

# INTRODUCCIÓN A LA ASTROFÍSICA RELATIVISTA

Gustavo E. Romero  
Cursada 2020, FCAyG/UNLP

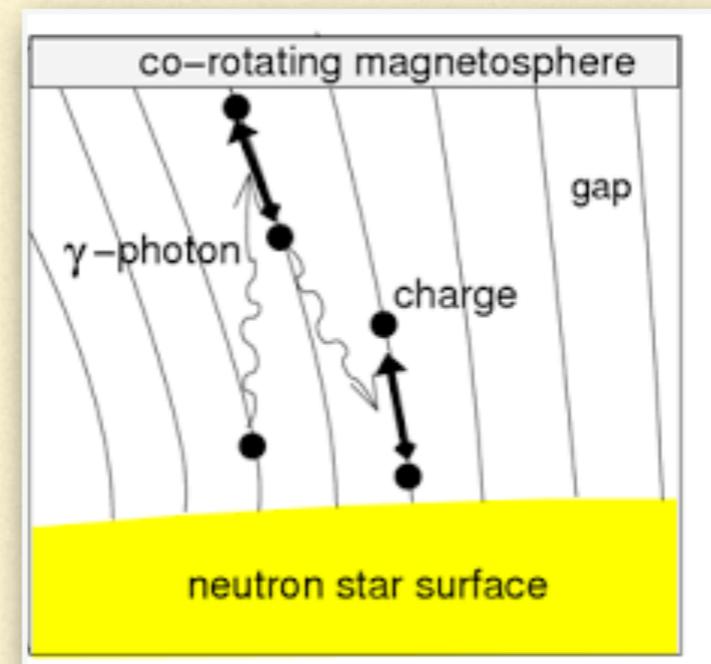
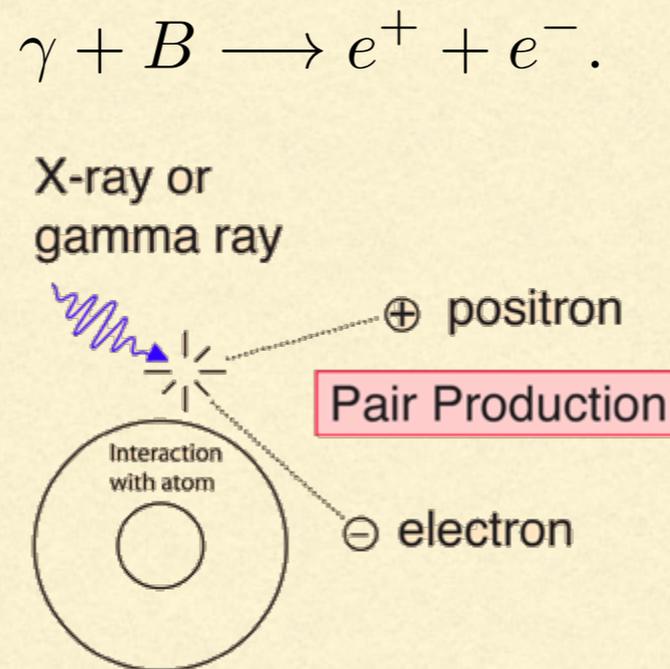
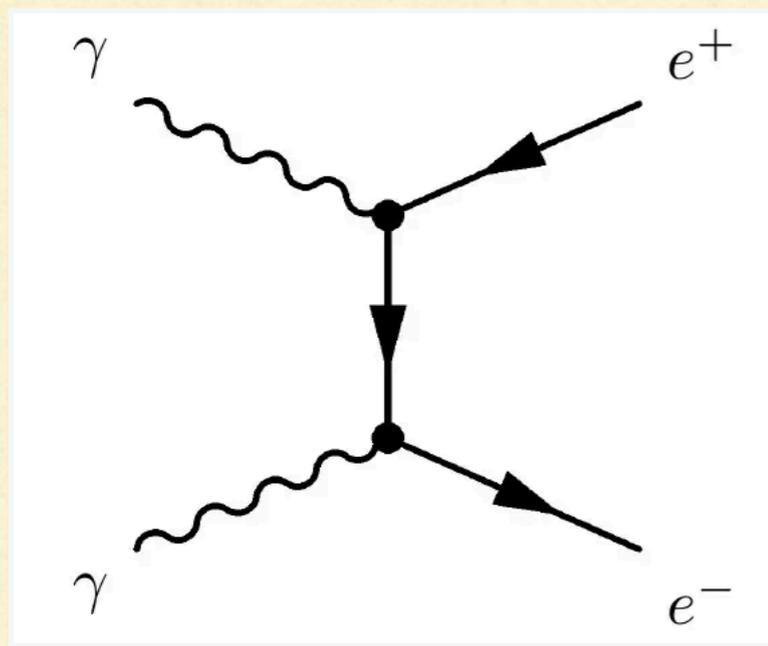
---

## Absorción

Los rayos  $\gamma$  creados por partículas relativistas en una fuente astrofísica pueden ser absorbidos por campos de radiación o materia en la fuente misma o en su trayecto al observador. Los principales mecanismos de absorción son la creación de pares en el campo Coulombiano de un núcleo y la creación de pares por aniquilación de fotones:

$$\gamma + \gamma \longrightarrow e^+ + e^-.$$

A bajas energías, el efecto Compton directo puede ser relevante y a energías muy altas y en presencia de campos magnéticos intensos los fotones  $\gamma$  pueden crear pares,



---

Supongamos que la intensidad original de los rayos  $\gamma$  es  $I_\gamma^0(E_\gamma)$  y que se los inyecta en un medio de densidad de blancos  $n$ . Luego de atravesar una distancia  $x$ , la intensidad ser'a

$$I_\gamma(E_\gamma) = I_\gamma^0(E_\gamma)e^{-\tau},$$

donde la cantidad

$$\tau = \sigma n x$$

se llama *profundidad óptica* del medio y  $\sigma$  es la sección eficaz para la interacción de los rayos  $\gamma$  con los blancos. En general, la profundidad óptica es una integral de línea que tiene en cuenta el efecto acumulado de la absorción a lo largo de la visual.

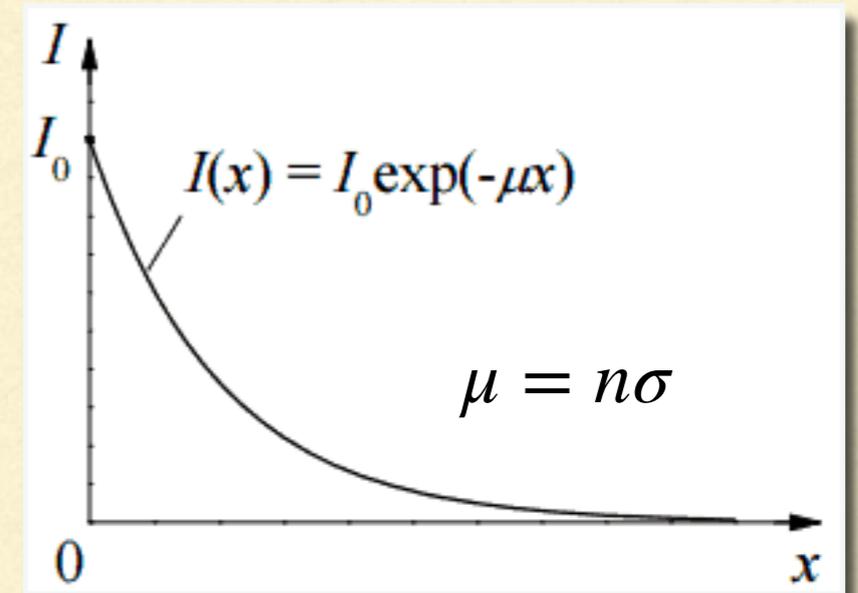
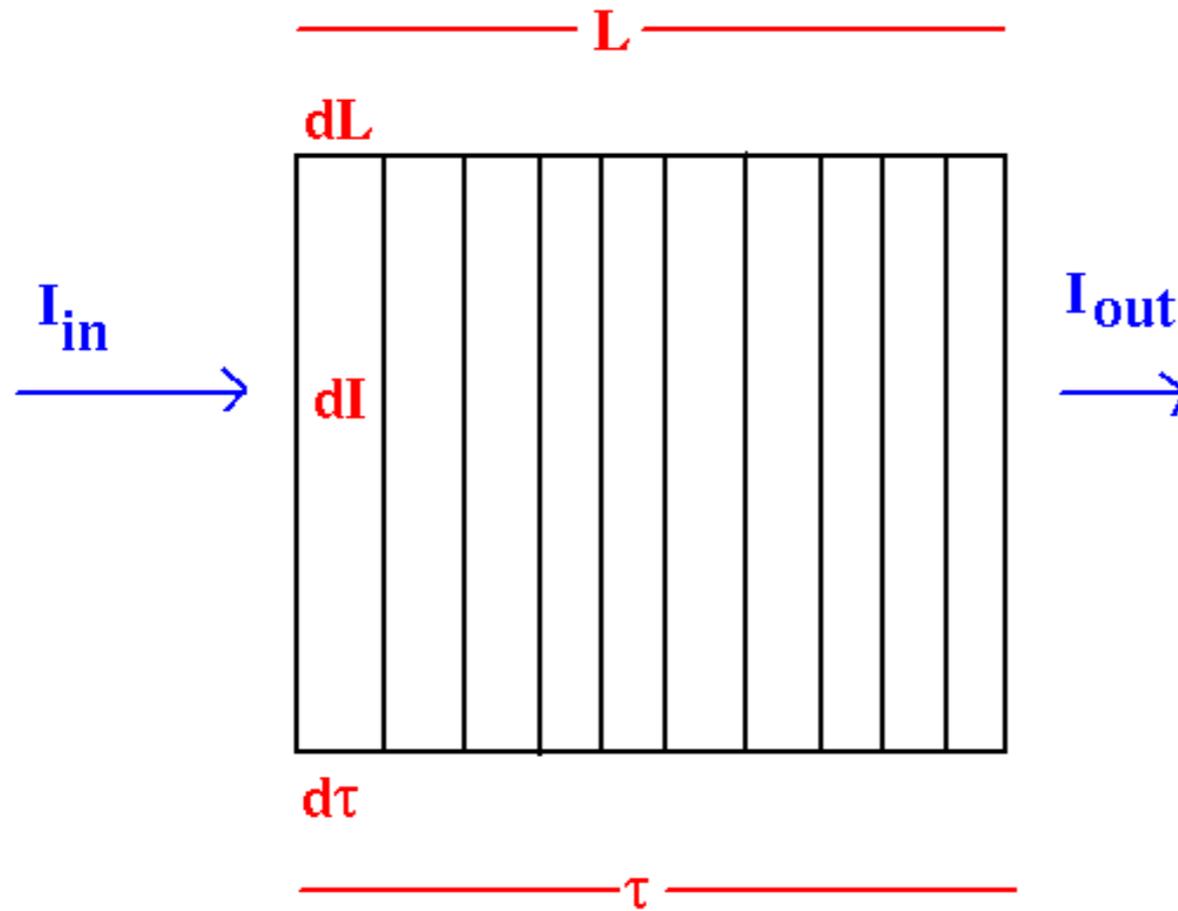
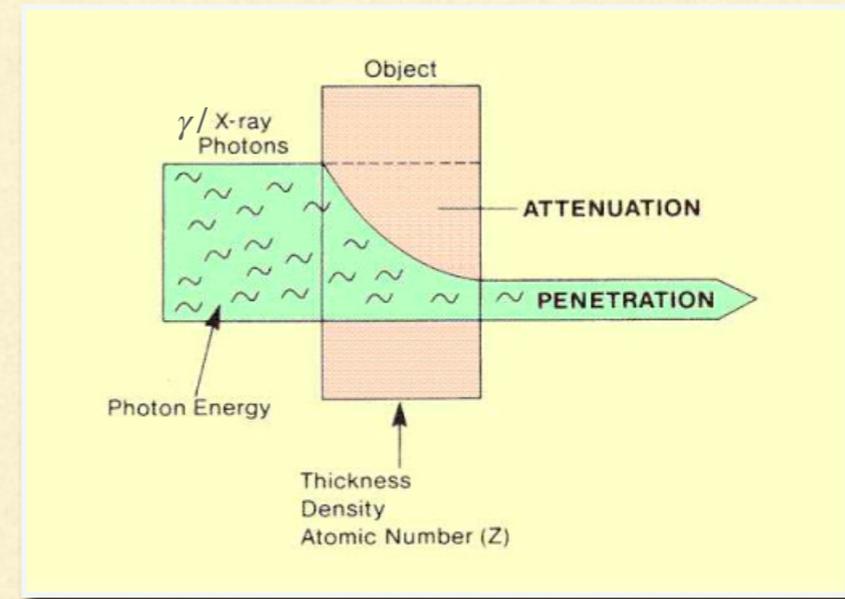
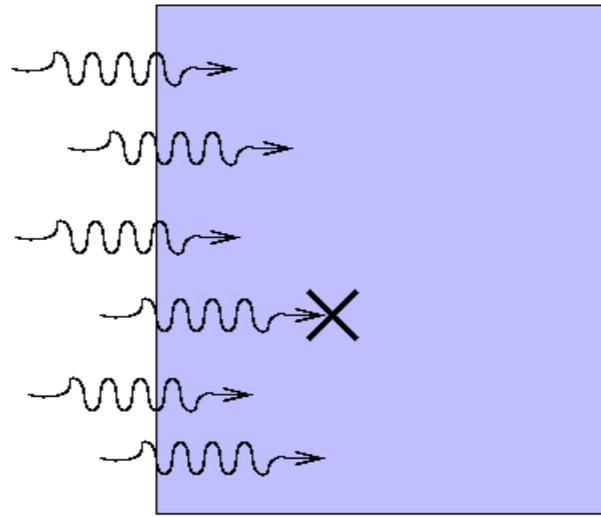
El *camino libre medio* del fotón en un medio uniforme de densidad  $n$  es

$$\lambda_\gamma = \frac{1}{\sigma n}.$$

La probabilidad de que el fotón sea absorbido luego de haber atravesado una distancia  $L$  es

$$P_L = 1 - e^{-L/\lambda_\gamma}.$$

---



Optical depth

## Creación de pares en un campo Coulombiano

El umbral de energía para que un rayo  $\gamma$  cree un par  $e^\pm$  en el campo electrostático de un núcleo  $N$  de carga  $eZ$  es  $2m_e c^2 \sim 1.022$  MeV.

La sección eficaz para el proceso es:

$$\sigma_{\gamma N \rightarrow e^\pm} = 4\alpha Z^2 r_e^2 \left[ \frac{7}{9} \ln \left( \frac{2E_\gamma}{m_e c^2} \right) - \frac{109}{54} \right] \quad \text{para} \quad \frac{2E_{e^+} E_{e^-}}{E_\gamma} \ll \frac{m_e c^2}{\alpha Z^2}$$

y

$$\sigma_{\gamma N \rightarrow e^\pm} = 4\alpha Z^2 r_e^2 \left[ \frac{7}{9} \ln \left( \frac{183}{Z^{1/3}} \right) - \frac{1}{54} \right] \quad \text{para} \quad \frac{2E_{e^+} E_{e^-}}{E_\gamma} \gg \frac{m_e c^2}{\alpha Z^2}.$$

Aquí  $E_{e^\pm}$  es la energía de los leptones producidos. La primera ecuación se usa para núcleos sin apantallamiento (gases completamente ionizados), mientras que la segunda para casos con apantallamiento.

Notar que como  $r_e = 2.8 \times 10^{-13}$  cm, la sección eficaz es pequeña y el camino libre medio en el medio interestelar (donde típicamente  $n_{\text{ISM}} \sim 0.01 - 1$  cm $^{-3}$ ) es extremadamente largo. Esto significa que la Galaxia es esencialmente transparente a los rayos  $\gamma$ .

## Absorción de fotones $\gamma$ en un campo de radiación

Un fotón de energía  $E_\gamma$  puede producir un par  $e^\pm$  en una interacción con un fotón de energía  $E_{\text{ph}}$  si

$$E_\gamma E_{\text{ph}} (1 - \cos \theta) > 2(m_e c^2)^2,$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre las direcciones de movimiento de los fotones.

La sección eficaz total de la aniquilación  $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$  está dada por:

$$\sigma_{\gamma\gamma}(E_\gamma, E_{\text{ph}}) = \frac{3}{16} \sigma_T (1 - \beta^2) \left[ 2\beta(\beta^2 - 2) + (3 - \beta^4) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \right],$$

donde  $\sigma_T$  es la sección eficaz de Thomson y

$$(1 - \beta^2) = \frac{2(m_e c^2)^2}{E_\gamma E_{\text{ph}} (1 - \cos \theta)} \quad 0 \leq \beta < 1.$$

---

Suponiendo isotropía en la distribución de los fotones blanco, es válida la siguiente aproximación para la sección eficaz:

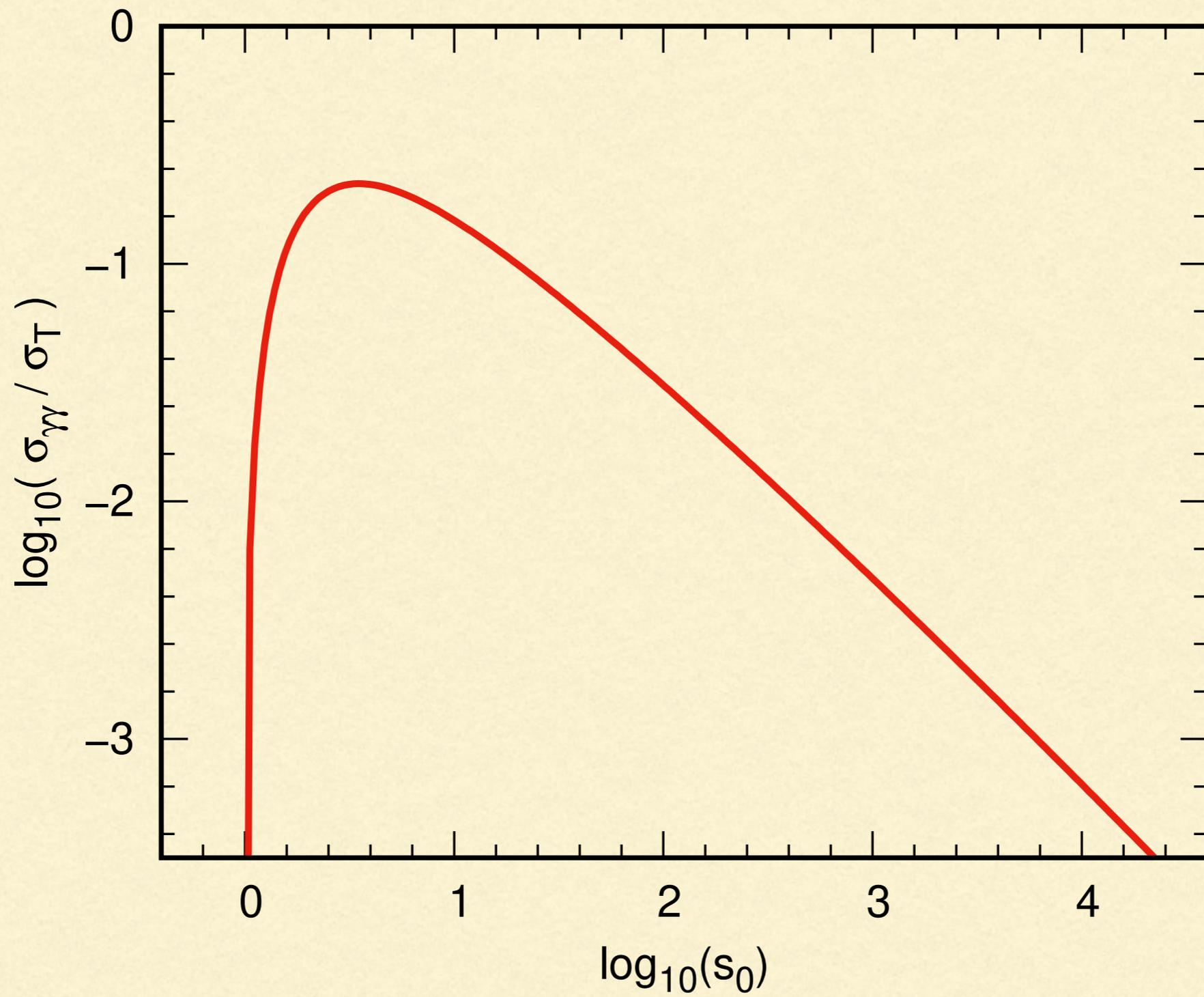
$$\sigma_{\gamma\gamma}(s_0) = \frac{3\sigma_T}{2s_0^2} \left[ \left( s_0 + \frac{1}{2} \ln s_0 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2s_0} \right) \ln (\sqrt{s_0} + \sqrt{s_0 - 1}) - \left( s_0 + \frac{4}{9} - \frac{1}{9s_0} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{s_0}} \right],$$

donde el parámetro

$$s_0 = \frac{E_\gamma E_{\text{ph}}}{(m_e c^2)^2}$$

determina la energía de los leptones inyectados en el sistema de referencia del centro de masas:  $E_{e^\pm}^{\text{CM}} = m_e c^2 s_0$ .

---



---

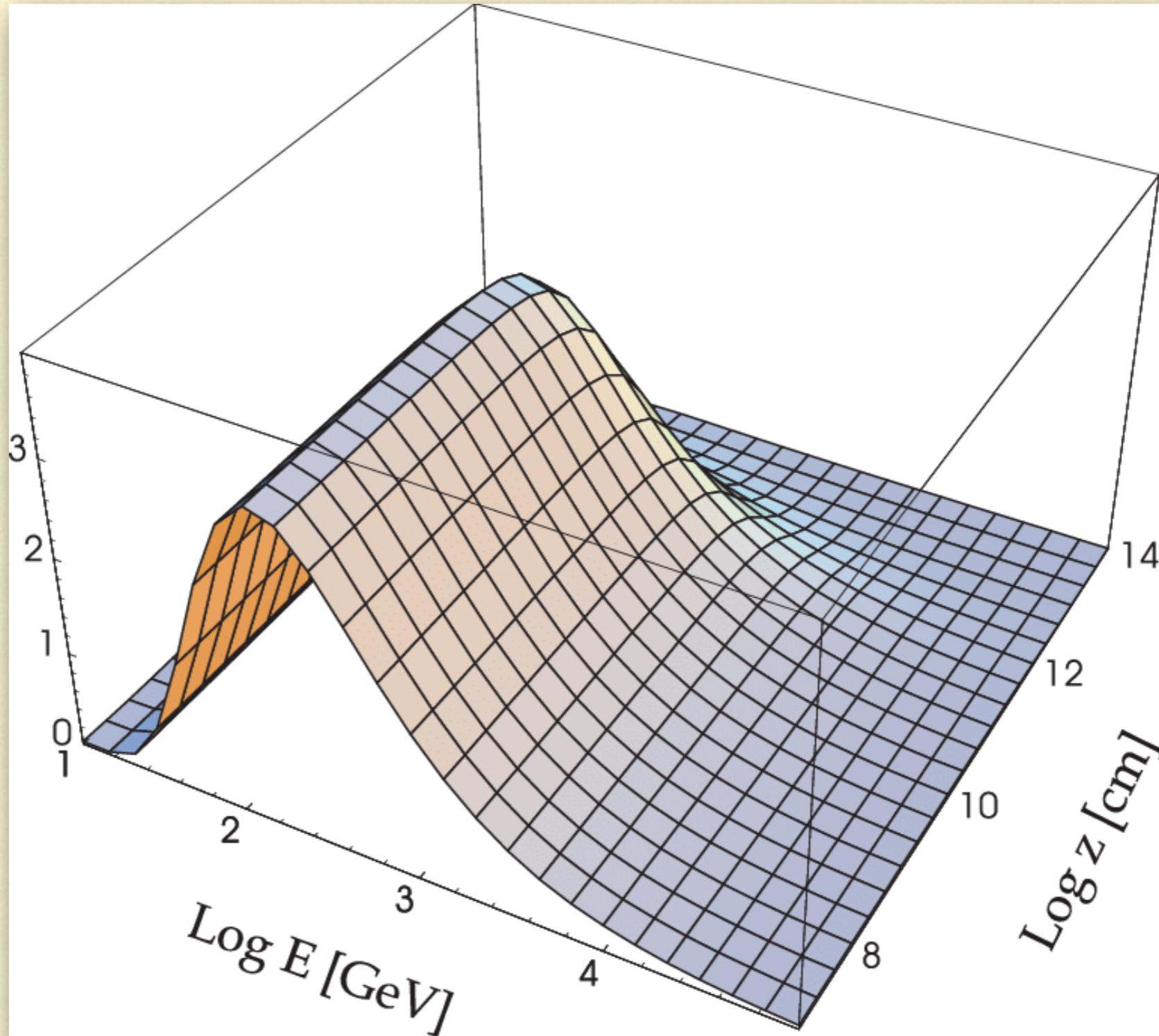
Si un fotón de energía  $E_\gamma$  debe atravesar una región de tamaño  $R$  con un campo de fotones isotrópico de densidad  $n_{\text{ph}}$ , la profundidad óptica será:

$$\tau_\gamma(E_\gamma) = \int_{E_{\text{th}}(E_\gamma)}^{\infty} \int_0^R n_{\text{ph}}(E_{\text{ph}}, r) \sigma_{\gamma\gamma}(E_\gamma, E_{\text{ph}}) dE_{\text{ph}} dr,$$

con  $E_{\text{th}} = (m_e c^2)^2 / E_\gamma$  la energía umbral de los fotones blanco.

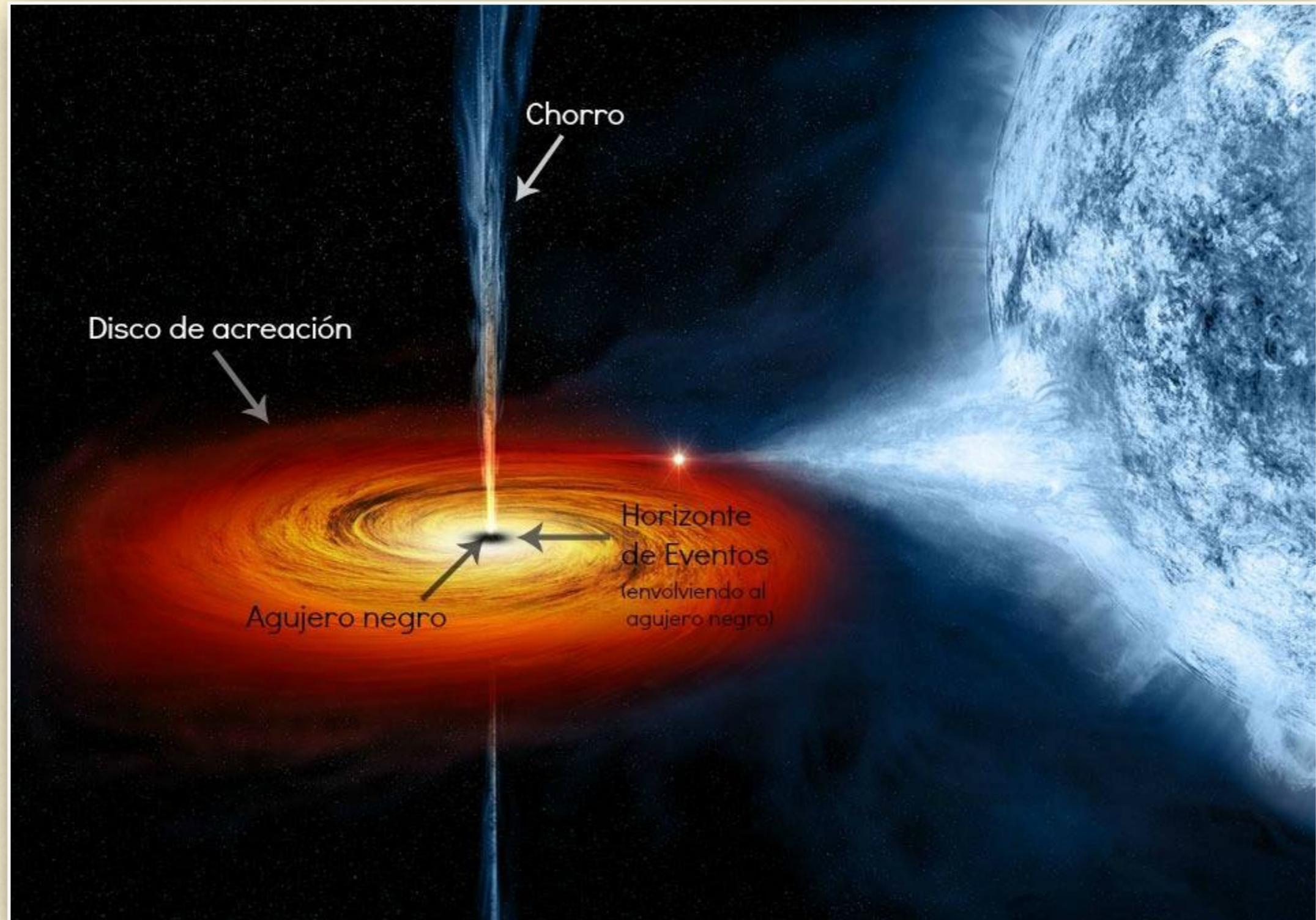
En medios astrofísicos  $n_{\text{ph}}$  puede ser muy alta en cercanía de fuentes, por lo que la absorción en campos de radiación es un fenómeno común. Por otro lado, la densidad de fotones media interestelar de nuestra Galaxia es demasiado baja como para que la opacidad sea significativa. En cambio, sobre escalas cosmológicas la opacidad del fondo cósmico de radiación a la propagación de rayos  $\gamma$  puede ser importante.

---

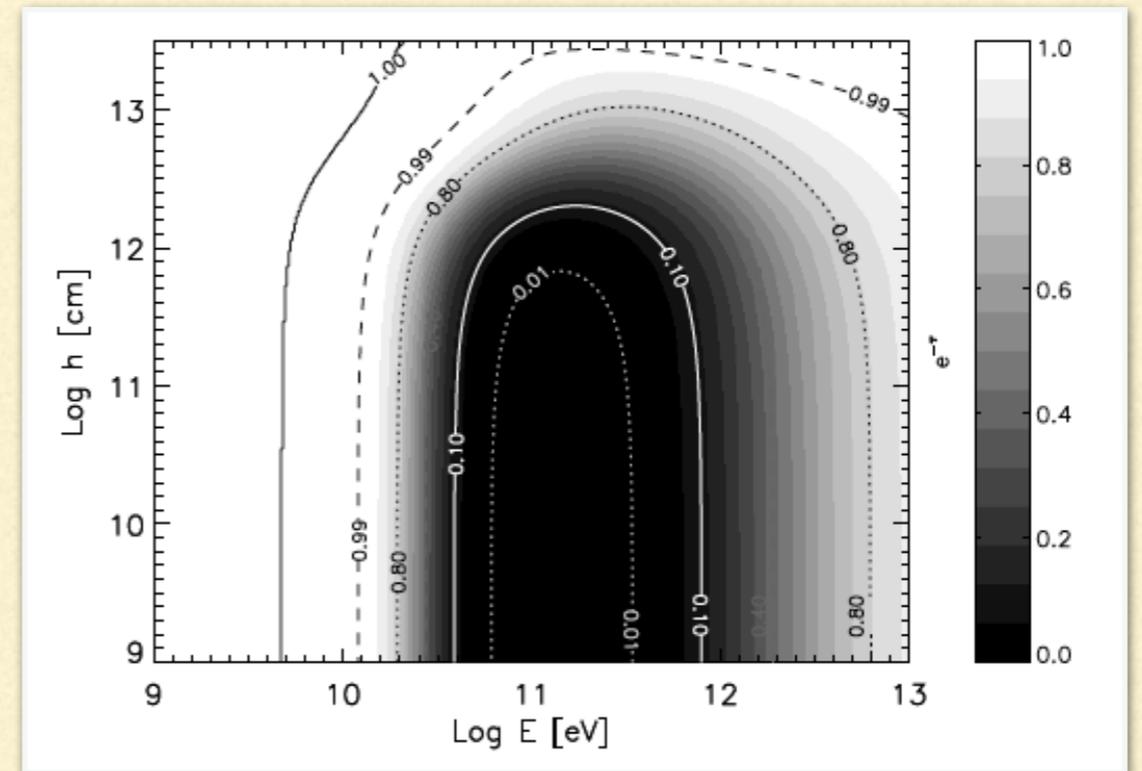
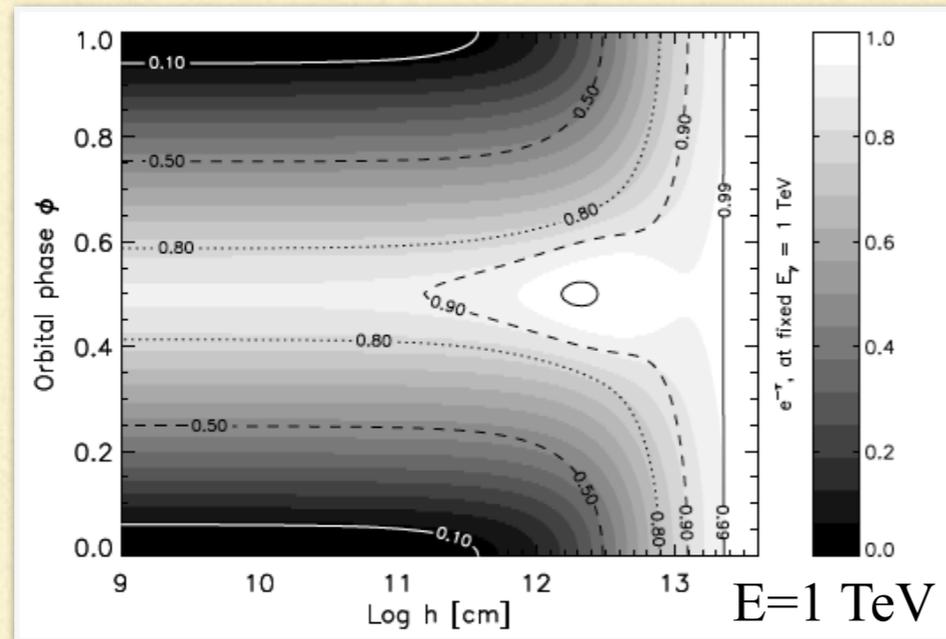
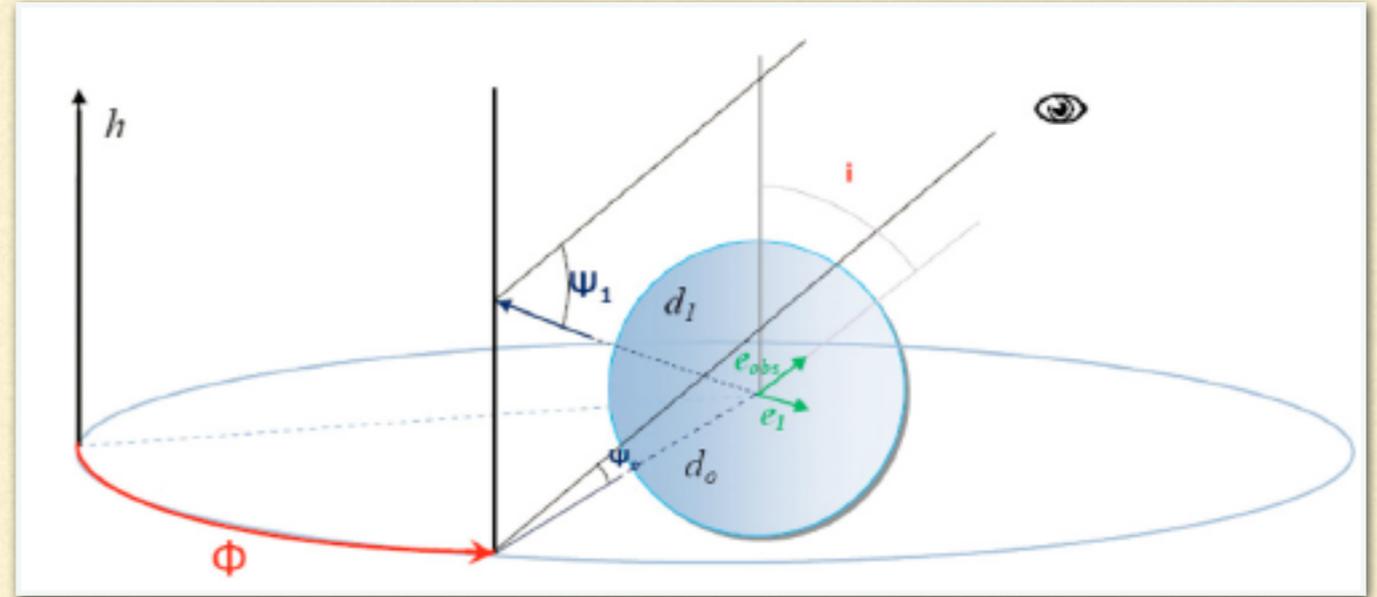
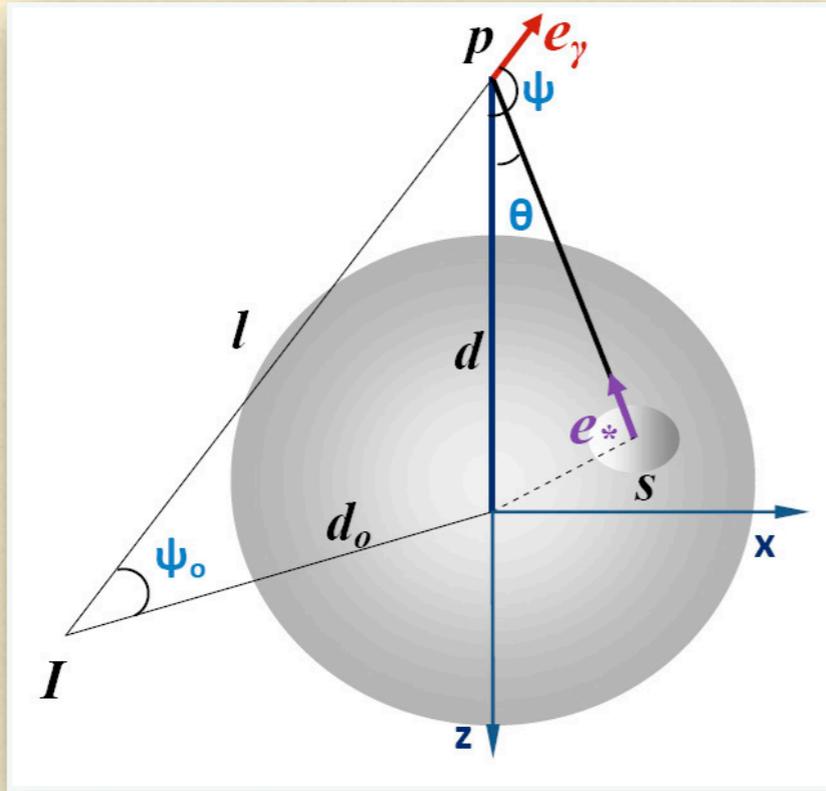


Opacidad.  $z$ : distancia a la fuente (estrella)

# Absorción de rayos gamma por los fotones de una estrella (Romero et al. 2010)



# Absorción de rayos gamma por los fotones de una estrella (Romero et al. 2010)



En el caso de tener una fuente de rayos  $\gamma$  con una luminosidad intrínseca  $L_\gamma$ , la atenuación por  $\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$  intrínseca será determinada por la cantidad de fotones absorbentes y el tamaño de la fuente. La mayor eficiencia de absorción  $\gamma\gamma$  se da para fotones blanco cuya energía es cercana a la umbral de la interacción, y por lo tanto inversamente proporcional a la de los rayos  $\gamma$ :

$$E_{\text{ph}} \sim \frac{(m_e c^2)^2}{E_\gamma}.$$

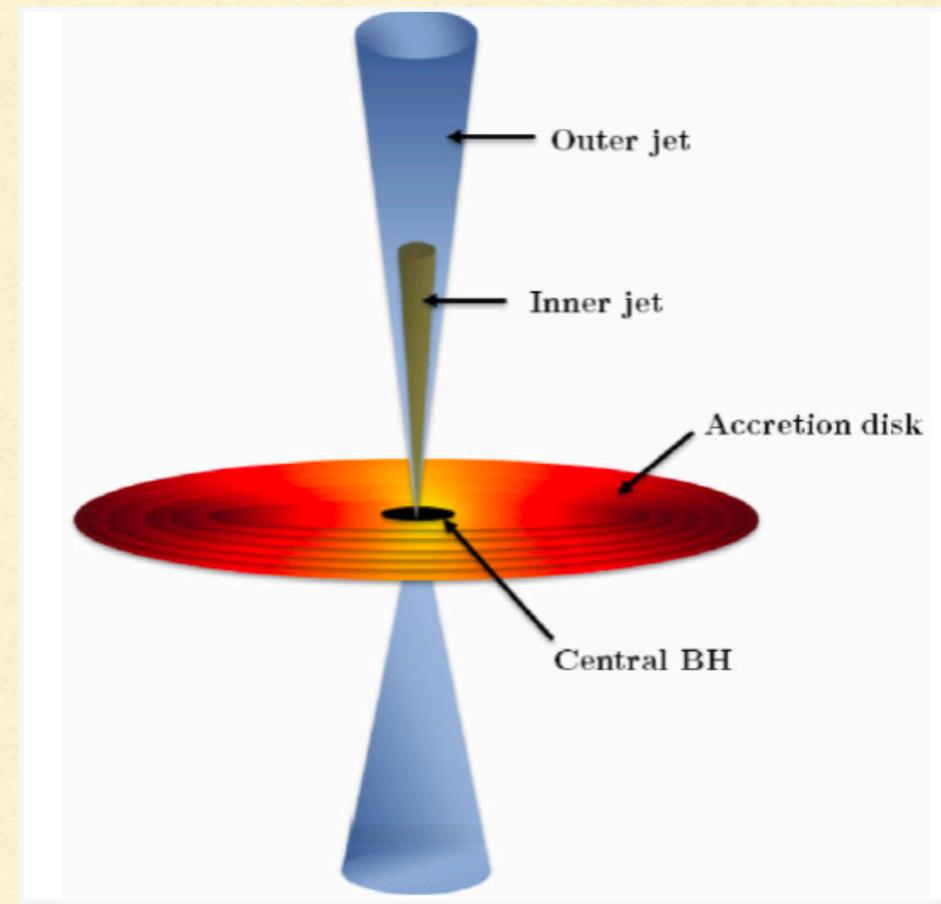
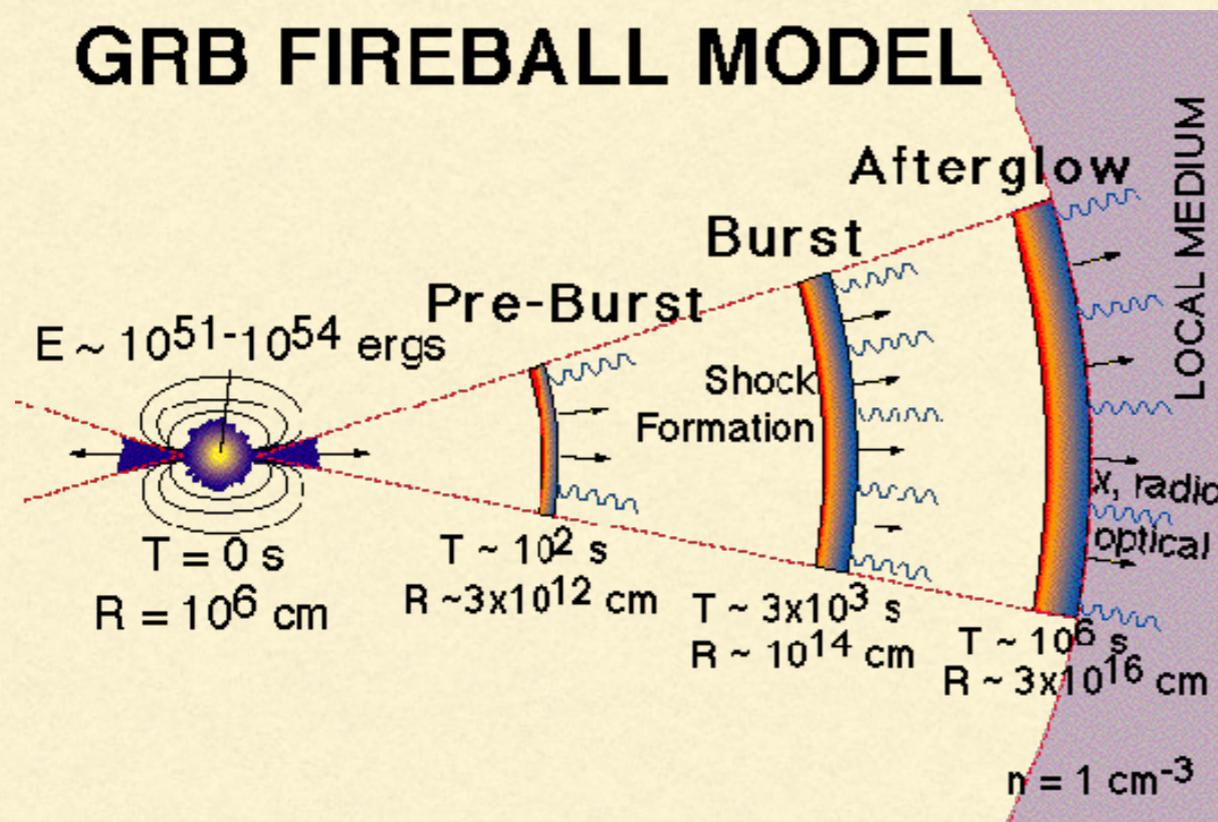
El *parámetro de compacticidad*  $l$  para una fuente se define como:

$$l \equiv \frac{L_{\text{ph}}}{R}, \quad [l] = \text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

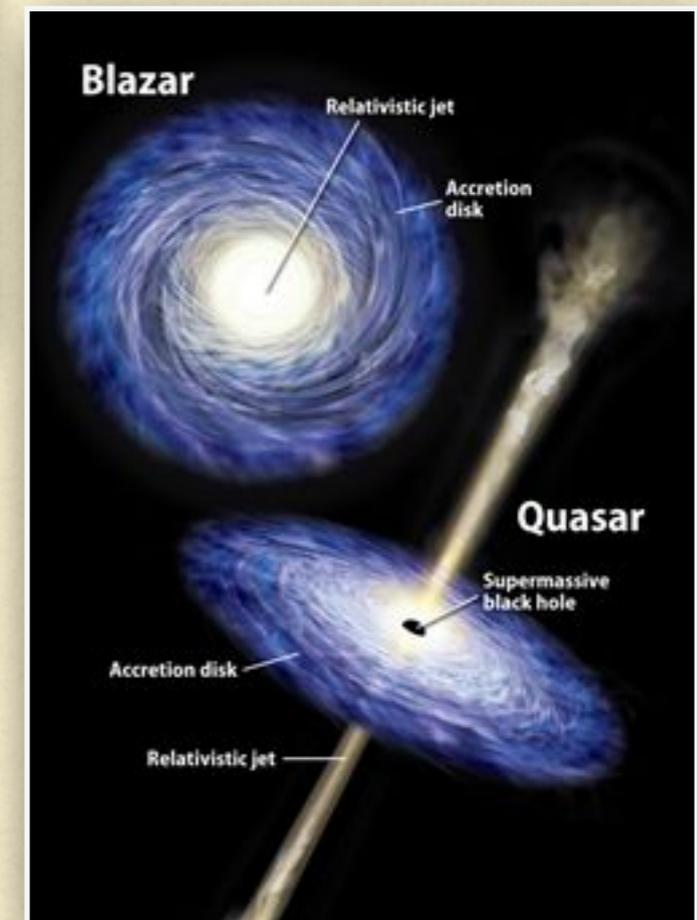
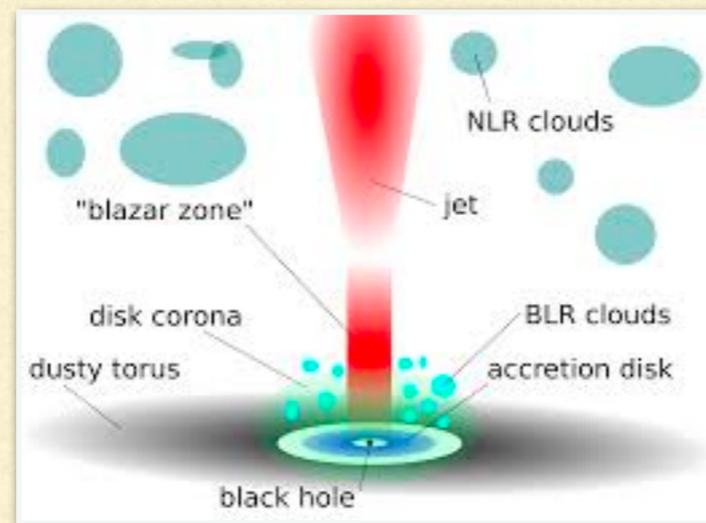
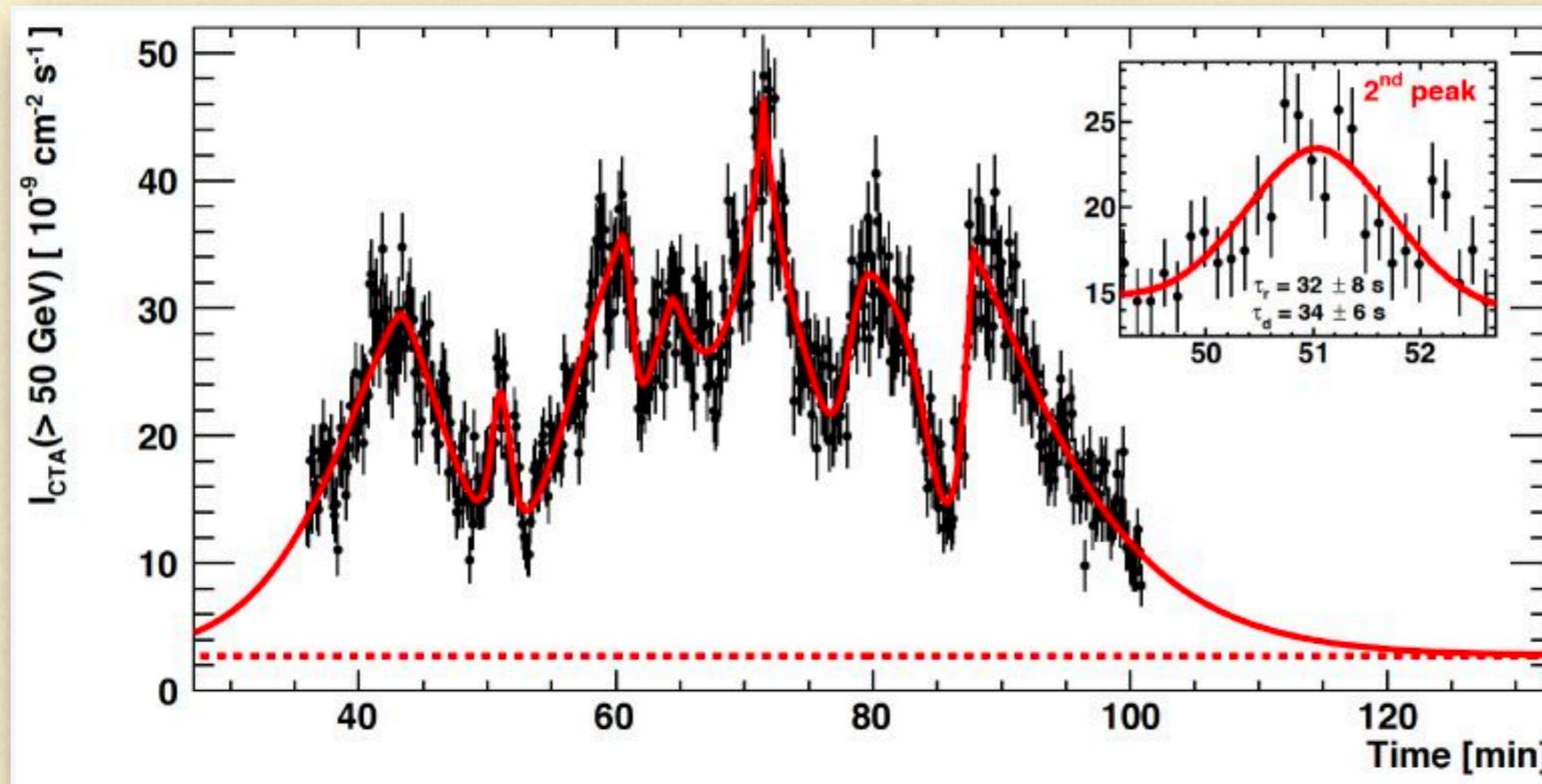
donde  $R$  es el tamaño típico y  $L_{\text{ph}}$  la luminosidad del campo de radiación absorbente de la fuente. Aproximando  $L_{\text{ph}} \approx 4\pi c n_{\text{ph}} R^2 E_{\text{ph}}$ , es posible estimar la opacidad  $\tau_{\gamma\gamma}$  de la siguiente manera:

$$\tau_{\gamma\gamma}(E_\gamma) \approx \sigma_{\gamma\gamma} n_{\text{ph}} R \approx \frac{\sigma_{\gamma\gamma}}{4\pi c E_{\text{ph}}} l.$$

La región central de un AGN puede tener luminosidades isotrópicas de  $L_\gamma \sim 10^{48} \text{ erg s}^{-1}$  y dimensiones  $R \sim 10^{15} \text{ cm}$ , lo que da una compacticidad  $l \sim 10^{33} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-1}$ . En el caso particular en que  $E_\gamma \sim 1 \text{ MeV} \sim E_{\text{ph}}$  y usando que cerca del umbral  $\sigma_{\gamma\gamma} \simeq \sigma_T/2$ , resulta  $\tau_{\gamma\gamma} \sim 10^2$ . Por consiguiente, fuentes como esta pueden estar fuertemente auto-absorbidas a menos que la emisión no sea isotrópica. De hecho, el que se observe emisión  $\gamma$  indica que debe existir una importante anisotropía o *beaming* el cual es consistente con la idea de que la radiación  $\gamma$  se origina en *jets* – chorros de partículas eyectadas por la fuente central.



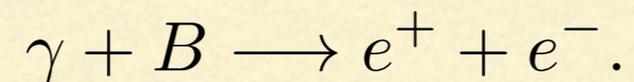
# Variabilidad de blazars



---

## Absorción de fotones en campos magnéticos

Un fotón  $\gamma$  puede ser convertido en un par  $e^\pm$  en presencia de un campo magnético:



La razón a la que se produce esta transformación es muy pequeña a menos que

$$\xi = \left( \frac{E_\gamma}{2m_e c^2} \right) \left( \frac{B}{B_{\text{cr}}} \right) \sim 0.1,$$

donde

$$B_{\text{cr}} = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} \sim 4.4 \times 10^{13} \text{ G}.$$

---

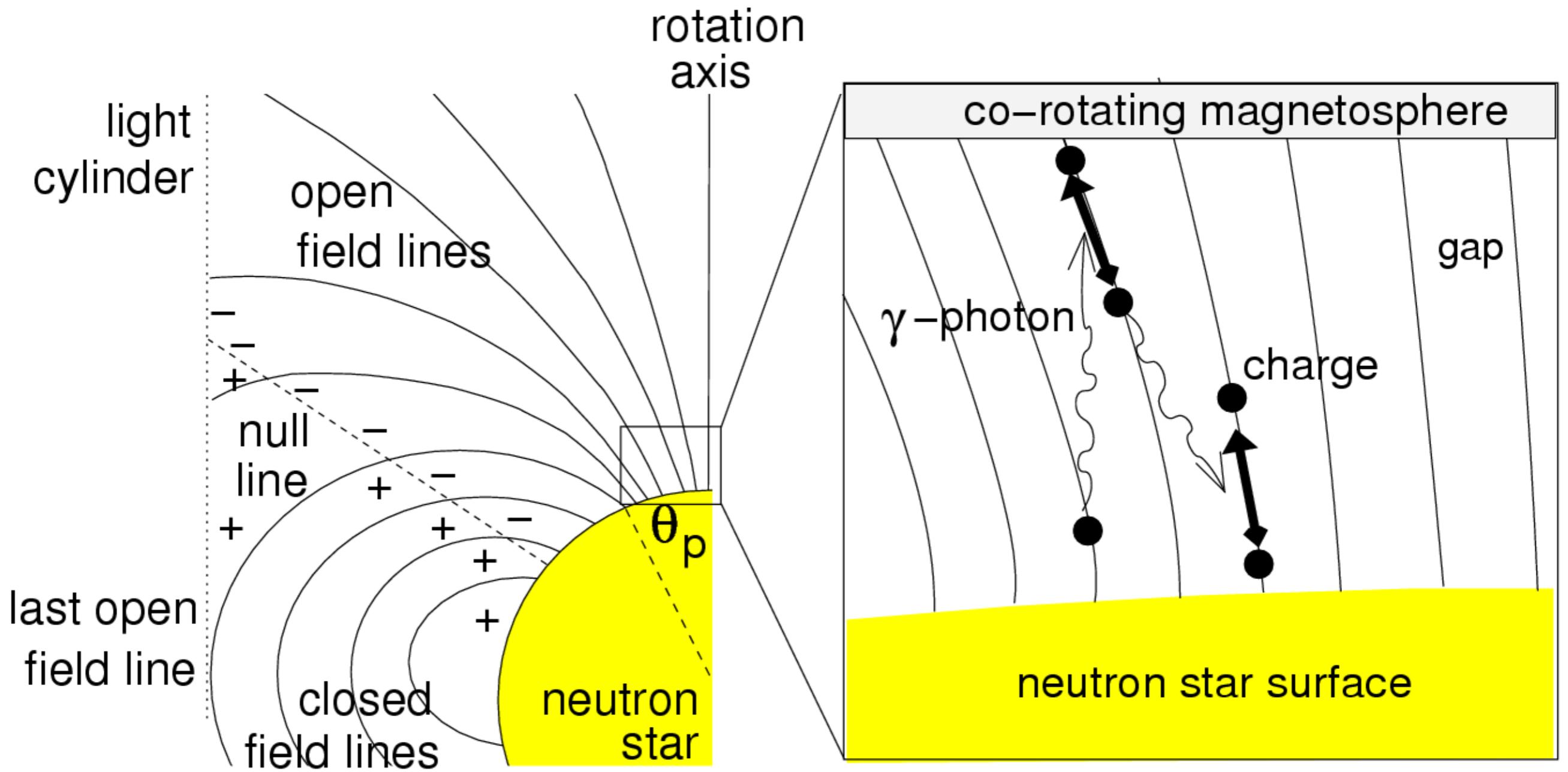
El camino libre medio de un fotón con energía  $E_\gamma > m_e c^2$  en un campo  $B$  es

$$\lambda_\gamma = \frac{44}{10(e^2 \hbar)} \frac{\hbar}{m_e c} \frac{B_{\text{cr}}}{B \sin(\theta)} \exp\left(\frac{4}{3\xi}\right),$$

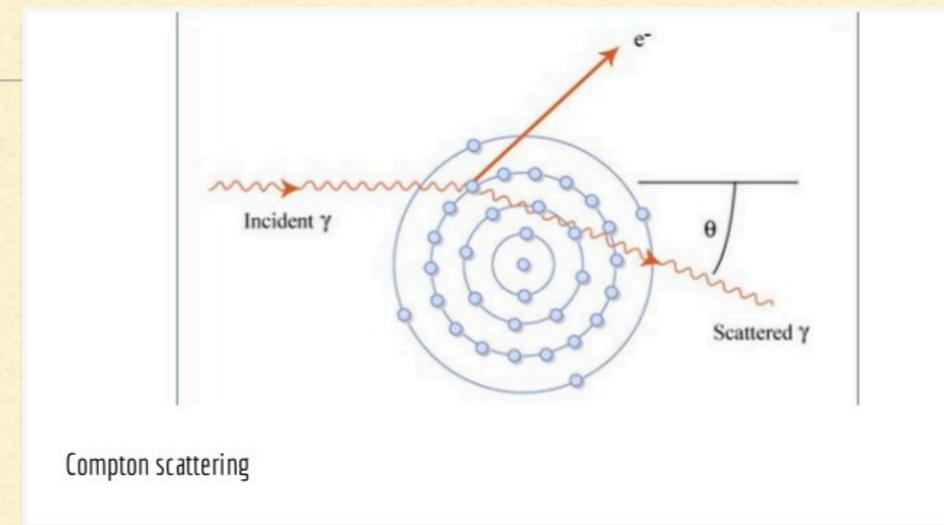
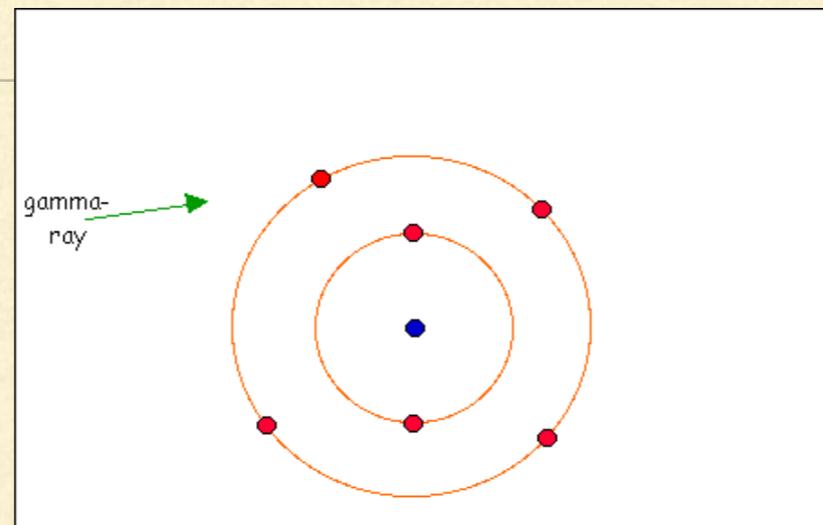
donde  $\theta$  es el ángulo entre la dirección de propagación del fotón y  $\vec{B}$ . Para  $\theta = 0$  no hay producción de pares. Como la creación magnética de pares es muy sensible a la intensidad del campo magnético, el criterio para que ocurra es:

$$\frac{E_\gamma}{2m_e c^2} \left( \frac{B \sin(\theta)}{B_{\text{cr}}} \right) \geq \frac{1}{15}.$$

---



# Absorción Compton



La interacción Compton directa puede ser una causa importante de absorción para fotones de energías  $\sim 1$  MeV. Cuando el electrón está en reposo, la energía  $E_{\gamma}^1$  del fotón dispersado es:

$$E_{\gamma}^1 = \frac{E_{\gamma}^0}{1 + (E_{\gamma}^0/m_e c^2)(1 - \cos(\theta))},$$

donde  $\theta$  es el ángulo de dispersión y  $E_{\gamma}^0$  la energía original del fotón. La energía cinética que gana el electrón es:

$$\Delta E_e = E_e^{\text{kin}} = \frac{E_{\gamma}^0(1 - \cos(\theta))}{m_e c^2 [1 + (E_{\gamma}^0/m_e c^2)(1 - \cos(\theta))]}.$$

---

La sección eficaz para la interacción Compton directa depende de la polarización de los fotones. Si el vector eléctrico de los fotones incidentes forma un ángulo  $\Theta$  con el de los fotones emergentes, la sección eficaz puede expresarse como (en unidades de  $\text{cm}^2 \text{ electrón}^{-1}$ ):

$$d\sigma_{\text{C}}(E_{\gamma}^1, E_{\gamma}^0, \Theta) = \frac{r_e^2}{4} \left( \frac{E_{\gamma}^1}{E_{\gamma}^0} \right)^2 \left( \frac{E_{\gamma}^0}{E_{\gamma}^1} + \frac{E_{\gamma}^1}{E_{\gamma}^0} - 2 + 4 \cos^2(\Theta) \right) d\Omega.$$

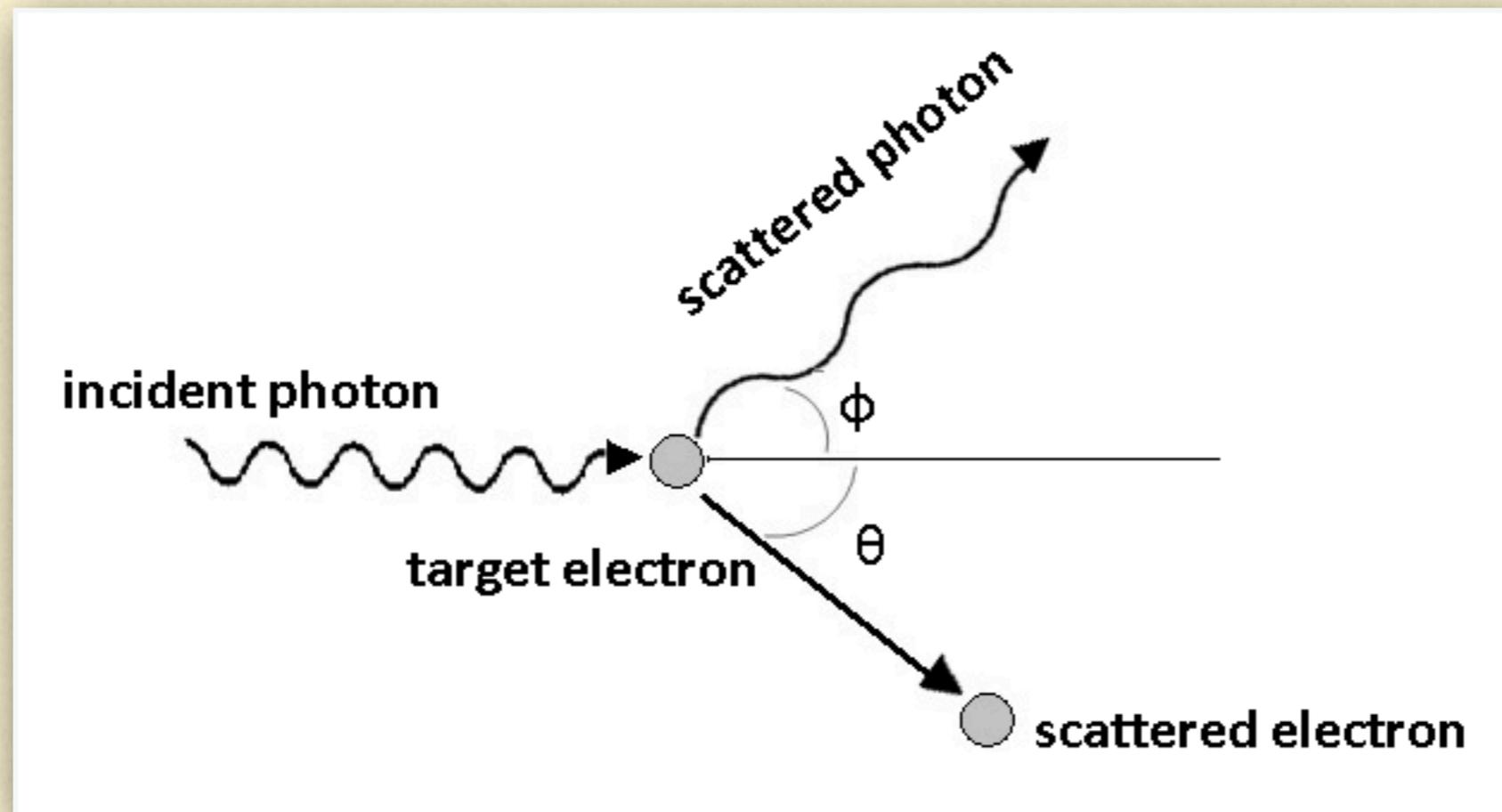
Si el fotón incidente no está polarizado:

$$d\sigma_{\text{C}}(E_{\gamma}^1, E_{\gamma}^0, \Theta) = \frac{r_e^2}{4} \left( \frac{E_{\gamma}^1}{E_{\gamma}^0} \right)^2 \left( \frac{E_{\gamma}^0}{E_{\gamma}^1} + \frac{E_{\gamma}^1}{E_{\gamma}^0} - \sin^2(\Theta) \right) d\Omega.$$

---

A bajas energías, e integrando sobre  $d\Omega$ , la sección eficaz es la de Thomson:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2.$$



---

## Efectos Doppler (cinemático, cosmológico y gravitacional)

Los rayos  $\gamma$  pueden ser afectados por el estado de movimiento de la fuente o por la presencia de campos gravitacionales intensos en la fuente.

Si la fuente se mueve hacia el detector a una velocidad  $c\beta$  formando un ángulo  $\theta$  con la visual, entonces la energía de la radiación emitida se ve modificada por efecto Doppler:

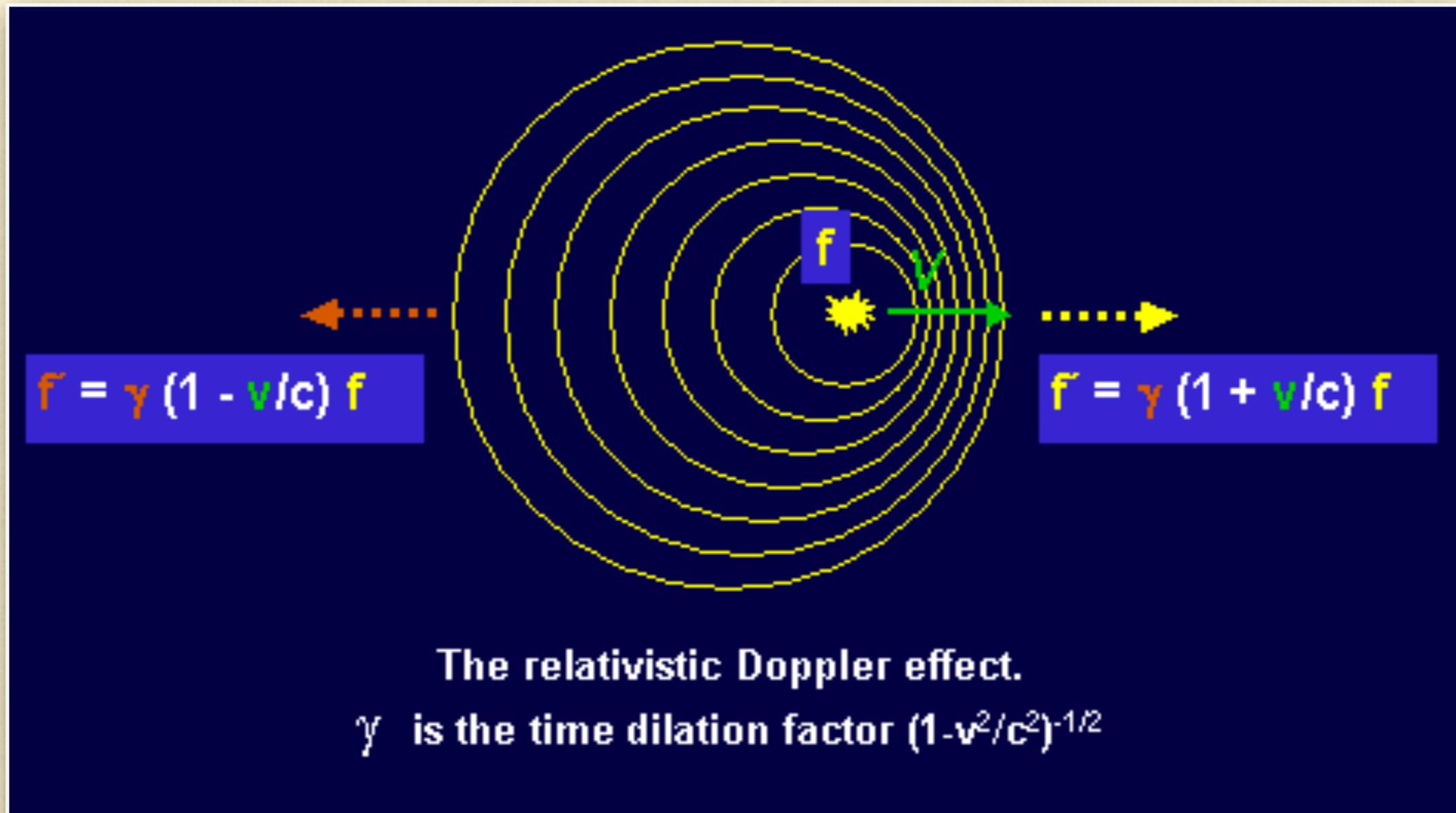
$$E_{\gamma}^{\text{obs}} = \delta E_{\gamma}^0,$$

donde  $\delta = [\gamma(1 - \beta \cos(\theta))]^{-1}$  es el factor Doppler,  $E_{\gamma}^0$  es la energía del fotón en el sistema de referencia de la fuente y  $E_{\gamma}^{\text{obs}}$  es la energía en el sistema de referencia del observador. Cuando la fuente se aleja del observador:

$$\delta = [\gamma(1 + \beta |\cos(\theta)|)]^{-1} < 1,$$

y la energía observada resulta menor que la emitida.

---



---

La expansión cosmológica del Universo también modifica la energía de los fotones. El *corrimiento cosmológico al rojo* se define como:

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0},$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de los fotones recibidos y  $\lambda_0$  es la que tenían al ser emitidos. La variación de energía del fotón debida a la expansión es:

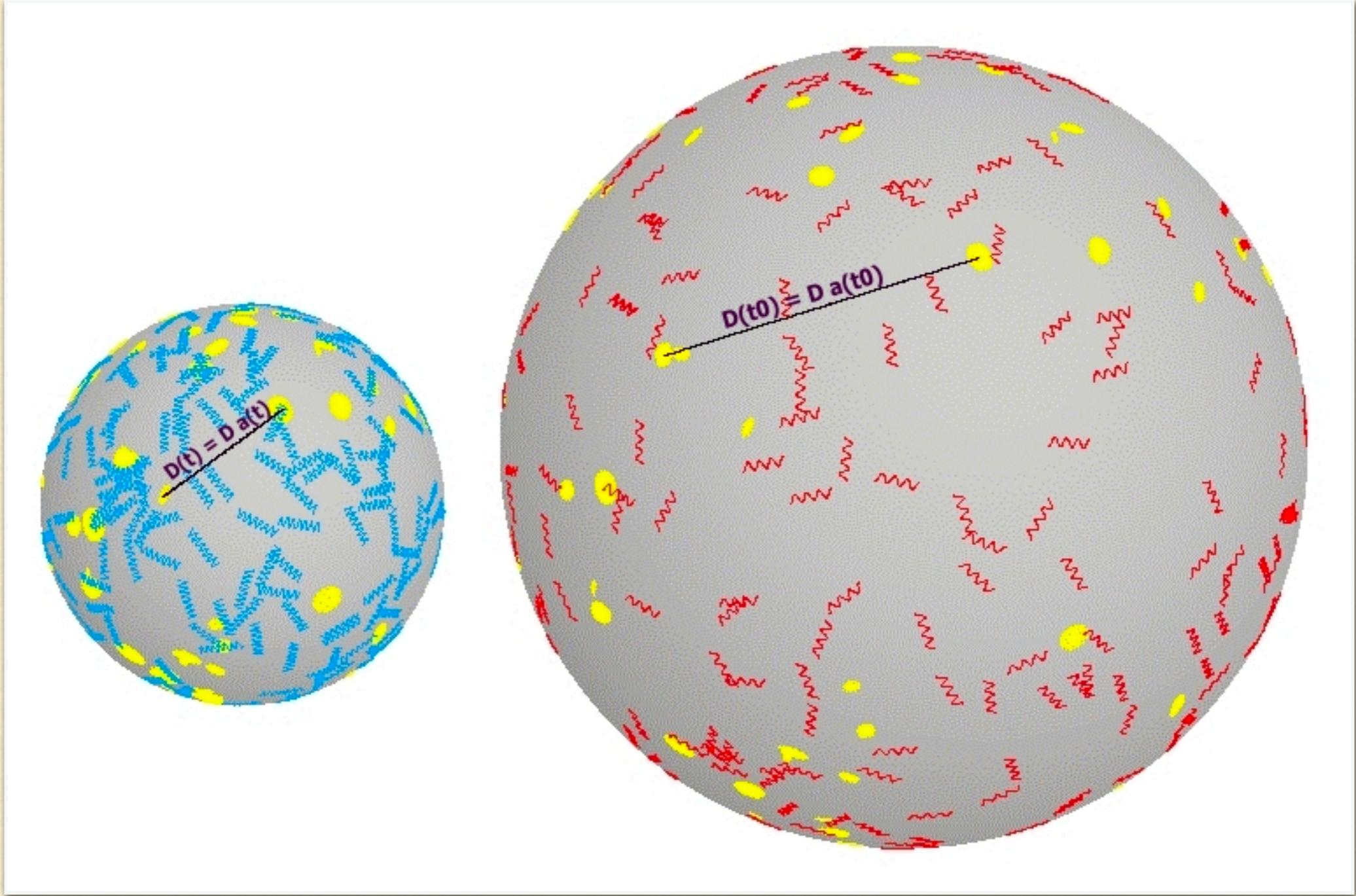
$$E_{\gamma}^{\text{obs}} = \frac{E_{\gamma}^0}{1 + z}.$$

El corrimiento al rojo puede expresarse en función del factor escala del Universo al tiempo actual  $t_{\text{actual}}$  y el factor de escala cuando el fotón fue emitido  $t_{\text{emitido}}$ :

$$(1 + z) = \frac{R(t_{\text{actual}})}{R(t_{\text{emitido}})}.$$

La diferencia  $t_{\text{actual}} - t_{\text{emitido}}$  es el tiempo en que la radiación viajó hasta el observador. El factor de escala se determina a través de un modelo cosmológico relativista.

---

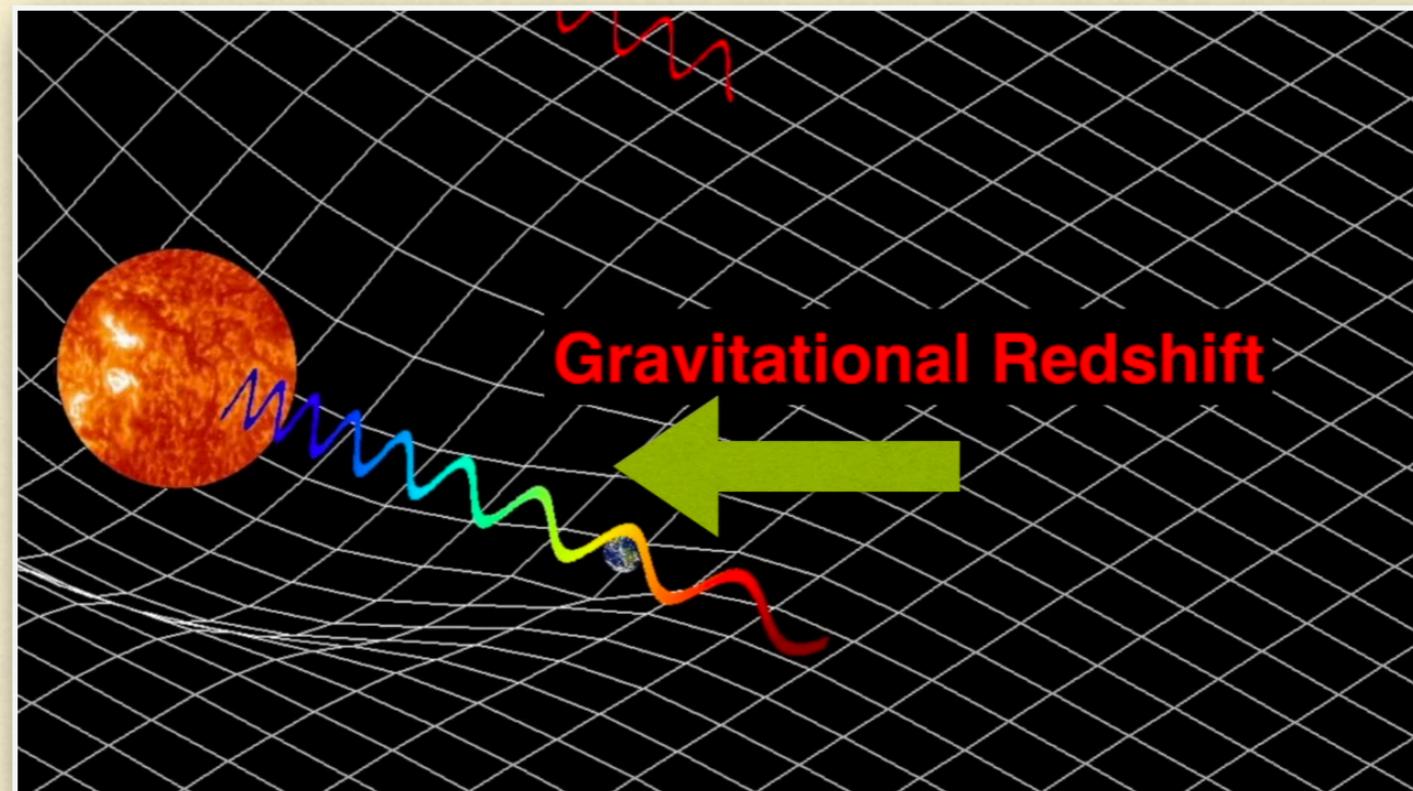


Si la fuente de los fotones está sometida a un campo gravitacional fuerte, la energía de un fotón emitido en la fuente sufrirá un *corrimiento al rojo* de origen gravitacional, de acuerdo con la teoría de la Relatividad General. Si la fuente tiene una masa  $M$  y un radio  $R$ , la variación de la energía de un fotón emitido con energía  $E_\gamma^0$  será

$$\Delta E_\gamma = \frac{GM}{c^2 R} E_\gamma^0,$$

de tal forma que

$$E_\gamma^{\text{obs}} = E_\gamma^0 - \Delta E_\gamma.$$

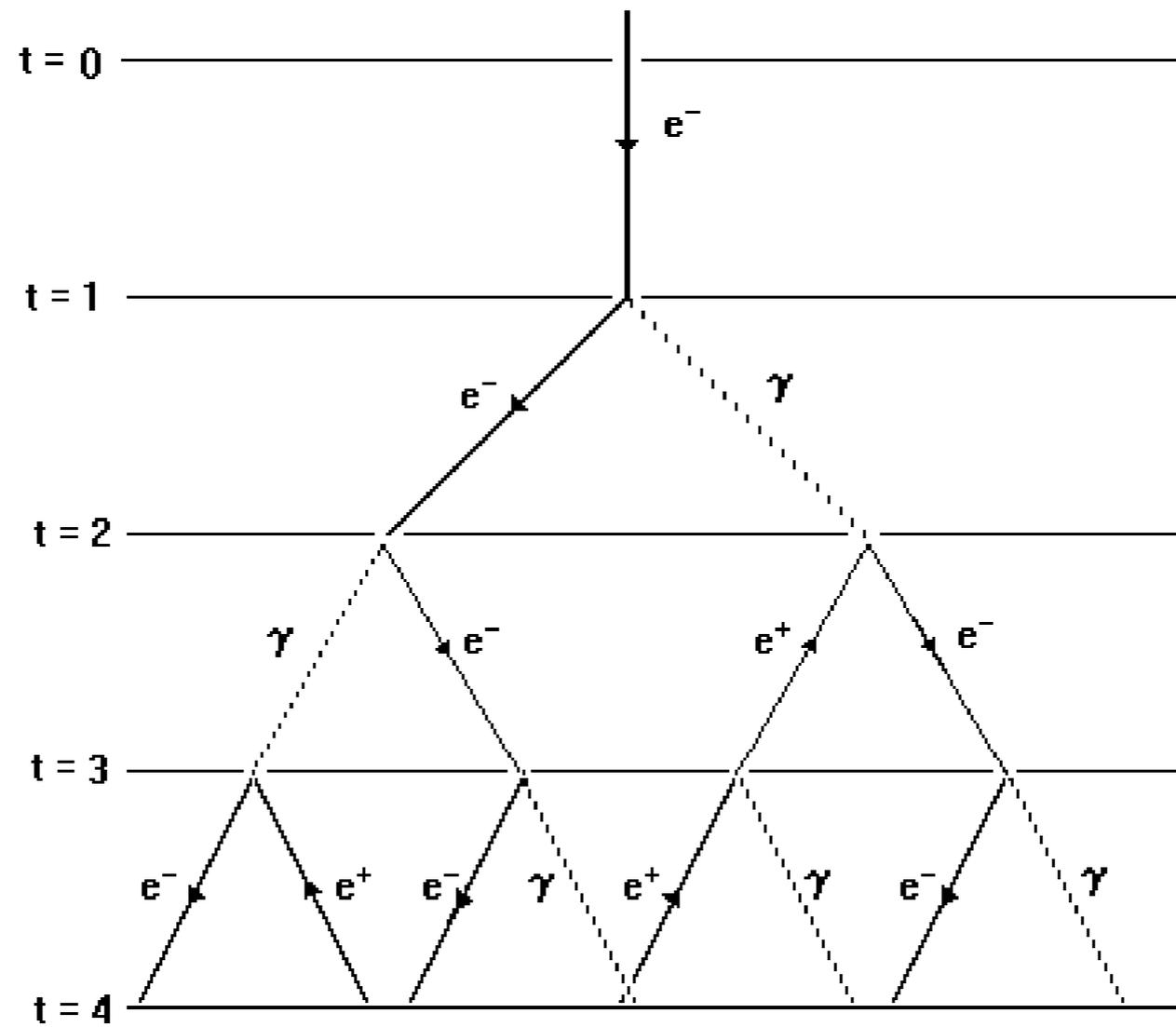


---

## Cascadas electromagnéticas

La inyección de rayos  $\gamma$  de alta energía en medios formados por materia (plasma, gas, sólidos), radiación o campos magnéticos resulta en la formación de pares  $e^\pm$  si la profundidad óptica a la propagación de los  $\gamma$  es  $\tau \gtrsim 1$ . Si estos pares tienen suficiente energía, pueden producir, a su vez, más radiación  $\gamma$  por Bremsstrahlung relativista, efecto Compton inverso o radiación sincrotrón. En estas condiciones, una cascada electromagnética se desarrollará en el medio. El resultado de esta cascada será degradar la energía de los fotones originales y multiplicar el número de leptones. El espectro emergente dependerá del espectro original de inyección y de las características del medio.

---



---

Una vez iniciada, la cascada se desarrollará hasta que las escalas temporales de los diferentes procesos radiativos en competición que producen fotones fuera del rango  $\gamma$ , sea menor que la de los procesos que resultan en rayos  $\gamma$ . La cascada también se detendrá si el tiempo de enfriamiento radiativo de las partículas excede el tiempo de las pérdidas no radiativas o si la profundidad óptica a la propagación de los  $\gamma$  cae por debajo de 1.

Cascadas e.m. se producen en:

- Pulsares
  - Microquasars
  - GRBs
  - AGNs
  - Medio intergaláctico
  - Atmósfera
-

A energías para las cuales  $\tau > 1$ , el efecto sobre el espectro inyectado es una disminución en un factor  $e^{-\tau_{\text{eff}}}$ , donde la opacidad efectiva es menor que la original. Dependiendo de la dureza (pendiente) del espectro inyectado, puede ser más o menos notable la acumulación de fotones con energías por debajo de la condición  $\tau = 1$ .

Consideremos una cascada electromagnética en un medio donde el Bremsstrahlung relativista es el principal mecanismo de enfriamiento. Supongamos que un fotón de energía  $E_\gamma \gg m_e c^2$  incide en tal medio. Su camino libre medio será

$$\lambda_\gamma \sim (\sigma_{\gamma p} n)^{-1},$$

donde  $\sigma_{\gamma p}$  es la sección eficaz para la creación de un par  $e^\pm$  en el medio y  $n$  es su densidad.

El par creado a una profundidad  $\lambda_\gamma = R$  dentro del medio tendrá, a su vez, un camino libre medio de:

$$\lambda_{e^\pm} \sim \frac{1}{\sigma_B n},$$

donde  $\sigma_B$  es la sección eficaz para Bremsstrahlung relativista. La energía de cada elemento del par  $e^\pm$  es

$$E_{e^\pm}^{(1)} \sim \frac{E_0}{2},$$

donde  $E_0 = E_\gamma$ . Después de una distancia  $\lambda_B$  (que es  $\sim \lambda_\gamma = R$ ) cada partícula radía un nuevo fotón con energía

$$E_\gamma^{(1)} = \frac{E_0}{4}.$$

---

Los fotones, al cabo de una distancia  $R$ , crearán nuevos pares. A medida que la cascada se desarrolla el número total de fotones y leptones aumenta pero su energía media disminuye. A una profundidad  $L = Z/R$  el número de partículas será:

$$N(L) \sim e^L,$$

mientras que la energía por partícula a esa profundidad es:

$$E_\gamma \sim E_0 e^{-L}.$$

O sea que la energía va decayendo aproximadamente en forma exponencial con la profundidad.

La cascada cesa cuando se alcanza una energía:

$$E_c \sim E_0 e^{-L_{\max}}$$

o

$$L_{\max} \sim \ln \left( \frac{E_0}{E_c} \right),$$

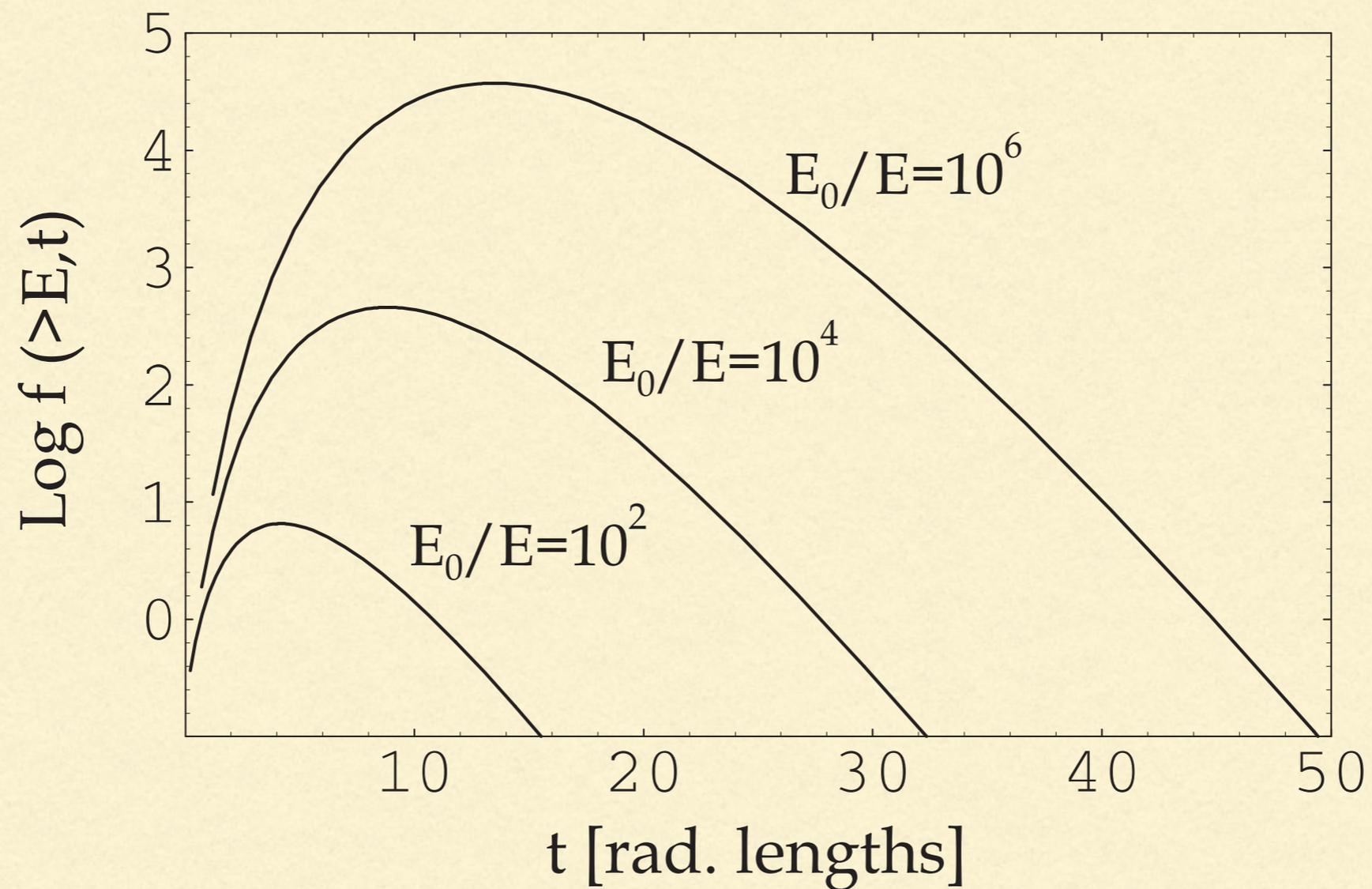
donde  $L_{\max}$  es la distancia a la cual el Bremsstrahlung deja de dominar las pérdidas. El número de fotones a esta profundidad es 1/3 del número total de partículas:

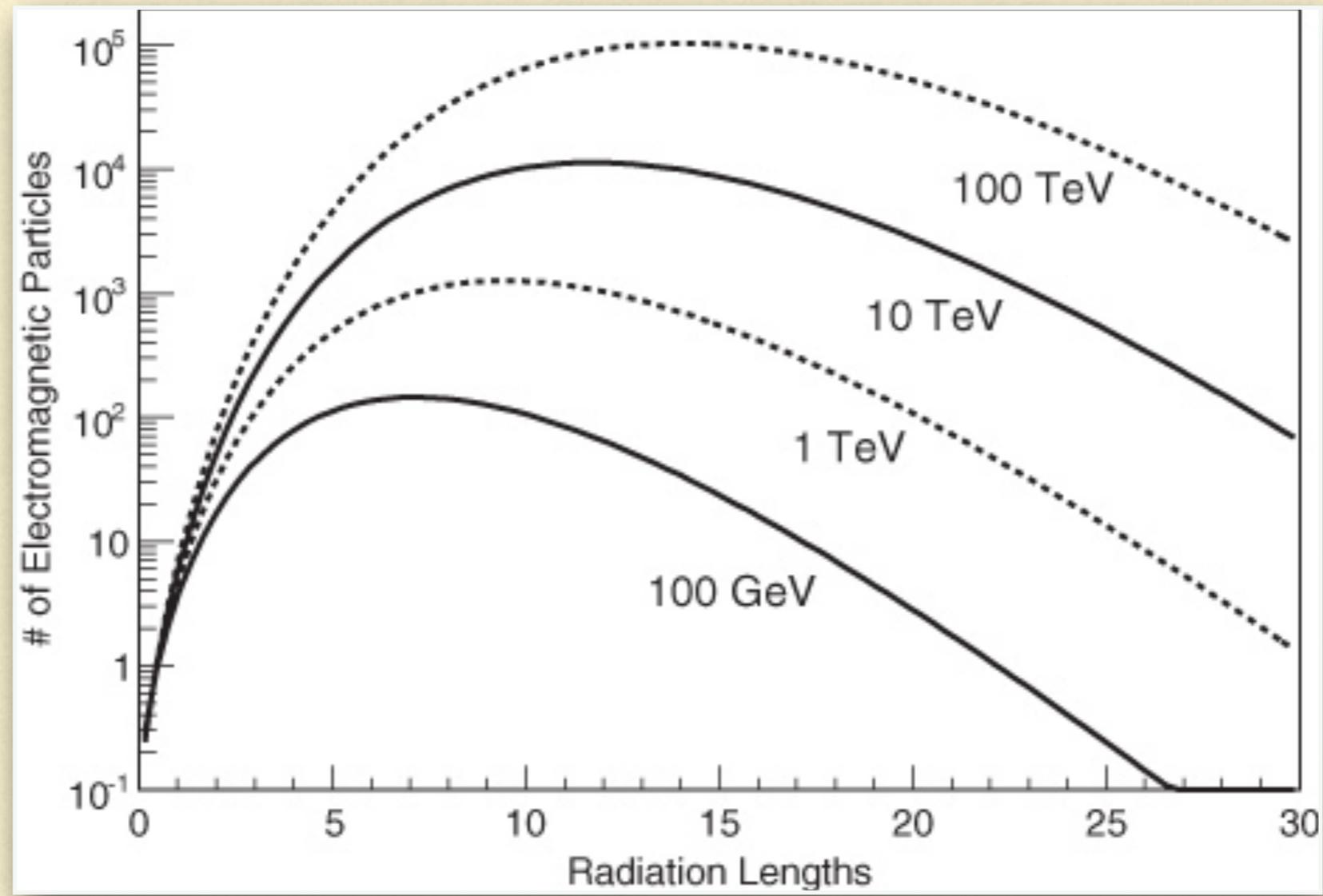
$$N_{e^\pm}(L_{\max}) \sim \frac{2}{3} e^{\ln(\frac{E_0}{E_c})} = \frac{2}{3} \left( \frac{E_0}{E_c} \right)$$

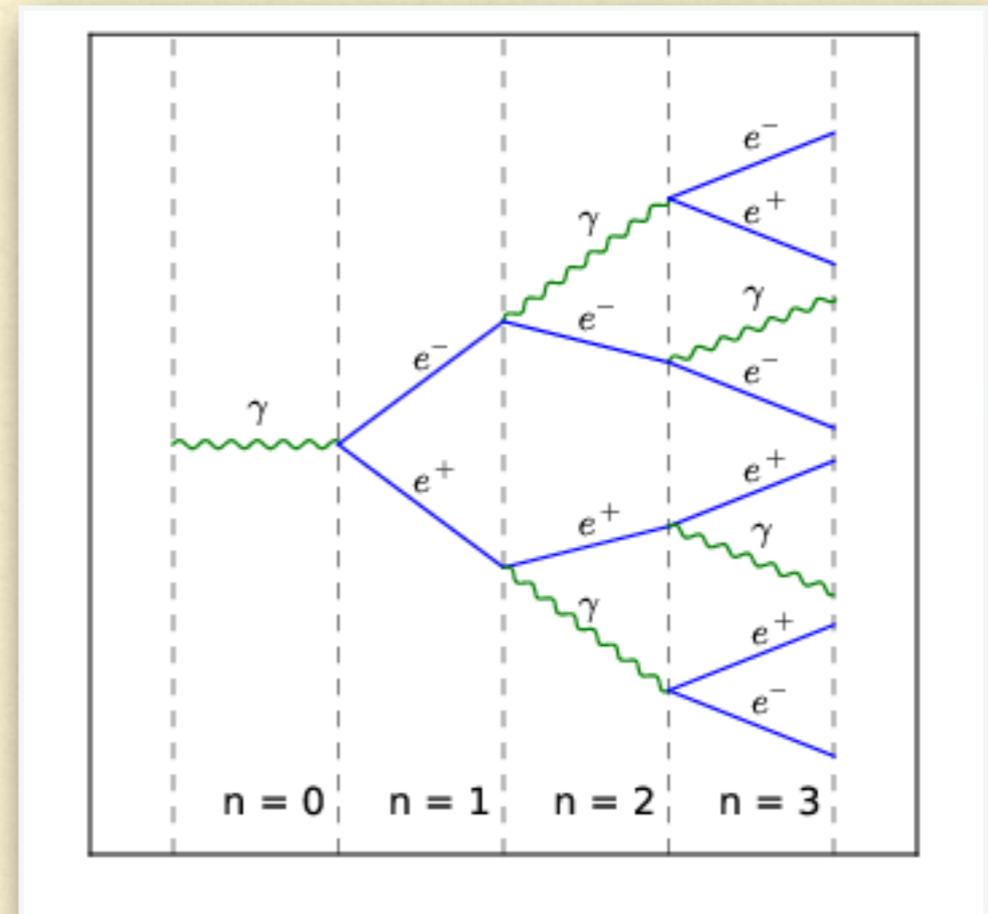
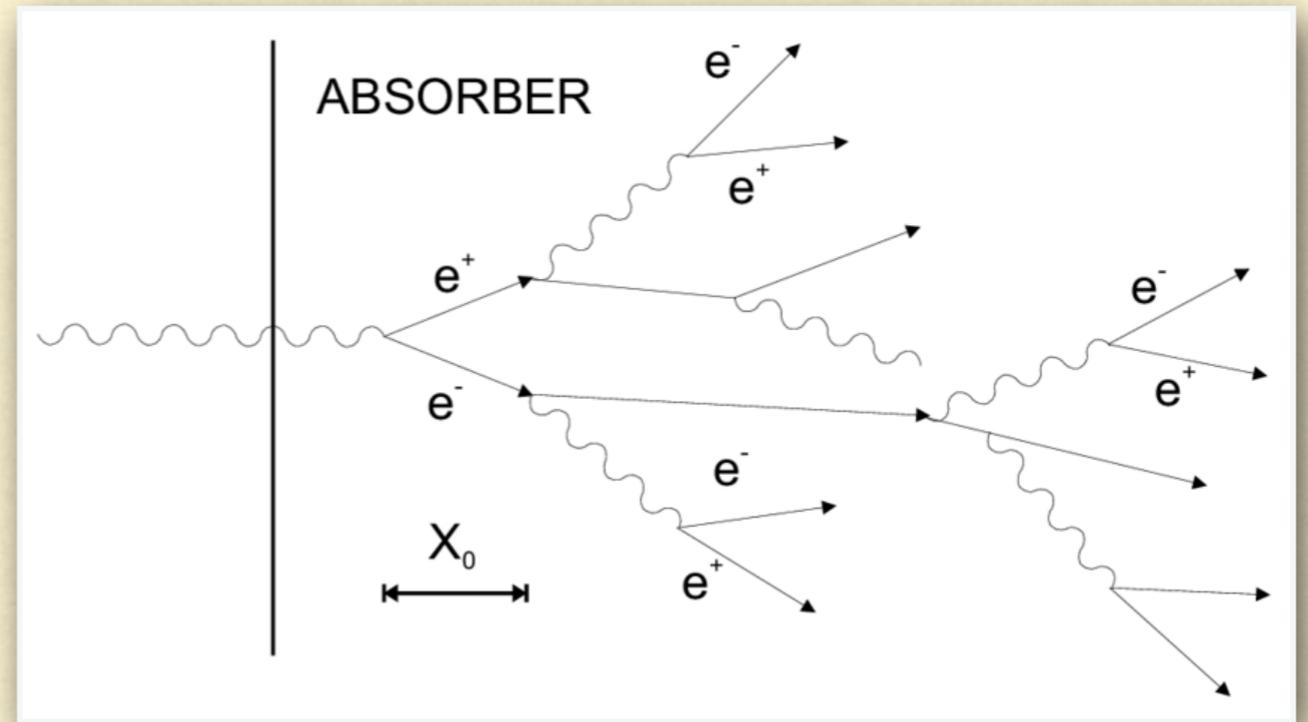
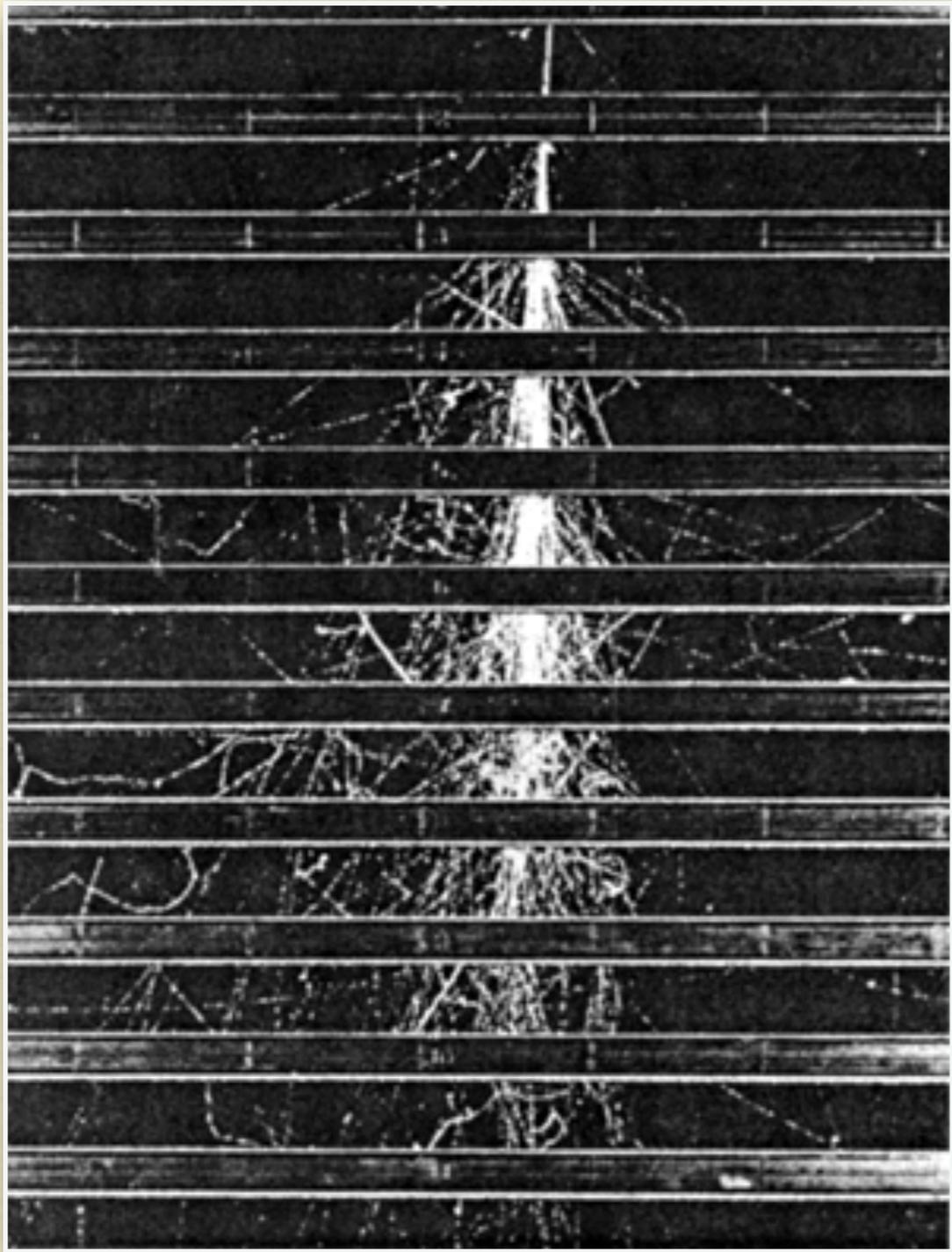
$$N_{\text{total}} \sim e^{-L_{\max}}$$

---

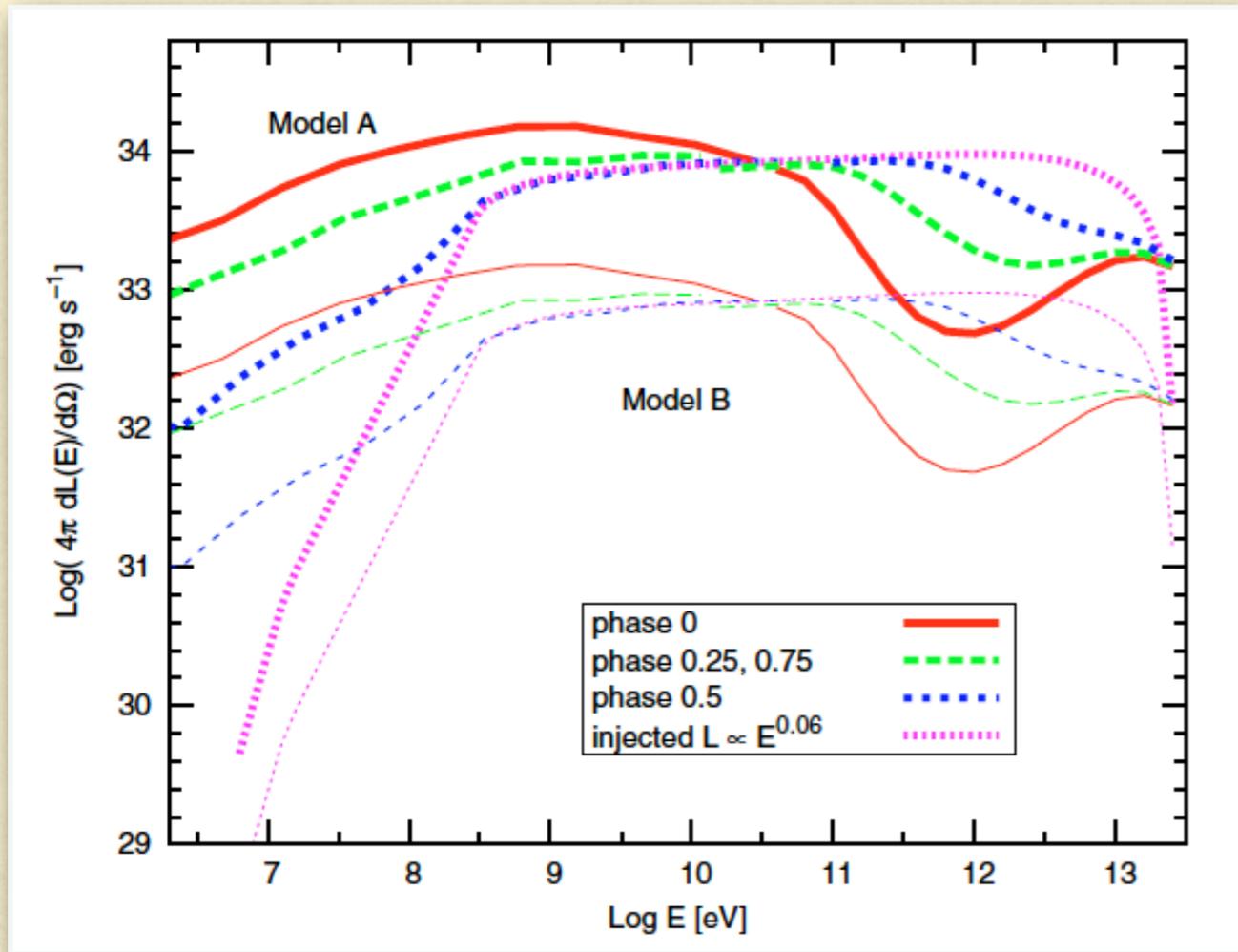
Número de fotones con energía  $> E$  que una cascada genera a una dada profundidad dentro del material. Cuanto mayor es la energía  $E_0$  del fotón inicial, más fotones se generan en total.



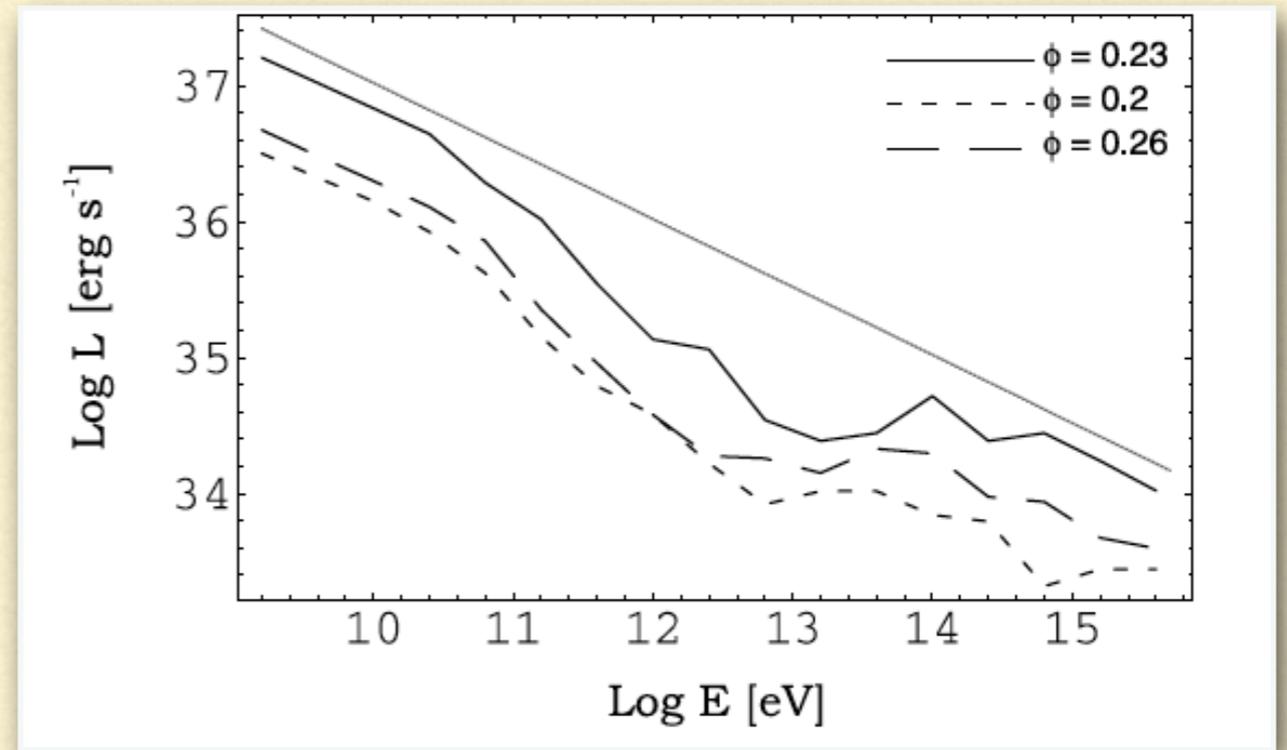




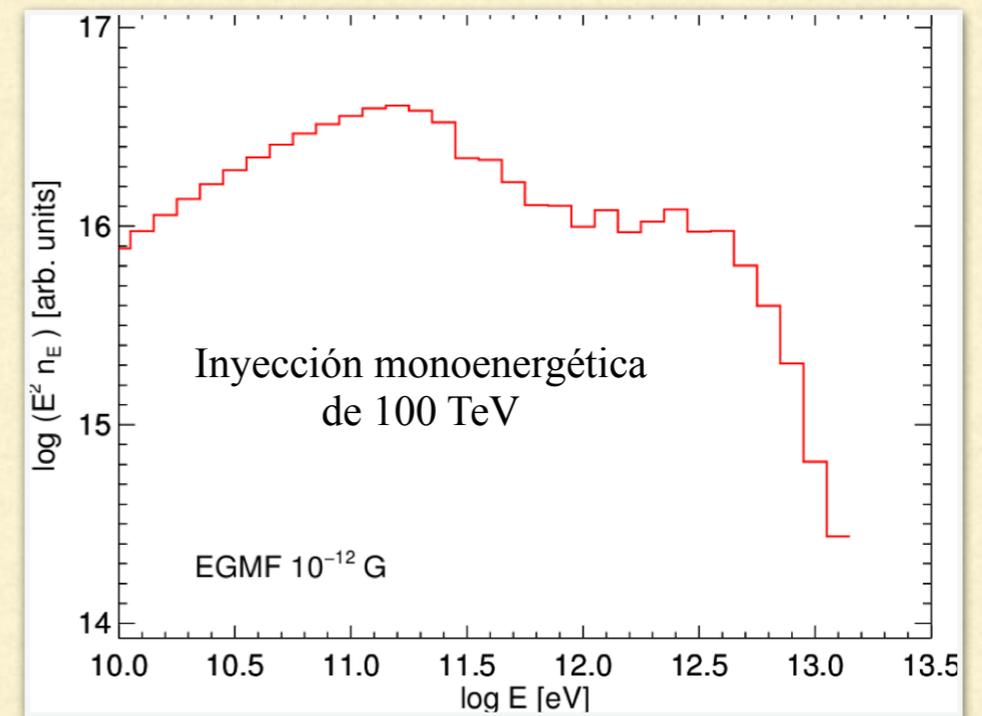
# Espectros modificados por cascadas e.m.



Orellana et al. (2007)

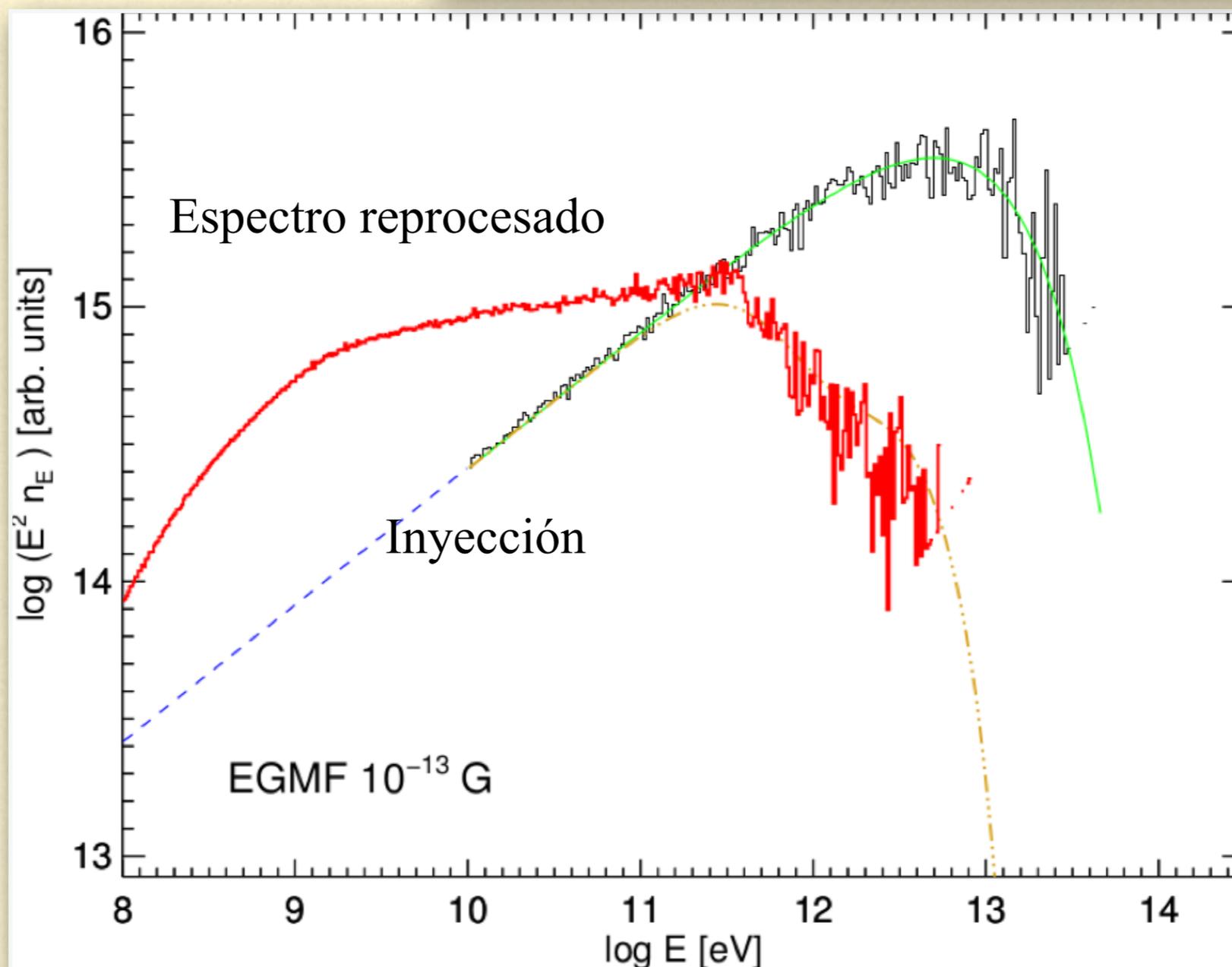
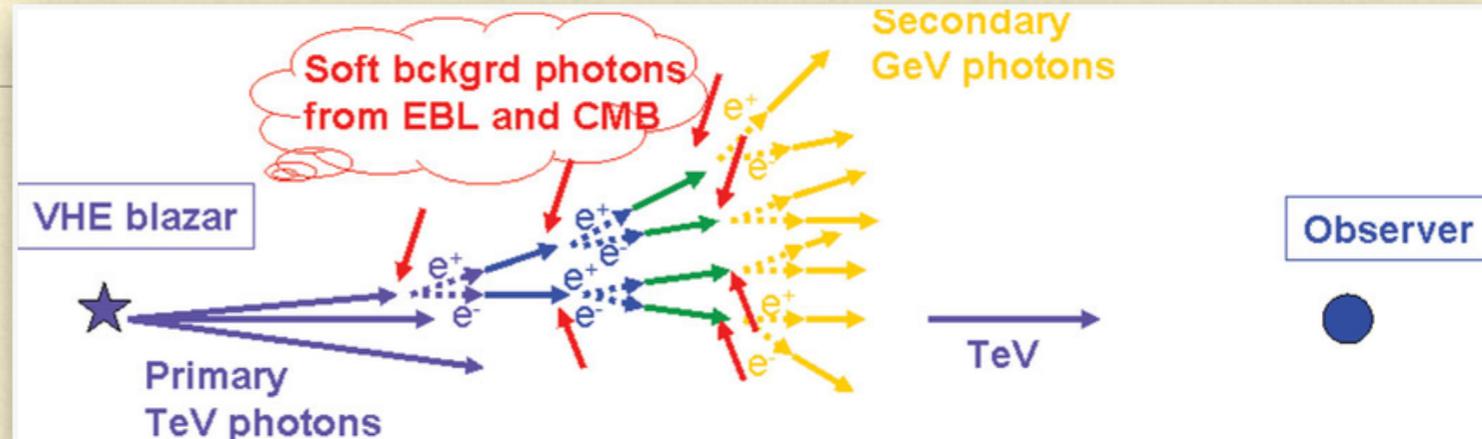


Orellana & Romero (2007)



Orellana et al. (2015)

# Simulaciones MonteCarlo



Orellana et al. (2015)

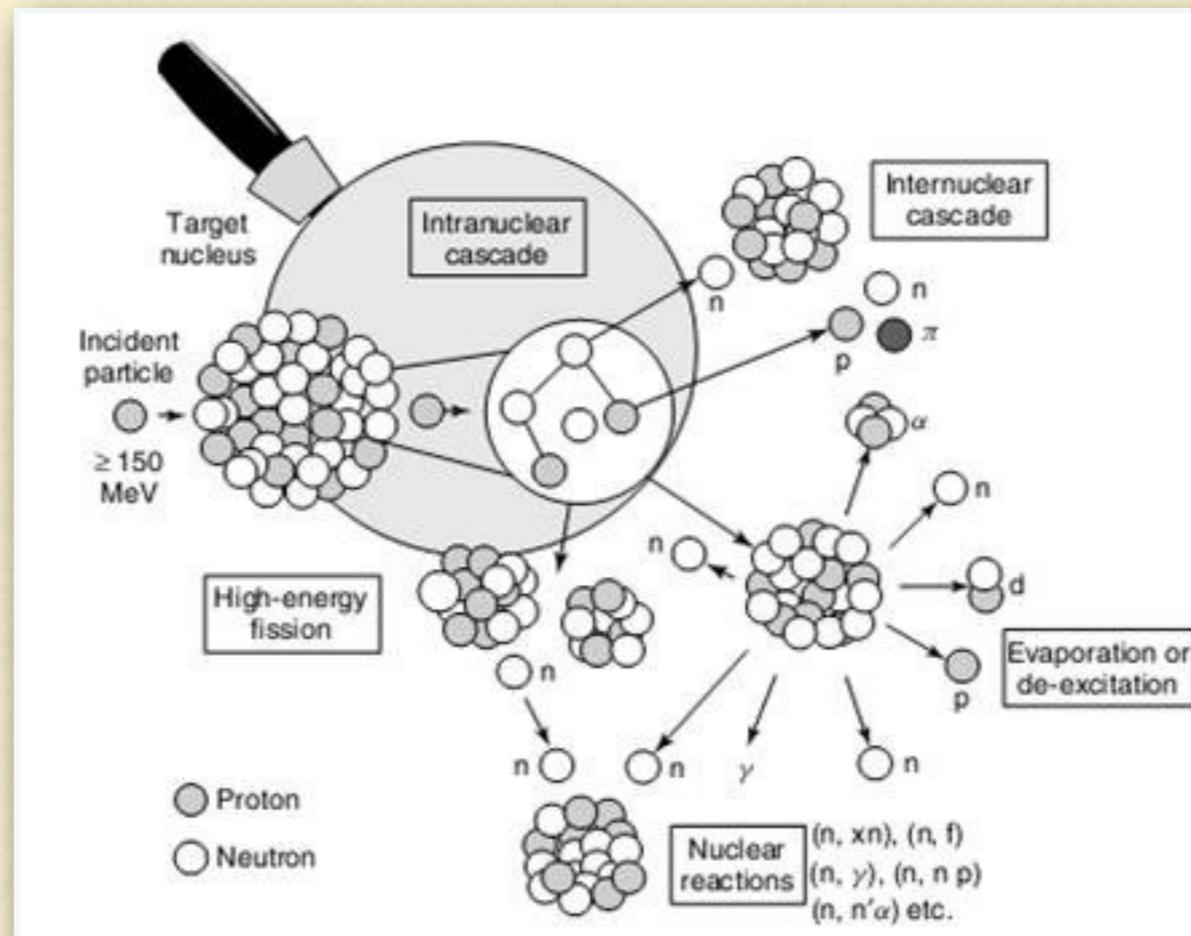
---

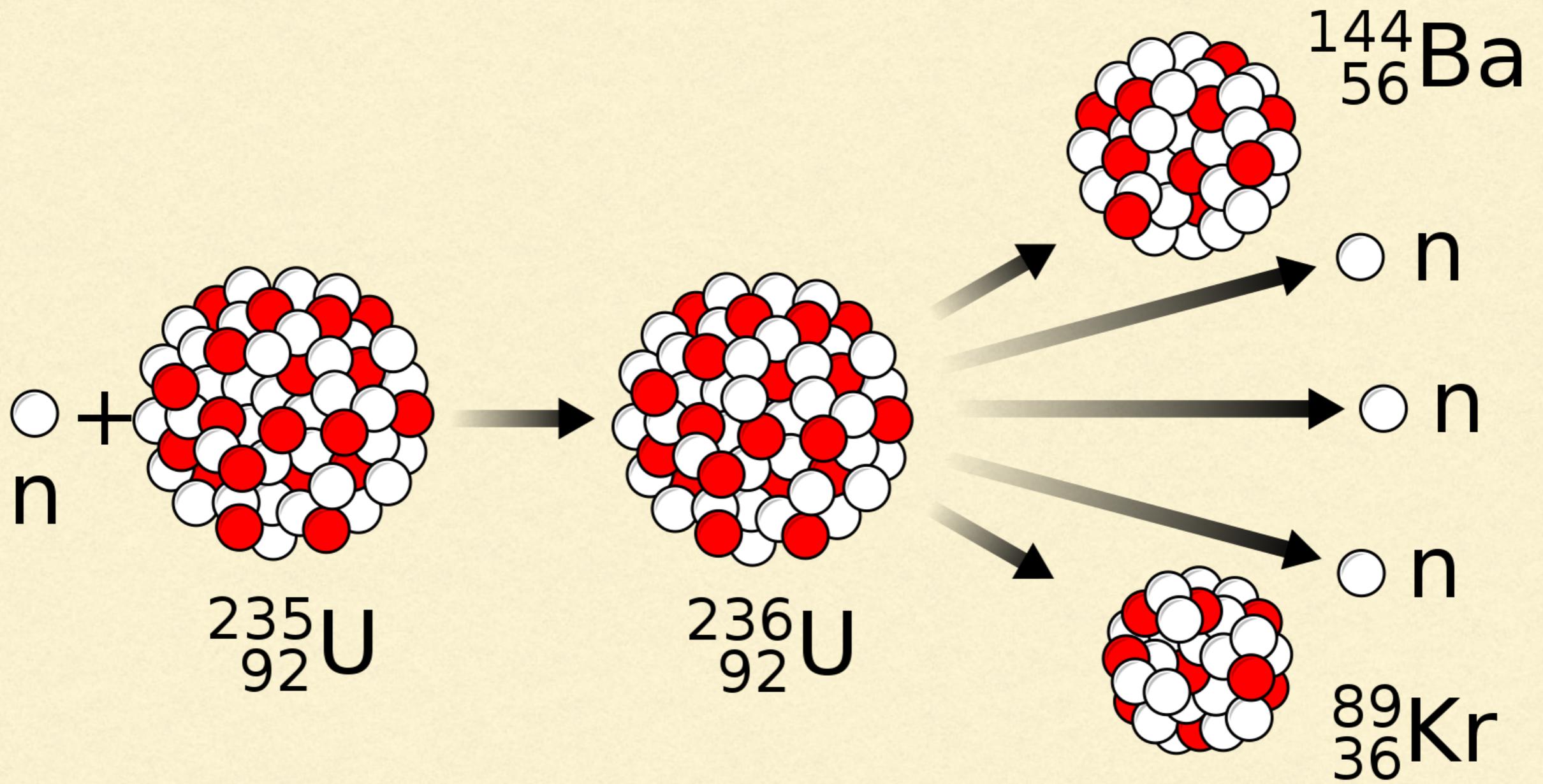
## Cascadas hadrónicas

Cuando un protón de muy alta energía impacta en un núcleo, interactúa con algún nucleón produciendo piones. También pueden producirse partículas extrañas y antinucleones. Si la energía es suficiente, cada nuevo hadrón puede interactuar dentro del núcleo dando lugar a una “mini-cascada” hadrónica. Los nucleones que interactúan con el protón primario por lo general son removidos del núcleo dejándolo en un estado que puede ser inestable; como consecuencia el núcleo se fragmenta y se emiten núcleos más livianos en un proceso conocido como *spallation*. Los núcleos ligeros inyectados se suelen llamar *astillas* o *fragmentos de astillado*. Estos fragmentos son emitidos más o menos isotrópicamente en el sistema del laboratorio. En cambio, los productos de la cascada hadrónica tienen una componente importante de su momento en la dirección de movimiento protón original. Normalmente, neutrones son eyectados tanto por el núcleo original como por los fragmentos.

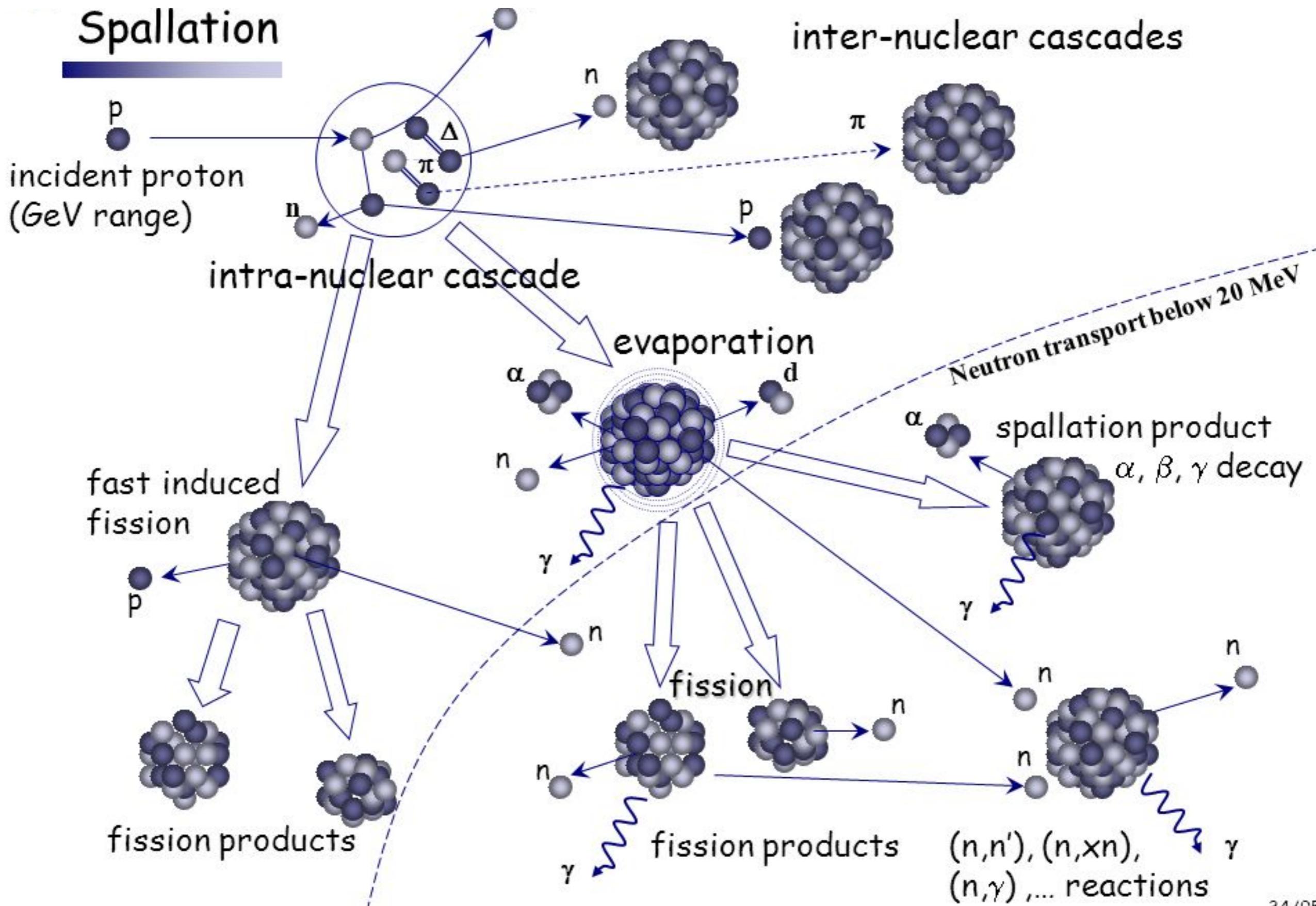
---

# Spallation





# Spallation



---

Los piones producto de la cascada hadrónica decaen según:

$$\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$$

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

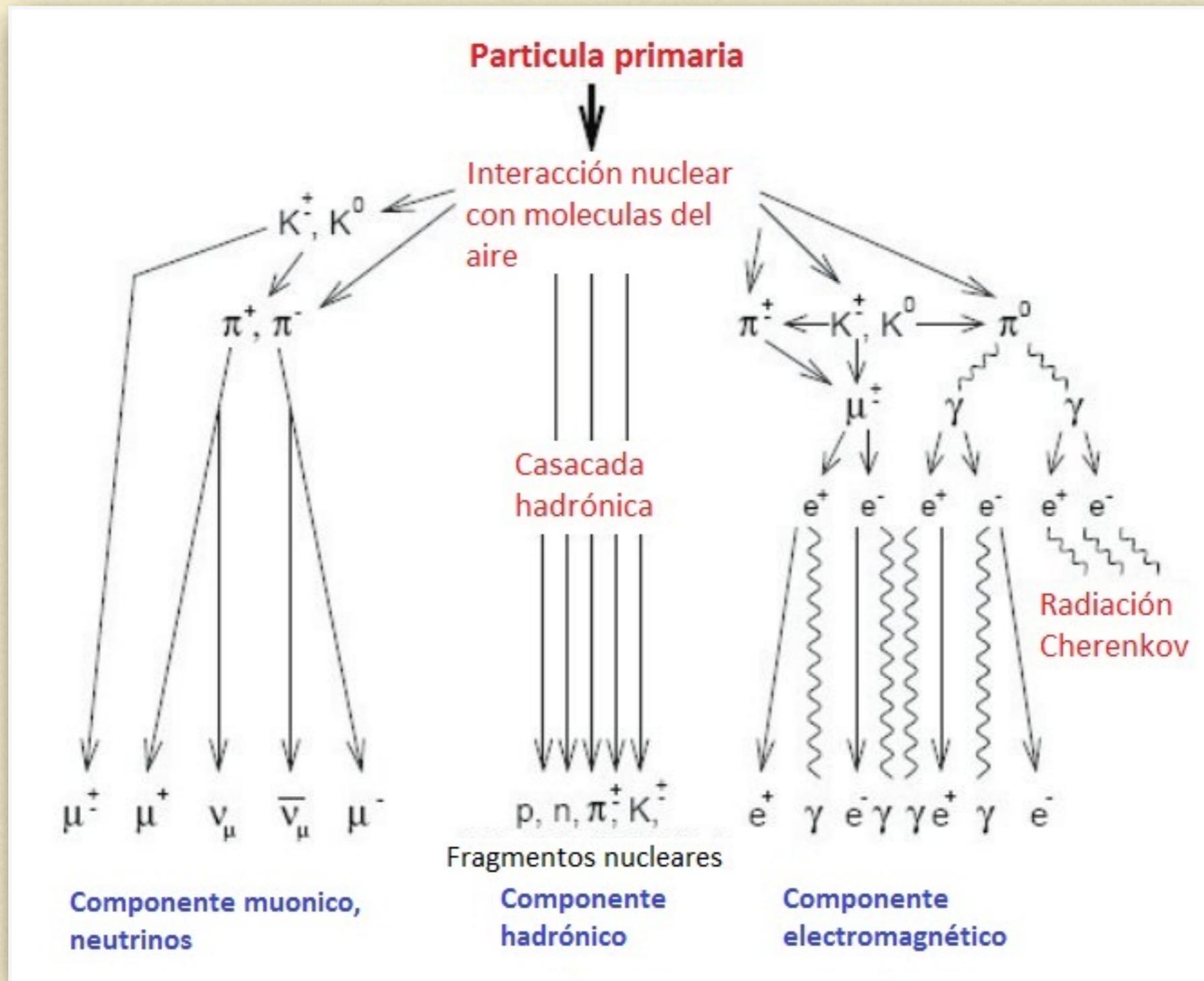
Los muones, a su vez, decaen como:

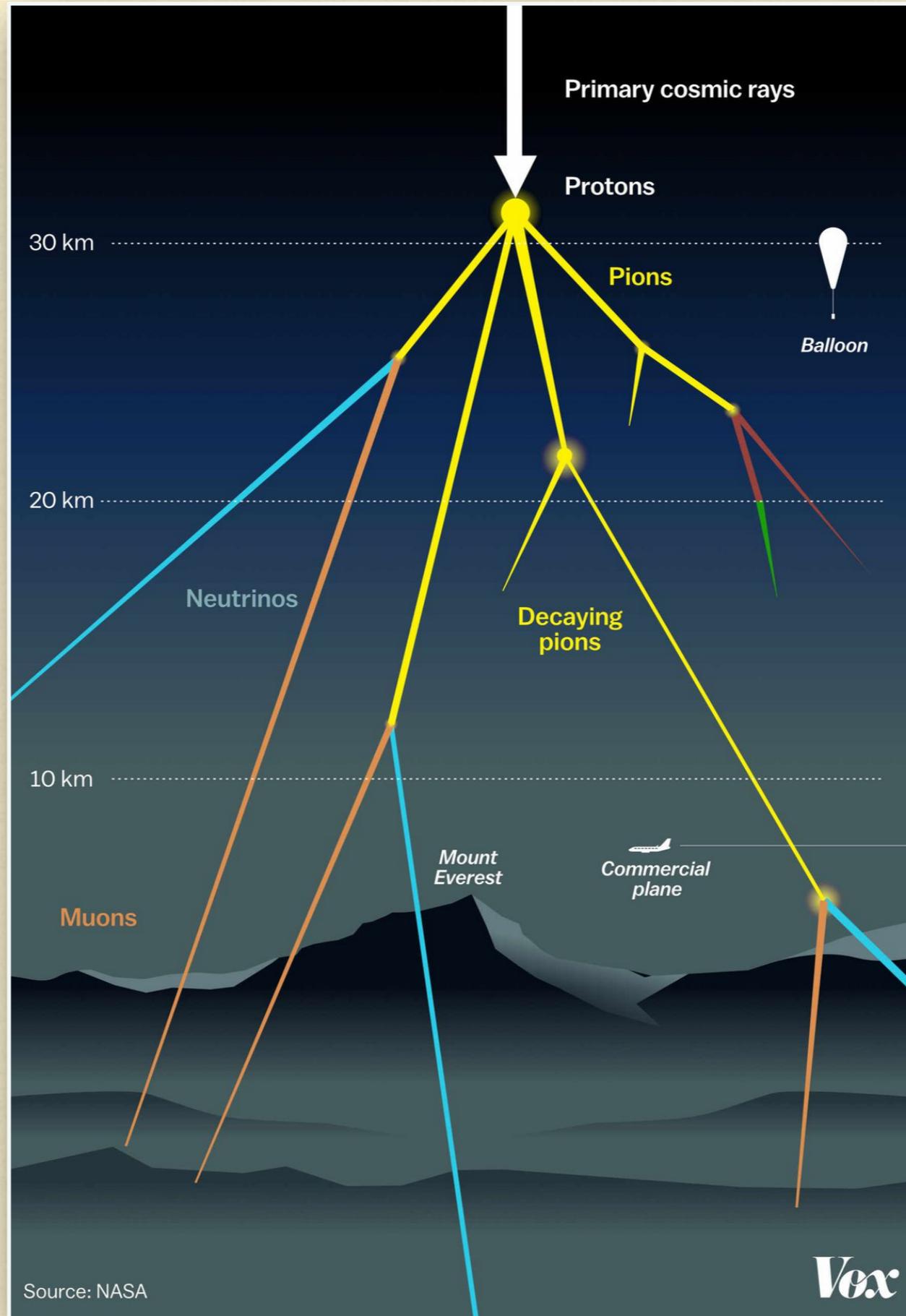
$$\mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.$$

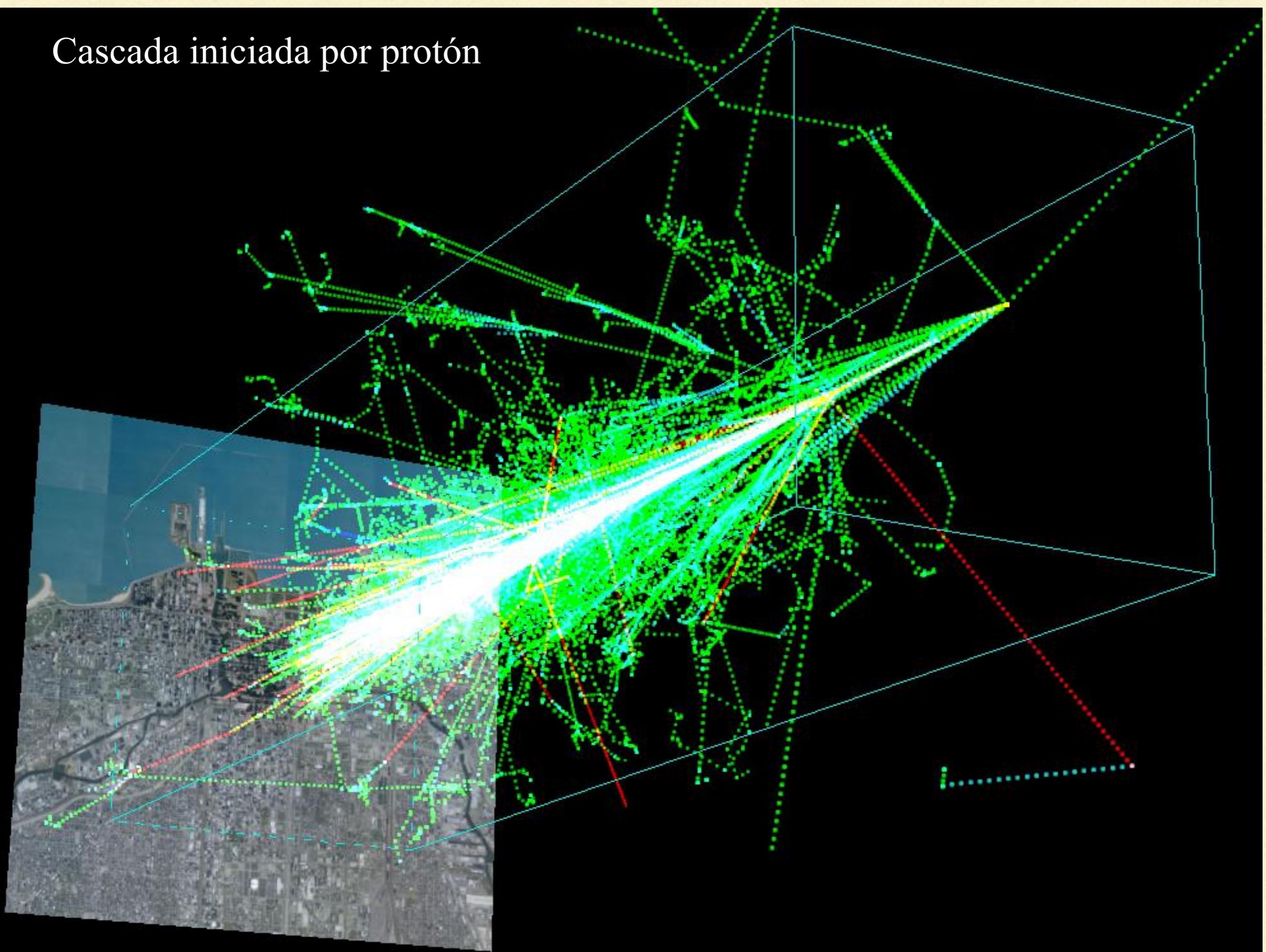
Tanto los rayos  $\gamma$  como los  $e^\pm$  producidos en estos decaimientos dan lugar a cascadas electromagnéticas.

---

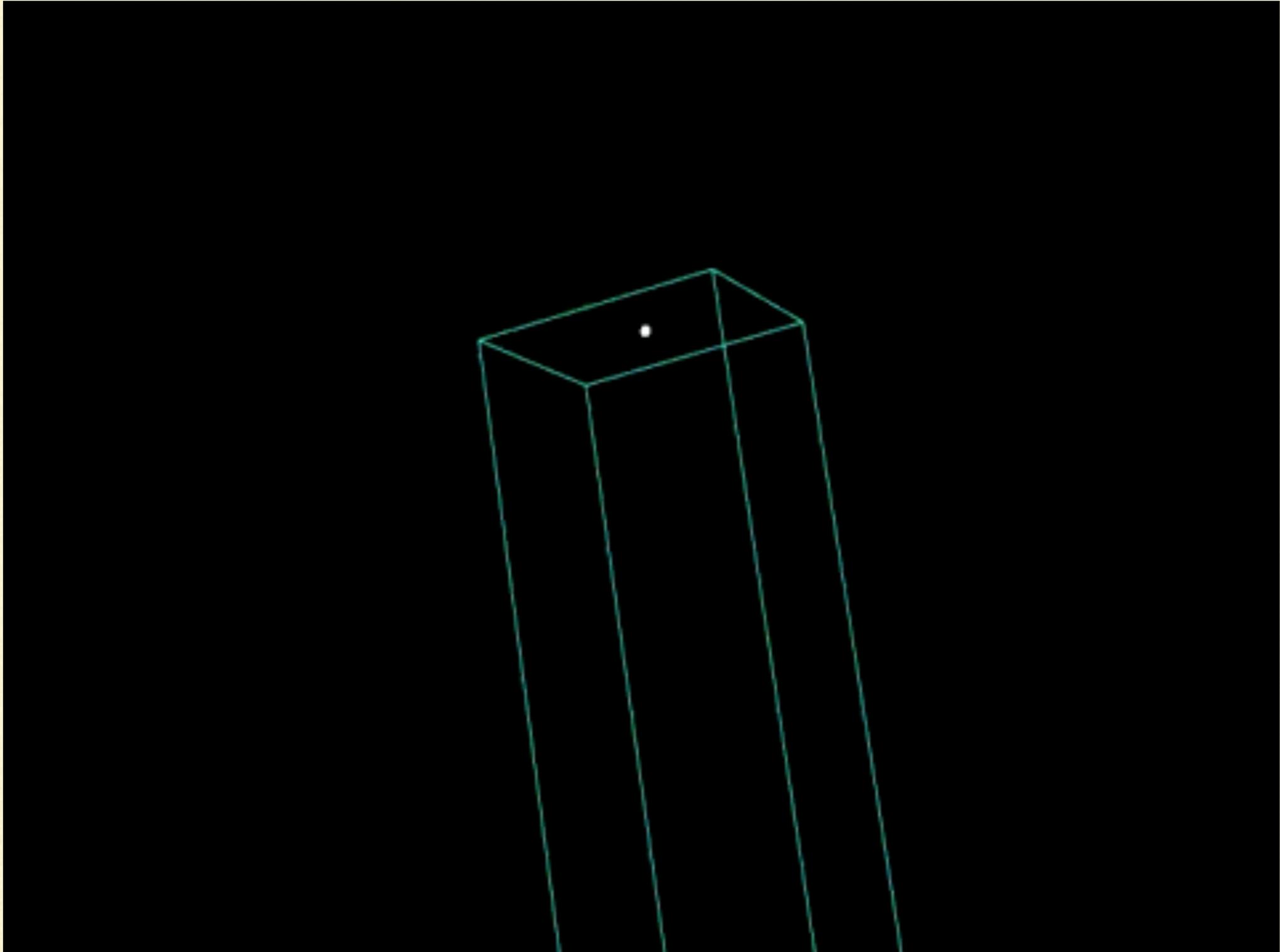




# Cascada iniciada por protón



# Simulación MonteCarlo



---

Cascada iniciada por un protón de 1 EeV sobre Ginebra



1. Transport of electron/positron pairs and protons:

$$\frac{\partial}{\partial E} (b_i(E)N_i(E)) + \frac{N_i(E)}{t_{\text{esc}}} = Q_i(E)$$

2. Transport of charged pions and muons:

$$\frac{\partial}{\partial E} (b_i(E)N_i(E)) + \frac{N_i(E)}{t_{\text{esc}}} + \frac{N_i(E)}{t_{\text{dec}}^i} = Q_i(E).$$

3. Transport of photons:

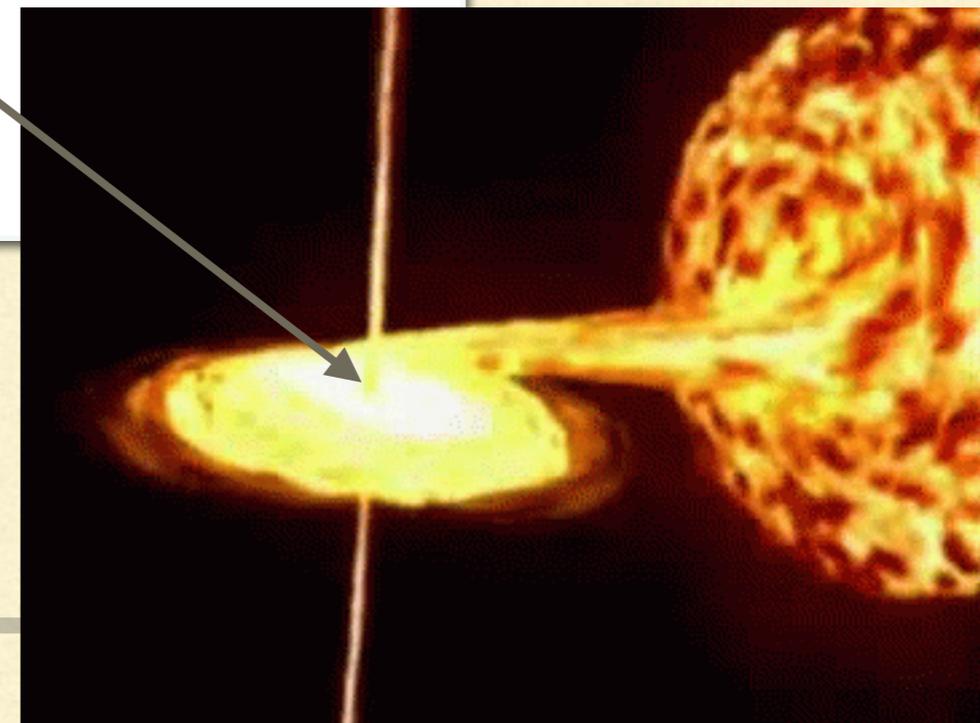
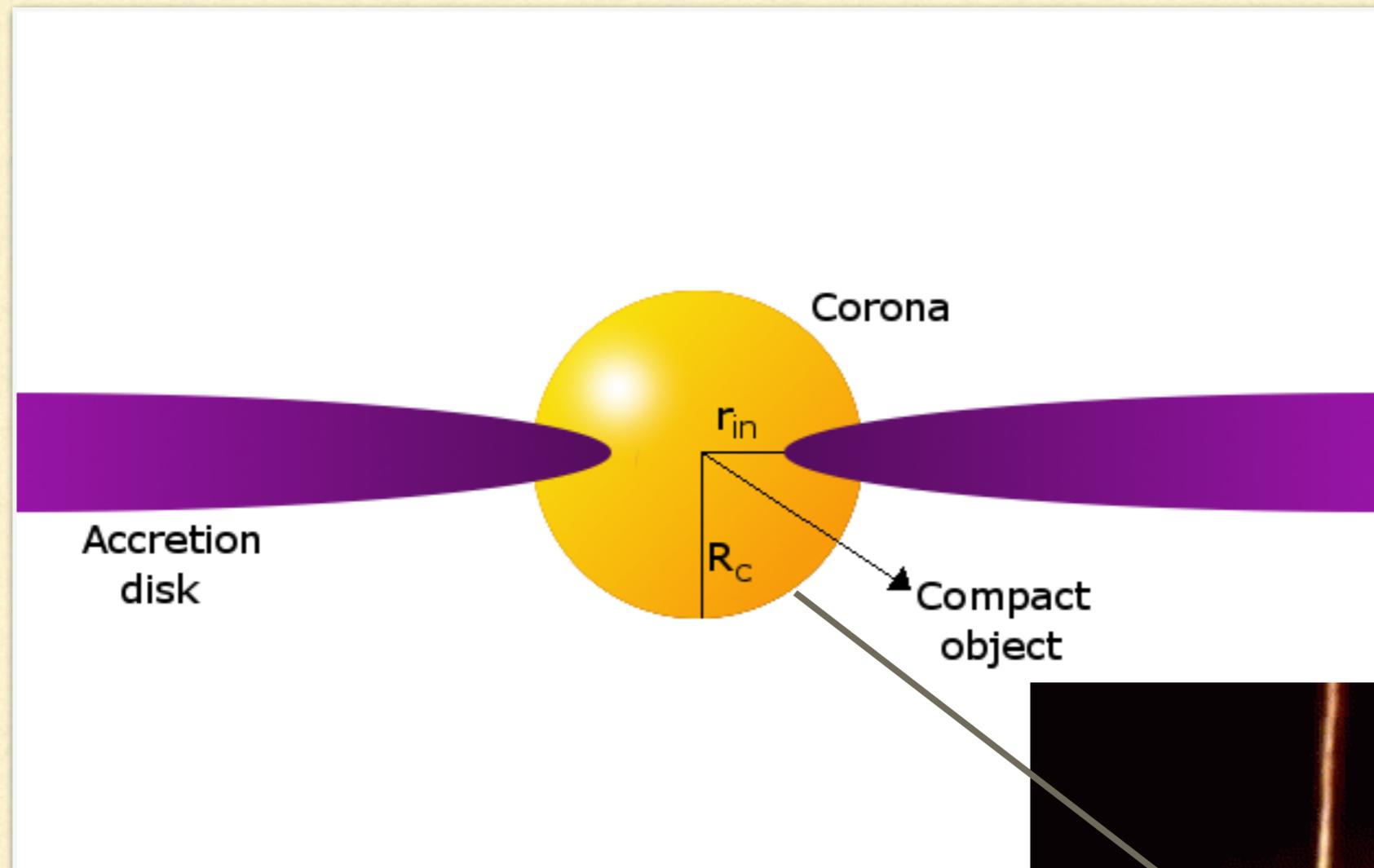
$$\frac{N_\gamma(E_\gamma)}{t_{\text{esc}}^\gamma} = Q_\gamma(E_\gamma) + Q_{e^\pm \rightarrow \gamma}(N_{e^\pm}, E_\gamma) - Q_{\gamma\gamma \rightarrow e^\pm}(N_\gamma, E_\gamma).$$

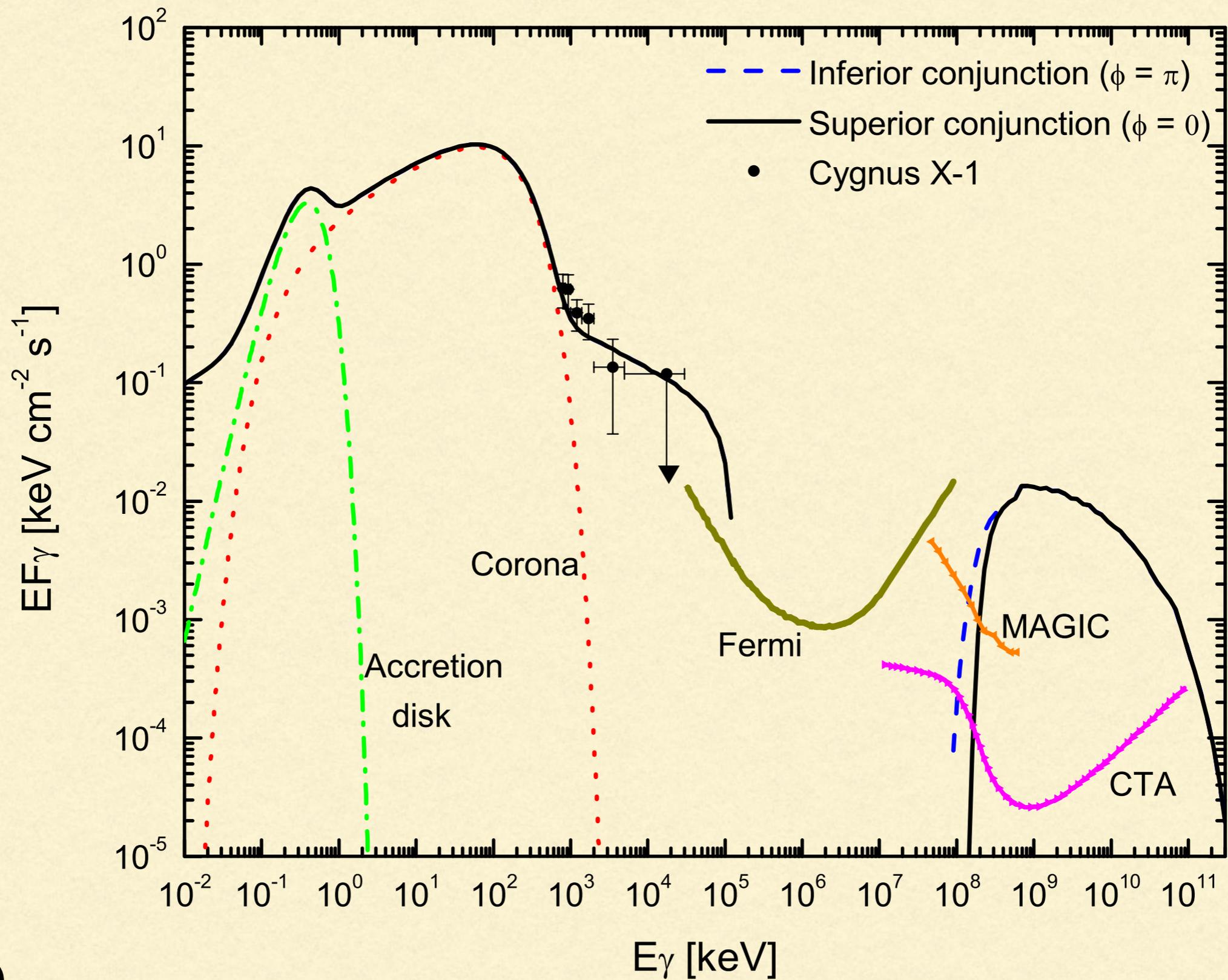
$$Q_\gamma(E_\gamma) = Q_{\text{synchr}}(E_\gamma) + Q_{\text{IC}}(E_\gamma) + Q_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}(E_\gamma).$$

$$Q_{e^\pm}(N_\gamma, E_\gamma) = \frac{1}{m_e c^2} \int \int dE_{e^+} dE_{e^-} R_{e^\pm}(E_{e^-}, E_{e^+}, E_\gamma) \times N_{e^+}(E_{e^+}) N_{e^-}(E_{e^-}).$$

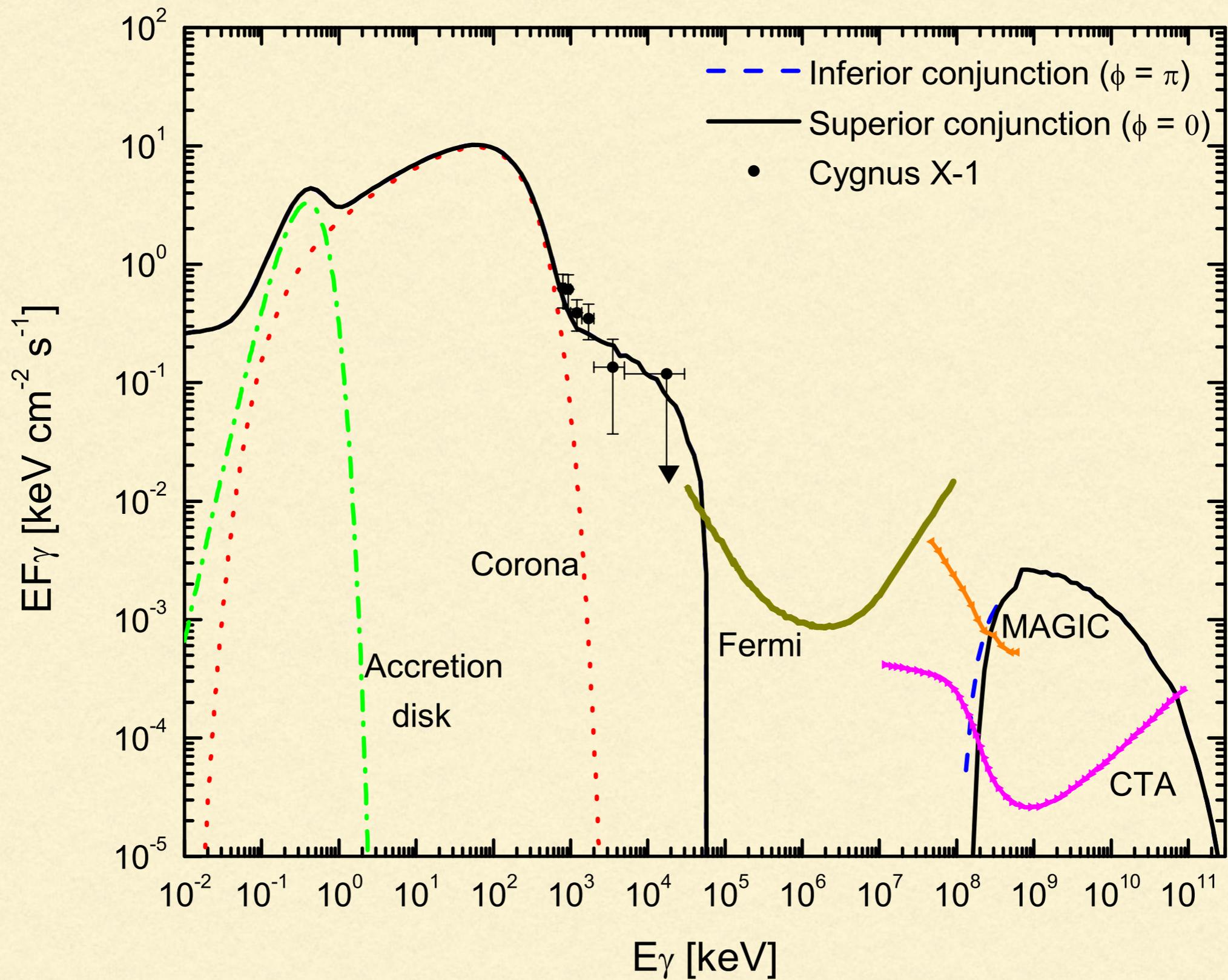
**Sistema: corona alrededor de un agujero negro**

Vieyro & Romero (2012)





$a=100$



a=1

---

## Con dependencia temporal

$$Q(E, t) = Q_0 E^{-\alpha} e^{-E/E_{\max}} (1 - e^{t/\tau_{\text{rise}}}) \\ \times \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \left( \frac{t - \tau_{\text{plat}}}{\tau_{\text{dec}}} \right) \right].$$

$$\frac{\partial N_i(E, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial E} \left( b(E) N_i(E, t) \right) + \frac{N_i(E, t)}{t_{\text{esc}}} = Q_i(E, t).$$

Vieyro & Romero (2012)

---