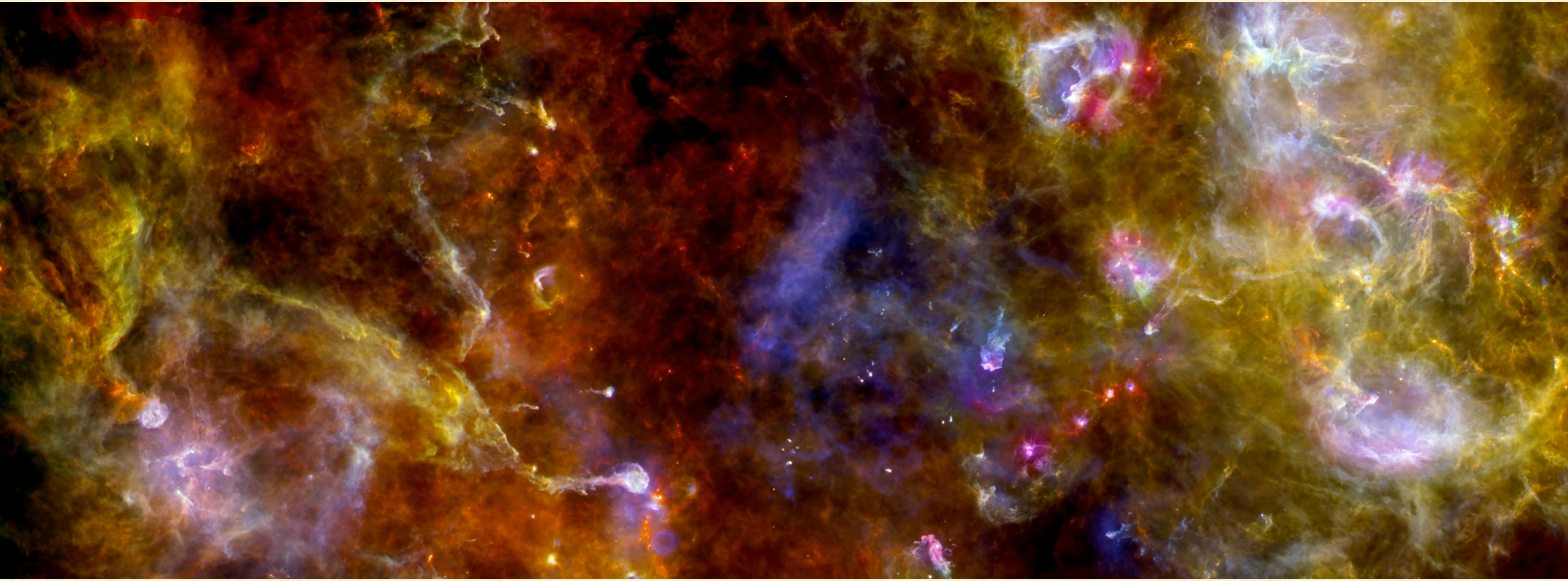
$$D(E) = D_0 \times \left( \frac{E}{10 \text{ GeV}} \right)^{\alpha}$$


FGST
FERMI GAMMA-RAY SPACE TELESCOPE


extragalactic gamma-ray background
interstellar emission from the Galactic disk
Cygnus X
interstellar emission from the Orion molecular clouds

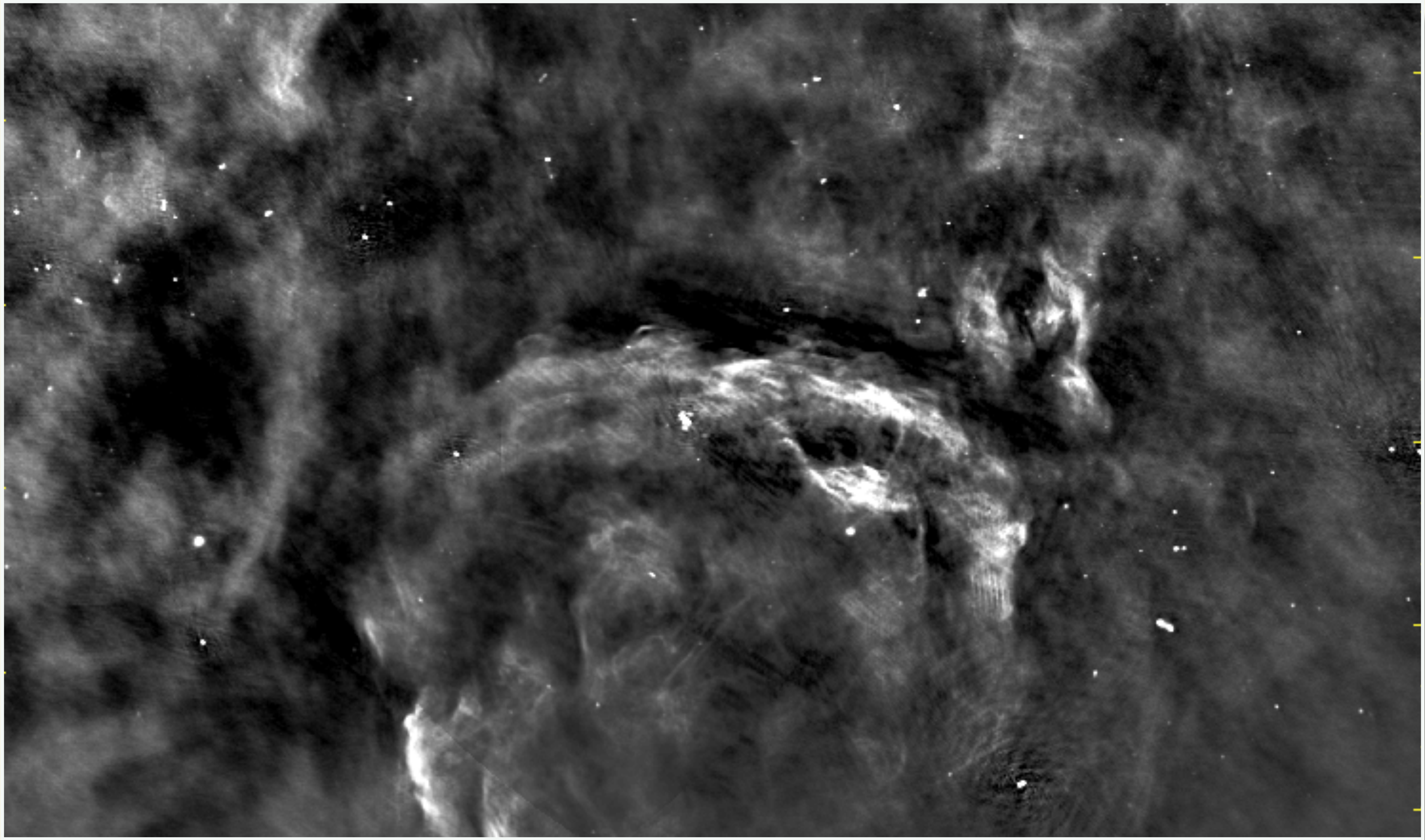

HESS J1837-069
Pulsar wind nebula
HESS J1825-137
Pulsar wind nebula
HESS J1841-055
Pulsar wind nebula
W30
Supernova remnant
Unknown
HESS J1616-508
Pulsar wind nebula

# Región de Cygnus



Azul: 70 µm; Verde: 160 µm; Rojo: 250 µm (datos HERSCHEL)

# Cygnus en radio (Benaglia et al. en preparación)



# Fermi-LAT Cygnus region